JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

BERNARD HELFFER
JOHANNES SJÖSTRAND

Puits multiples pour l'équation de Schrödinger

Journées Équations aux dérivées partielles (1983), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1983____A18_0>

PUITS MULTIPLES POUR L'EQUATION DE SCHRÖDINGER

par

B.HELFFER - J.SJÖSTRAND

1.THEORIE GENERALE

Soit M une variété riemannienne compacte ou bien $M = \mathbb{R}^n$. Soit $V \in C^\infty(M;\mathbb{R})$, $P = -h^2\Delta + V(x)$, où Δ est le Laplacien sur M. On s'intéresse au comportement asymptotique du spectre de P quand $h \to 0$, $h > 0$, près d'un niveau d'énergie E_o donné. Dans le cas $M = \mathbb{R}^n$ on suppose que

$$\underline{\lim}_{|x|\to\infty} V(x) > E_o$$

On dénote aussi par P l'extension de Friedrichs. Quitte à remplacer V par $V - E_o$ on peut supposer que $E_o = 0$. Si $0 < a < \underline{\lim}\ V$ (ou simplement $a > 0$ dans le cas où M est compact) on sait que le spectre de P dans $]-\infty, a]$ est discret et qu'il existe $N_o > 0$ tel que le nombre de valeurs propres de P dans l'intervalle $]-\infty, a]$ est (h^{-N_o}). On appelle $U_1, \ldots, U_N$ des puits si $U_1 \ldots U_N$ sont compacts disjoints et $U_1 \cup .. \cup U_N = \{x \in M;\ V(x) \leq 0\}$. Le lien entre les puits et le spectre a été étudié par des nombreux auteurs [2,3,4,6] .

On sait que les fonctions propres associées à des valeurs propres proches de 0 sont concentrées près des puits. Utilisant les estimations (de Carleman assez élémentaires) de Agmon [1] , on obtient une forme géométriquement agréable de ce résultat comme suit :

Soit dx^2 la métrique sur M. On introduit alors la métrique d'Agmon: $\max(V,0)dx^2$ et on désigne par $d(x,y)$ la distance associée. Si $\Psi(x) = \min_j d(x,U_j)$ et si $u = u_h \in \mathcal{D}_P$ est une famille avec $\|u\|_{L^2} = 1$, $\overline{Pu} = \lambda u$, $\lambda = \lambda_h^j \to 0$, $h \to 0$ alors

$$(1) \qquad \|\nabla(e^{\Psi/h}u)\|_{L^2(K)} + \|e^{\Psi/h}u\|_{L^2(K)} = O(e^{o(1)/h})$$

pour tout compact $K \subseteq M$. Cette estimation reste valable dans le cas où M est une variété compacte avec bord.(P est alors la réalisation de Dirichlet).

A chaque puits on associe un spectre approché de la manière suivante : Soit $S_o = \min_{j\neq k} d(U_j,U_k) > 0$ et prenons $S \in]\frac{S_o}{2}, S_o[$ proche de S_o. On peut alors trouver $M_j \subseteq M$ compacts avec bord C^∞ tels que

$$(2) \qquad \overline{B(U_j,S)} \subset \overset{o}{M}_j \ , \quad M_j \cap U_k = \phi \quad \text{si} \quad j \neq k.$$

Ici $B(U_j,S) := \{x \in M;\ d(x,U_j) < S\}$. Soit P_{M_j} la réalisation de Dirichlet de P dans $L^2(M_j)$. On peut montrer que $Sp(P_{M_j})$ près de 0 ne change pas modulo des déplacements $= O(e^{-2S/h})$ si l'on modifie le choix de M_j. Notre problème est maintenant d'étudier le lien entre $Sp(P)$ et $Sp(P_{M_j})$ près de 0. Les différents spectres ont une densité au plus polynomiale près de 0 quand $h \to 0$ et on se fixe maintenant des objets suivants .

1°) Un ensemble $J \subseteq]0,1]$ avec $0 \in \bar{J}$

2°) Des applications

$$J \ni h \begin{cases} \mapsto I(h) : \text{intervalle fermé avec } I(h) \to 0,\ h \to 0 \\ \mapsto a(h) > 0 \text{ avec } |\log a(h)| = O(1/h),\ h \to 0 \end{cases}$$

Si $I(h) = [\alpha(h), \beta(h)]$ alors on suppose que les intervalles $[\alpha(h)-a(h),\alpha(h)[$ et $]\beta(h),\beta(h)+a(h)]$ ne rencontrent pas $Sp(P)$ et $Sp(P_{M_j})$, $j = 1,\dots,N$.

Soient alors

$\lambda_1,\dots,\lambda_M$ les valeurs propres de P dans $I(h)$

$\mu_{j,1},\dots\mu_{j,m_j}$ les valeurs propres de P_{M_j} dans $I(h)$

et $u_1,\dots,u_M \in L^2(M)$, $\varphi_{j,1},\dots,\varphi_{j,m_j} \in L^2(M_j)$ des familles O.N. correspondantes. Alors :

$$(\tilde{1}) \qquad \|\nabla(e^{\Psi_j/h}\varphi_{j,k})\|_{L^2(M_j)} + \|e^{\Psi_j/h}\varphi_{j,k}\|_{L^2(M_j)} = O(e^{o(1)/h})$$

où $\Psi_j(x) = d(x,U_j)$. Soient $\chi_j \in C_o^\infty(\overset{o}{M}_j)$, $\chi_j = 1$ dans un voisinage de $\overline{B(U_j,S)}$.

Alors, si $\Psi_{j,k} = \chi_j \varphi_{j,k}$ on a :

$$P\Psi_{j,k} = \mu_{j,k} \Psi_{j,k} + O(e^{-S/h}) \quad \text{dans} \quad L^2(M).$$

Soit $F = (u_1,\ldots,u_M)$ le sous-espace engendré par les vraies fonctions propres et $E = (\Psi_{1,1},\ldots,\Psi_{N,m_N})$ celui engendré par les fonctions propres approchées.

Proposition 1. Pour h *suffisamment petit, on a* $M = m_1+\ldots+m_N$, $\mathrm{dist}(E,F) = O(e^{-S/h})$. *Il y a une bijection* $b : Sp(P)\cap I(h) \to I(h)\cap \bigcup_1^N Sp(P_{M_j})$ *telle que* $b(\lambda) - \lambda = O(e^{-S/h})$, $\forall \lambda \in Sp(P) \cap I(h)$.

Montrons maintenant comment calculer les λ_j modulo $O(e^{-2S/h})$ si les $\mu_{i,k}$ et les $\Psi_{j,k}$ sont connus. Soit π_o le projecteur sur E le long de $F^\perp$. Alors $\pi_o|_F : F \to E$ est inversible d'inverse $\pi_F|_E : E \to F$ si π_F est le projecteur orthogonal sur F. Puisque F et $F^\perp$ sont stables pour P, on peut identifier $P/_F$ avec $\pi_o P/_E$. Ecrivons maintenant $\alpha = (j,k)$, $j(\alpha) = j$.

Théorème 2 : La matrice de $\pi_o P|_E$ *pour la base* (Ψ_α) *est*

$$\mathrm{diag}(\mu_\alpha) + (w_{\alpha,\beta}) + O(e^{-2S/h}),$$

où

$$w_{\alpha,\beta} = h^2 \int \chi_{j(\alpha)} (\varphi_\beta \nabla \varphi_\alpha - \varphi_\alpha \nabla \varphi_\beta) \nabla \chi_{j(\beta)} dx$$

Esquisse de la démonstration. On montre d'abord que $\|\pi_o - \pi_E\| = O(e^{-S/h})$, $\|\pi_E - \tau\| = O(e^{-S/h})$ où π_E est le projecteur orthogonal sur E et

$$\tau u = \sum_\alpha (u|\Psi_\alpha)\Psi_\alpha .$$

Alors

$$P(\Psi_\beta) = \mu_\beta \Psi_\beta - h^2 (2 \nabla \chi_{j(\beta)} \nabla\varphi_\beta + (\Delta\chi_{j(\beta)})\varphi_\beta) .$$

Le dernier terme est $O(e^{-S/h})$, donc modulo $O(e^{-2S/h})$.

On obtient :

$$\pi_o P(\Psi_\beta) \equiv \mu_\beta \Psi_\beta - h^2\, \tau(2\nabla\chi_{j(\beta)}\, \Delta\varphi_\beta + (\Delta\chi_{j(\beta)})\varphi_\beta)$$

$$= \mu_\beta\, \Psi_\beta - h^2 \sum_\alpha \Psi_\alpha \int 2\, \nabla\chi_{j(\beta)} \nabla\varphi_\beta\, \chi_{j(\alpha)}\, \varphi_\alpha + \Delta\chi_{j(\beta)}\varphi_\beta\, \chi_{j(\alpha)}\, \varphi_\alpha\, dx$$

$$\equiv \mu_\beta\, \Psi_\beta + h^2 \sum_\alpha \Psi_\alpha \int \chi_{j(\alpha)}(\varphi_\beta\, \nabla\varphi_\alpha - \varphi_\alpha\, \nabla\varphi_\beta)\, \nabla\, \chi_{j(\beta)}\, dx\ .$$

La base (Ψ_α) n'est pas tout à fait O.N. . Si l'on l'orthonormalise (à l'aide de la racine carré de la matrice $((\Psi_\alpha | \Psi_\beta))$, la matrice de $\pi_o P|_E$ dans la nouvelle base devient

$$(3) \qquad \mathrm{diag}(\mu_\alpha) + (\hat{w}_{\alpha,\beta}) + (e^{-2S/h})\ ,$$

où $\hat{w}_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}(w_{\alpha.\beta} + w_{\beta,\alpha})$. Transportant la nouvelle base à F à l'aide de π_F, ensuite après une nouvelle orthonormalisation on trouve que la matrice de $P|_F$ est aussi de la forme (3). Il est alors facile d'obtenir :

Corollaire 3. Il y a une bijection $b : Sp(\mathrm{diag}(\mu_\alpha) + (\hat{w}_{\alpha,\beta}))$ $\longrightarrow Sp(P) \cap I(h)$, *telle que* $b(\lambda) - \lambda = O(e^{-2S/h})$.

On remarque que $\hat{w}_{\alpha,\beta} = O(\exp -\frac{1}{h}(S_o - O(1))$, donc la matrice d'intéraction donnera des corrections intéressantes des μ_α seulement dans le cas ou les μ_α sont déjà exponentiellement proches entre eux. Dans ce cas, si $d(U_\alpha, U_\beta) = S_o$ et Γ une hypersurface " convenable " qui " sépare " U_α et U_β on trouve

$$(4) \qquad \hat{w}_{\alpha,\beta} = h^2 \int_\Gamma \varphi_\alpha \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial h} - \varphi_\beta \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial h}\, dS + O(e^{-(S_o+a)/h})$$

où $a > 0$ et h est la normale de Γ orienté vers U_α .
Ces Wronshiens généralisés apparaissent dans le travail de Harrell [2] .

2. LE CAS DES MINIMA NON-DEGENERES.

On suppose maintenant les U_j ponctuels, $U_j = \{x_j\}$, $V(x_j) = 0$.

On suppose également que $V''(x_j) > 0$. Fixons d'abord un j. On peut alors associer à (P,x_j) un oscillateur harmonique (qui est égal à $-\Delta+\frac{1}{2} < V''(x_j)x,x>$ dans le cas $M = \mathbb{R}^n$). Si $E_o \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de multiplicité d de cet oscillateur et si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, alors P_{M_j} admet exactement d valeurs propres dans l'intervalle $[(E_o-\varepsilon)h, (E_o+\varepsilon)h]$ (comptées avec multiplicité) et chaque valeur propre admet au développement asymptotique

$$(5) \qquad \mu \sim h(E_o + E_1 h^{1/2} + E_2 h + \ldots.)$$

Ceci a été démontré essentiellement par B.Simon [5] (Dans [5] on élimine les puissances fractionnaires par un argument pas tout à fait correct et en effet il est facile de construire un exemple où par exemple E_1 est $\neq 0$). Dans le cas où V est réel analytique, on peut montrer que la somme asymptotique dans [5] est un symbole analytique formel et que μ est une réalisation de ce symbole au sens de [7]. D'après des communications indirectes, F.Pham à également obtenu ce résultat dans le cas de dimension 1.

Pour obtenir la matrice d'intéraction il nous faut plus :

Soit $\Omega_j \subset M_j$ un voisinage ouvert de x_j tel que chaque point $x \in \Omega_j$ est relié à x_j par une géodésique minimale unique (pour la métrique d'Agmon) qui reste dans Ω_j. Alors $\Psi_j(x) = d(x_i x_j)$ est de classe C^∞ (et même analytique dans le cas analytique) dans Ω_j. Si la valeur propre M est asymptotiquement simple (c.a.d. que μ est de multiplicité 1 et toutes les autres valeurs propres ont des développements asymptotiques différents) alors la fonction propre normalisée associée à μ est de la forme

$$(6) \qquad a(x,h)e^{-\Psi_j(x)/h}$$

dans Ω_j où a est un symbole (et même un symbole analytique dans le cas où V est analytique)

Pour un développement asymptotique donné comme dans [5] supposons que pour chaque j on ait une valeur propre unique μ_j avec ce développement asymptotique. (On peut aussi traiter le cas des valeurs propres uniques). On peut choisir les Ω_j tels que toute géodésique minimale, reliant deux puits U_j et U_k avec $d(U_j, U_k) = S_o$ est continue dans $\Omega_j \cup \Omega_k$.

On choisit maintenant $I(h) = [\mu_1(h) - h^{N_o}, \mu_1(h)+h^{N_o}]$ avec N_o suffisamment grand. Alors le théorème 2 et le corollaire 3 s'appliquent. De plus si $j(\alpha) = j$, $j(p) = k$, $d(U_j, U_k) = S_o$ alors on peut trouver $\Gamma \subset \Omega_j \cap \Omega_k$ telle que (4) est valable, à ceci près que dans le cas C^∞ il faut remplacer le reste $O(e^{-S_o+a)/h})$ par $O(e^{-S_o/h}\, h^N)$, $\forall N$.

Avec une hypothèse en plus on peut développer les intégrales dans (4) par la méthode de la phase stationnaire et on obtient :

Théorème 4. *On garde les hypothèses ci-dessus et on suppose que si* $d(U_j,U_k)=S_o$ *alors il existe une géodésique minimale unique* $\gamma_{j,k}$ *reliant* U_j et U_k.
On suppose aussi que si X_o *est un point à l'intérieur de* $\gamma_{j,k}$ *et* Γ *une Hypersurface qui coupe* $\gamma_{j,k}$ *transversalement en* X_o *alors il existe une constante* $C>0$ *telle que*

$$d(X,U_j) + d(X,U_k) \geq S_o + \frac{1}{C}\, d(X,X_o)^2$$

pour tout $X \in \Gamma$ *dans un voisinage de* X_o.

Alors (identifiant α *avec* $j(\alpha)$*) si* $d(U_j,U_k) = S_o$ *on a*

$$\hat{w}_{j,k} = a_{j,k}(h)\, e^{-S_o/h}$$

où $a_{\alpha,\beta}$ *admet un développement asymptotique en puissances de* $h^{1/2}$.

Dans le cas analytique $a_{\alpha,\beta}$ *est la réalisation d'un symbole analytique formel. Dans le cas où* E_o *est la valeur propre principale pour chaque oscillateur harmonique localisé, alors les développements de* $a_{\alpha,\beta}$ *sont des symboles elliptiques de degré* $1/2$ *en* h *et* $a_{\alpha,\beta} < 0$.

Dans des cas où il y a un groupe d'isométries qui agit sur M et qui laisse V invariant on trouve des propriétés d'invariance analogues pour la matrice d'intéraction et si par exemple le groupe agit transitivement alors les μ_j coincident et on arrive à calculer les valeurs propres corrigées Voir [0] .

BIBLIOGRAPHIE

[0] : B.HELFFER - S.JOSTRAND : Préprint et travaux en préparation.

[1] : S.AGMON : Mathematical Notes 29, Princeton University Press.

[2] : E.M.HARRELL : Comm. Math.Phys.75(1980), 239-261

[3] : B.HELFFER - D.ROBERT : Puits de potentiel et asymptotique semi-classique, Preprint.

[4] : G.JONA-LASINIO-F.MARTINELLI-E.SCOPPOLA : Comm. Math.Phy. 80(1981), 223-254.

[5] : B.SIMON : Semi-classical analysis of low lying ligen values I, Preprint.

[6] : B.SIMON : Instantons, double wells and large deviations, C B M S conférence at S I U, preprint.

[7] : J.JOSTRAND : Astérisque n° 95.