Journées Équations aux dérivées partielles

Monique Sable-Tougeron

Régularité microlocale pour des problèmes aux limites non linéaires

Journées Équations aux dérivées partielles (1984), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1984____A1_0>

REGULARITE MICROLOCALE POUR DES PROBLEMES AUX LIMITES NON LINEAIRES

par Monique SABLE-TOUGERON

INTRODUCTION

Dans [2] Bony a étudié la régularité microlocale des solutions réelles d'une équation aux dérivées partielles non linéaire générale au delà des chocs et en dessous de l'interaction. Ici on s'intéresse au problème analogue au voisinage d'un bord dans le cas non caractéristique, sous des conditions aux limites régulières, et dans la même zone que Bony : le comportement y est linéaire et gouverné par le symbole principal.

1 - LE PROBLEME AU BORD. REGULARITE LOCALE

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, de bord $\partial\Omega$ et $u \in H^s_{loc}(\bar{\Omega})$, $s > \frac{n}{2} + m$ une fonction réelle solution d'une équation aux dérivées partielles non linéaire d'ordre m :

(1) $$F[u] \equiv F(x,u(x),\ldots,\partial^\alpha u(x),\ldots)_{|\alpha|\leqslant m} = 0 \quad \text{dans } \bar{\Omega}\ ,$$

où F est une fonction réelle de classe C^∞ de ses arguments. On fait l'hypothèse :

H_1) $\partial\Omega$ est non caractéristique pour l'opérateur différentiel linéarisé $\tilde{F}$ de $F[u]$:

$$\tilde{F}(x,D_x)v = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (\partial_{\partial^\alpha u} F)[u]\partial^\alpha v.$$

Par carte locale on ramène l'équation (1) à

(2) $$\partial^m_{x_n} u + G(x,u(x),\ldots,\partial^\alpha u(x),\ldots) = 0 \text{ dans un ouvert } \Omega_+ \text{ de } \bar{\mathbb{R}}^n_+$$

où G est C^∞ à support compact et ne fait intervenir que les dérivées $\partial^\alpha u$ telles que $|\alpha| \leqslant m$ et $\alpha_n \neq m$.

S'introduisent alors naturellement les espaces $H^{t,t'}$ qu'Hörmander [4] a définis dans $\mathbb{R}^n$ par transformation de Fourier en :

$$\int (1+|\xi|^2)^t \ (1+|\xi'|^2)^{t'} \ |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi < +\infty$$

Ce sont des algèbres pour $t > \frac{1}{2}$, $t + t' > \frac{n}{2}$ et $t + 2t' > \frac{1}{2}$ et les algèbres réelles sont stables par composition avec une fonction C^∞ réelle et nulle en O.

On déduit alors de (2) que la fonction u solution de (1) a la régularité locale

(3) $\qquad u \in H^{s+\mu,\mu}_{loc}(\Omega_+) \quad$ pour tout $\mu < s - m - \frac{1}{2}$,

Cette régularité remplace le C^∞ à valeurs $\mathcal{D}'$ du cas linéaire.

2 - PARALINEARISATION TANGENTIELLE

On définit le paraproduit tangentiel de deux fonctions $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathcal{S}(R^n)$ comme paraproduit "de Bony" des fonctions $u(x_n)$ et $v(x_n)$ c'est à dire

$$\Pi'_u v = \sum_{p' \geq 2} S'_{p'-2} u . \Delta'_{p'} v \ ,$$

avec $\mathcal{F}(S'_p u)(\xi) = \varphi'(2^{-p'}\xi')\hat{u}(\xi)$, où $\varphi' \in C^\infty_o(\mathbb{R}^{n-1})$ est positive, vaut 1 dans $|\xi'| \leq \frac{1}{2}$ et zéro dans $|\xi| \geq 1$, et $\Delta'_{p'} = S'_{p'+1} - S'_{p'}$.

Par double décomposition de Littlewood dans les espaces $H^{t,t'}$ on obtient le théorème de paralinéarisation tangentielle :

Théorème

Si $F \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+} \times \mathbb{R}^N)$ est réelle, à support compact en x, et si $u_1,\ldots,u_N$ sont des fonctions réelles de $H^{s+s',-s'}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ avec $s > \frac{n}{2}$, $0 \leq s' < s - \frac{1}{2}$, alors

$$F(x,u_1,\ldots,u_N) - \sum_{i=1}^{N} \Pi'_{(\partial_{u_i} F)(x,u_1,\ldots,u_N)} u_i \quad \text{appartient à}$$

$$H^{s+s',-s'+(s-n/2)}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$$

De plus on peut comparer Π'_u aux autres opérateurs paradifférentiels $\sigma'_{u(x_n)}(x',D_{x'})$ associés à $u(x_n)$ comme dans Bony [2] :

Proposition 1

Si $u \in H^{s+s',-s'}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ avec $s > \frac{n}{2}$ et $s' \geqslant 0$, les opérateurs $\Pi'_u - \sigma'_{u(x_n)}(x',D_{x'})$ se prolongent en opérateurs bornés de $H^{t,t'}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ dans $H^{t,t'+(s-\frac{n}{2})}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ pour $-(s+s') < t \leqslant s + s'$.

Diminuant Ω_+ dans (2) on peut supposer que u est à support compact et ainsi d'après 1), $u \in H^{s+\rho,-\rho}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ pour $\rho = s - m - \frac{n}{2}$; toute paralinéarisation tangentielle de (2) donne alors :

$$D^m_{x_n} u + \sum_{j=1}^{m} \sigma'_{a_j(x_n)}(x',D_{x'})D^{m-j}_{x_n}u = g \tag{4}$$

dans un ouvert $\omega_+ = \omega' \times [0,T[$ de $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, avec $g \in H^{s-m+\rho}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Ce second membre a donc la même régularité jusqu'au bord et en toutes les variables que dans le cas intérieur traité par Bony.

3 - WAVE-FRONT H^S AU BORD

On dit que $v \in H^{t,-\infty}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ est microlocalement de classe $\tilde{H}^t$ en un point $(x_o,\xi'_o) \in (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \times \mathbb{R}^{n-1}$, ou que $(x_o,\xi'_o) \notin \partial WF_t u$, s'il existe un opérateur pseudodifférentiel tangentiel T d'ordre 0 elliptique en (x_o,ξ'_o) tel que Tu appartienne à $H^t(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Comme dans le cas linéaire non caractéristique [6], cette propriété tout à fait attachée à la carte, devient invariante pour la fonction réelle u de classe H^s, $s > \frac{n}{2} + m$, solution de l'équation non caractéristique (1) si $t \leqslant s+\rho$, $\rho = s - m - \frac{n}{2}$.

La preuve s'effectue par prolongement régulier dans $x_n < 0$, utilise (3) et (4) ainsi que la comparaison d'un prolongement de (4) dans $x_n < 0$ avec une paralinéarisation de Bony en toutes les variables.

4 - REGULARITE ELLIPTIQUE. REFLEXION DES SINGULARITES

On ajoute l'hypothèse

H_2) en un point $(x_o,\xi_o) \in \dot{T}^*\partial\Omega$, les $p \geqslant 0$ racines réelles λ_j du polynôme en λ

$$(5) \qquad \tilde{F}_o(x_o,\xi_o + \lambda\eta_o) = i^m \sum_{|\alpha|=m} (\partial_{\partial^\alpha u} F)(x_o,u(x_o),\ldots\partial^\beta u(x_o)\ldots)(\xi_o+\lambda\eta_o)^\alpha,$$

où $\eta_o \in \dot{N}^*_{x_o}\partial\Omega$, sont simples.

Si $p = 0$ cela signifie que (x_o,ξ_o) est un point elliptique au sens de Melrose [5]. Si $p \geqslant 1$ on suppose $\rho = s - m - \frac{n}{2} > 2$ et on note γ_j les (demi)-bicaractéristiques de $\tilde{F}_o$ issues des points $(x_o,\xi_o + \lambda_j\eta_o)$; l'hypothèse H_2) signifie que les projections de ces courbes dans Ω sont transverses à $\partial\Omega$. On suppose que u est microlocalement de classe $H^{s+\sigma}$, $\sigma \leqslant \rho-1$ en un point de γ_j situé au dessus de Ω pour $j = 1,\ldots,p_o$, $p_o \geqslant 0$, et qu'elle vérifie $\ell = \frac{m-p}{2} + (p-p_o)$ conditions aux limites

$$(6) \qquad f_j[u]\big|_{\partial\Omega} = f_j(x,u(x),\ldots,\partial^\alpha u(x),\ldots)_{|\alpha|\leqslant m_j}\Big|_{\partial\Omega} = 0 ,$$

les fonctions f_j étant réelles, de classe C^∞ de leurs arguments et $m_j \leqslant m-1$.

Si ces conditions aux limites sont assez régulières, on peut énoncer un résultat analogue à celui de Nirenberg [7] dans le cas linéaire :

Théorème 2

si $p = 0$ on a $(x_o,\xi_o) \notin \partial WF_{s+\rho}u$ et

si $p \geqslant 1$ on a $(x_o,\xi_o) \notin \partial WF_{s+\sigma}u$.

Idée de la preuve

Localisant près de x_o et notant $V = (V_1,\ldots,V_m)$ avec $V_j = D_{x_n}^{j-1}\Lambda^{m-j}u$, où Λ est un opérateur pseudodifférentiel dans $\mathbb{R}^{n-1}$ de symbole

$|\xi'|$ pour $|\xi'| \geqslant 1$, on ramène (4), et aussi (5) après paralinéarisation ordinaire, au problème

(7) $$D_{x_n} V - \sigma'_{\phi A(x_n)}(x',D_{x'})V = G \text{ dans } \omega_+$$

(8) $$\sigma'_{\phi B}(x',D_{x'})V(x',0) = H \text{ dans } \omega'$$

avec $G \in H^{s-m+\rho}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ et $H \in \prod_{j=1}^{\ell} H^{s-m_j+\rho+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, où A est une somme de termes matriciels homogènes en ξ' de degré 1 au plus et peu réguliers en x, et B du même type mais d'ordre 0 ; ($\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ est nulle au voisinage de 0 et égale à 1 hors d'un compact).

La factorisation de (5) dans un voisinage conique $\omega_+ \times \Gamma'$ de (x_o,ξ'_o) en

$$\prod_{j=1}^{p} (\lambda-\lambda_j(x,\xi'))\ E_\pm(x,\xi')$$

où les λ_j et les coefficients de $E_\pm$ sont homogènes en ξ' et dans l'algèbre $H^{s+\mu,-\mu}_{loc}(\omega_+)$ conduit à une réduction complète de (7) en

(9) $$D_{x_n} W - \sigma'_{\phi D(x_n)}(x',D_{x'})W = G_1 \text{ dans } \omega_+ ,$$

pour $W = \sigma'_{\phi S(x_n)}(x',D_{x'})V$ avec S elliptique en (x_o,ξ'_o), dans la classe $\sum^{o}_{s-m+\frac{n-1}{2},-\frac{n-1}{2}}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ c'est à dire $S = \sum_{j<\rho} S_{-j}$ avec $S_{-j}(x,\xi')$ homogène en ξ' de degré $-j$ et dans l'algèbre $H^{s-m+\frac{n-1}{2}-j,-\frac{n-1}{2}}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$; $D \in \sum^{1}_{s-m+\frac{n-1}{2},-\frac{n-1}{2}}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ est diagonale par blocs de telle sorte que (9) est constituée de p équations scalaires hyperboliques et deux équations matricielles elliptiques. Le second membre $G_1 \in H^{o,s-m}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ est de classe $\tilde{H}^{o,s-m+\rho}$ en (x_o,ξ'_o) si $\rho \notin \mathbb{N}$, ce qu'on suppose désormais pour simplifier.

Notant $W = (W_1,\dots,W_p,W_+,W_-)$, l'équation (8) s'écrit

$$(10)\quad \mathcal{B}_o(W_{p_o+1}(o),\ldots,W_p(o),W_+(o)) = \sigma'_{\phi B'}(x',D_{x'})(o,W_{p_o+1},\ldots,W_p,W_+,o)(o)$$

$$= H_1 - \sigma'_{\phi B'}(x',D_{x'})(W_1,\ldots,W_{p_o},o,o,W_-)(o) \text{ dans } \omega',$$

avec $H_1 \in H^{s-m+1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap H^{s-m+\rho+1/2}(x_o,\xi'_o)$ et B dans la classe $\sum_\rho^o(\mathbb{R}^{n-1})$ de Bony.

Un travail d'Alabidi [1] permet de traiter les p_o premières équations hyperboliques et donne $W_j \in \tilde{H}^{o,s-m+\sigma+1}(x_o,\xi'_o)$ et $w_j(o) \in H^{s-m+\sigma+1}(x_o,\xi'_o)$. Le bloc elliptique correspondant aux racines à partie imaginaire négative de (5) donne $W_- \in \tilde{H}^{1,s-m+\rho}(x_o,\xi'_o)$. On impose alors

H_3) $\mathcal{B}_o$ est elliptique au point (x_o,ξ'_o)

ce qui est toujours vérifiée pour les conditions de Dirichlet et est équivalent à une condition de recouvrement si p = O.

Par Bony [2], les traces $W_{p_o+1}(o),\ldots,W_p(o)$ et $W_+(o)$ sont dans $H^{s-m+\sigma+1}(x_o,\xi'_o)$. On traite alors les $(p-p_o)$ autres équations hyperboliques et l'autre équation elliptique en problème de Cauchy et on obtient que u est dans $\tilde{H}^{m-1,s-m+\sigma+1}(x_o,\xi'_o)$ si p = O, $\tilde{H}^{m-1,s-m+\sigma+1}(x_o,\xi'_o)$ si $p \geqslant 1$. On en déduit le théorème en utilisant l'équation (4).

Remarque

On peut étendre H_3) en supposant seulement que $\mathcal{B}_o$ est sous-elliptique. On améliore alors le résultat de Godin [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] : A. ALABIDI - "Réflexion transverse des singularités pour un problème aux limites non linéaire d'ordre 2". A paraître aux C.R.A.S.

[2] : J.M. BONY - "Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires". Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 14 (1981), p. 209-246.

[3] : P. GODIN - "Subelliptic non linear oblique derivative problems". A paraître dans Amer. J. Math. (1984).

[4] : L. HÖRMANDER - "Linear partial differential operators". Springer Verlag (1969).

[5] : R. MELROSE - "Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems". Duke Math. J. 42. 4 (1975), p. 605-635.

[6] : R. MELROSE - J. SJÖSTRAND - "Singularities of boundary value problems I". Comm. on pure and applied math, Vol. XXXI.

[7] : L. NIRENBERG - "Lectures on linear partial differential equations". Regional conf. séries in Math., Vol XXXI.