JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN VAILLANT

Intégrales singulières holomorphes

Journées Équations aux dérivées partielles (1983), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1983____A13_0>

INTEGRALES SINGULIERES HOLOMORPHES

par

J. VAILLANT

1. - Notations et introductions

. $(x,\tau)\in \mathbb{C}^{n+1}\times \mathbb{C}^q$, $q\geq 1$.

. $\mathcal{U}(x,\tau)$ est un germe de fonction holomorphe au point $(y,0)$, ($y^0 = 0$, $y^1 \neq 0$, $y\in \Omega$ voisinage connexe de 0) ramifié autour de V : $\varphi(x,\tau) = 0$; φ est holomorphe dans Ω ; $\varphi(0, x', 0) = x^1$; on note V_x la fibre : $\varphi_x(\tau) = 0$, de dimension $q-1$; on fait l'hypothèse (1) que, pour tout x , tel que V_x soit lisse, le hessien de φ_x n'est pas identiquement nul en τ , autrement dit V_x n'est pas développable.

On considère l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^{x^0} d\tau_1 \ldots \int_0^{x^0 - \sum\limits_{1\leq k\leq j-1}\tau_k} d\tau_j \ldots \int_0^{x^0 - \sum\limits_{1\leq k\leq q-1}\tau_k} \mathcal{U}(x,\tau)\, d\tau_q \quad ;$$

elle définit un germe au voisinage de y dont il s'agit d'étudier la ramification.

Une telle intégrale apparaît, en particulier, dans la représentation des solutions du problème de Cauchy à données singulières pour les opérateurs aux dérivées partielles holomorphes [3] , [9] , [10] . Dans [9] , [10] nous prolongions à l'analyticité en x un mémoire de J. LERAY [7] , où la phase est algébrique. L'étude était ensuite accompli sans cette hypothèse par

KOBAYASHI [2] , [5] , qui employait le théorème d'isotopie de THOM, sous une forme qui le conduisait à une compacification nécessaire pour rendre la projection propre. Dans le travail actuel, sous des hypothèses de "finitude" de Weierstrass nous prolongeons la méthode de LERAY du cas algébrique au cas holomorphe ; l'outil essentiel consiste en deux propositions élémentaires sur les espaces polaires (en dualité) ; à ce propos, nous utilisons un travail récent de J.P. HENRY, M. MERLE, C. SABBAH [4] , cf. [1] , qui donne une expression géométrique élégante aux idées précédentes. Aux récurrences près, la démonstration de notre théorème est alors ramenée au cas d'une intégrale simple et nous semble adaptée à une étude plus précise du comportement près des singularités de l'Intégrale $I(x)$. Sur ces questions nous signalerons l'exposé de F. PHAM à Nancy [8] .

Je remercie M. MERLE pour plusieurs conversations utiles et agréables sur son travail et ces questions.

2. - Cas d'une variable (q=1)

On notera la phase dans ce cas : $f(z,\mathcal{J})$, $\mathcal{J} \in \mathbb{C}$ et on fera l'hypothèse de Weierstrass :

$$f(0,\mathcal{J}) \neq 0 \quad ;$$

on a :

$$f = a\,P \ ,$$

où P est le polynôme de Weierstrass et a est inversible, P_r est le polynôme réduit déduit de P .

Le discriminant : $\underset{\mathcal{J}}{\text{disc.}}\, P_r(z,\mathcal{J})$ est un germe en 0 non nul qu'on appellera discriminant local de f en 0 et qui sera noté $d.\ell_{\mathcal{J}}\, f(z,\mathcal{J})$.

Note Si $f(0,0) \neq 0$, on a $P \equiv 1$ et $d.\ell_{\mathcal{J}}\, f(z,\mathcal{J}) \equiv 1$.

D'après cette définition, il existe un nombre $r_0 > 0$ et pour tout $r \in]0, r_0]$ un voisinage ouvert connnexe Ω_1 de l'origine (en z) tels que tous les germes f, a, P, P_r seront holomorphes dans $\Omega_1 \times \Omega_2$ où : $\Omega_2 = \{\zeta \in \mathbb{C} \; ; |\zeta| < r\}$ et tel que :

$$\text{pour tout } z \in \Omega_1' = \{z \in \Omega_1 \mid d\, \ell_\zeta\, f(z, \varphi) \neq 0)$$

on ait :

$$\text{Card} \{\zeta \in \Omega_2 \mid f(z, \zeta) = 0\} = k$$

où k est le degré de P_r .

Il en résulte que l'ouvert $\{(z, \zeta) \in \Omega_1' \times \Omega_2 \; ; f(z, \zeta)$ est naturellement un espace fibré localement trivial.

On déduit alors [7] la :

<u>Proposition</u> 1 - Soit $\mathcal{U}$ un germe de fonction holomorphe en un point $(z_0, 0) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ ramifié autour de $f(z, \zeta)$, c'est-à-dire se prolongeant analytiquement au revêtement universel de

$$\{(z, \zeta) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \; ; \; f(z, \zeta) \neq 0\} \quad .$$

Soit $\zeta(z) : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ une fonction holomorphe telle que :

$$\zeta(z_0) = 0 \quad .$$

Alors l'intégrale (intégrale dans le plan complexe $\mathbb{C}_\zeta$ le long du segment $(0, \zeta(z))$ lorsque z est assez voisin de z_0

$$I(z) = \int_0^{\zeta(z)} \mathcal{U}\,(z, \zeta)\; d\,\zeta$$

définit un germe de fonction holomorphe au point z_0 qui se ramifie autour de $\{z \in \Omega_1 \; ; \; f(z,0)\; f(z, \zeta\;\; (z)).d.\, \ell_\zeta \,.\; f(z, \zeta) \neq 0\}$.

3. - Transformation du germe $I(x)$

On va considérer le "changement de variable" :

$$\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_q) \longmapsto (\sigma_1, \ldots, \sigma_{q-1}, \tau_q) ,$$

défini pour a_j^k petits par :

$$(2) \qquad \tau_j = \sum_{j+1 \leq k \leq q} a_j^k \, \tau_k + \sigma_j \quad .$$

Cette équation définit aussi un hyperplan de $\mathbb{C}^q$.

De plus, comme $\operatorname{grad}_\tau \varphi(0) = 0$ dans les exemples qui nous motivent, on sera amené, pour pouvoir écrire les conditions de Weierstrass, à préciser (2), en posant :

$$(3) \qquad a_j^k = \alpha_j^k \, \sigma_j \quad .$$

On en déduit, comme dans [7] que la ramification de $I(x)$ est la même que celle de :

$$I'(x) = \int_0^{x^0} d\sigma_1 \ldots \int_0^{(x^0 - \sum_{1 \leq \ell \leq q-1} \sigma_\ell)\, i(a_j^k, \sigma_j)} \tilde{\mathcal{U}}(x, a_j^k, \sigma_j, \tau_q) \, d\tau_q ,$$

pour tous a_j^k voisins de 0 .

$\tilde{\mathcal{U}}$ est transformée de $\mathcal{U}$ par (2) et i est inversible holomorphe voisin de 1 .

4. - Hypothèses de Weierstrass ; appui.

On fera l'hypothèse :

$$\varphi(0, 0, \ldots, \tau_q) \neq 0 \quad ;$$

on posera alors, après avoir utilisé (2), (3)

$$\operatorname{disc}_{\tau_q} \varphi(x, \tau) = \Delta_1(x, a_j^k, \sigma_j, a_{q-1}^q, \sigma_{q-1}) , \quad j \leq q-2 ;$$

on fera l'hypothèse :

$$\Delta_1(0, 0, 0, 0, \sigma_{q-1}) \neq 0$$

et on considérera le déscriminant :

$$(d.\ell_{\sigma_{q-1}}.\Delta_1)\ (x, a_j^k, \sigma_j, \alpha_{q-1}^q) \quad , \quad j \leq q-2 \quad .$$

A cause du théorème de Hartogs, seule nous intéressera la plus grande hypersurface incluse dans l'ensemble analytique obtenu en écrivant que :

$$d.\ \ell_{\sigma_{q-1}}\ .\ \Delta_1\ (x, a_j^k, \sigma_j, \alpha_{q-1}^q) = 0 \quad , \quad \forall \alpha_{q-1}^q \ ;$$

on notera :

$$\Delta_2\ (x, a_j^k, \sigma_j) = 0 \quad , \quad j \leq q-2$$

son equation, (qu'on peut déjà choisir réduite) et qui n'est pas identiquement vérifiée.

On posera

$$\Delta_2(0, 0, \sigma_{q-2}) \neq 0 \quad .$$

On construira ainsi un nombre fini de conditions de Weierstrass, la dernière de ce type s'écrivant :

$$\Delta_{q-1}(0, \sigma_1) \neq 0 \quad ;$$

les autres étant obtenues en échangeant le rôle des variables τ_j et $x^0 - \sum \tau_j$.

On aura donc défini, par exemple :

$$\Delta_\ell\ (x, a_j^k, \sigma_j) \quad , \quad j \leq q-\ell \quad .$$

On déduit facilement de (2) que dans ces conditions, les (a_j^k, σ_j) définissent les coordonnées d'un ℓ-plan de $\mathbb{C}^q$ soit F_ℓ ; si

$$\Delta_\ell(x, a_j^k, \sigma_j) \equiv \Delta_\ell(x, F\ ) = 0 \quad ,$$

on dira que le ℓ-plan (x, F_ℓ) s'appuie sur V .

5. - On note dans $\mathbb{C}^q$ $T_j : \tau_j = 0$; $T_0 : \Sigma\ \tau_j = x^0$, les (q-1)-plans faces, si $x^0 \neq 0$ du "simplexe" d'intégration ; on définit naturellement ses arêtes T_J , comme dans (7).

Théorème - Si on a l'hypothèse (1) et les hypothèses de Weierstrass, il existe un voisinage ouvert Ω_0 de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que $I(x)$ se ramifie autour d'une hypersurface de Ω_0 incluse dans :

$$\{ x \in \Omega_0 \ ; \text{ une des arêtes } T_J \text{ du simplexe est telle que } T_J \cap V_x \text{ ait un point singulier, ou bien } V_x \text{ a un point singulier } \} .$$

La démonstration s'appuie essentiellement sur deux propositions qui relient la notion d'appui à celle de ℓ-plan tangent.

Proposition 2 - Soit W un germe d'hypersurface analytique lisse réduit de dimension k non développable ;
Si $\underline{F}$ est un hyperplan tangent à W en un point quadratique et si F est un hyperplan voisin de F transverse à W , alors $F \cap W$ est non développable (dans F) ; de plus, si $\Delta'_{-1}\ (F,G) = 0$, (G hyperplan de F , F voisin de $\overline{F}$) est un germe d'espace analytique réduit, qui pour F fixé $F \neq \underline{F}$, définit un germe de l'ensemble $\overline{\check{F \cap W}}$ dual de $F \cap W$, alors $\Delta'_{-1}\ (\underline{F},G)$ n'est pas réduit.

Conséquence 1 - Posons $G = (G_0,s)$, où G_0 est la direction de G représentée par la forme η et $s = \langle \eta , \tau \rangle$ sa valeur au point de contact de G , de sorte que G a pour equation (en $\tilde{\tau}$) :

$$\langle \tilde{\tau} - \tau , \eta \rangle = 0 \quad ,$$

où

$$\langle \tilde{\tau} , \eta \rangle - s = 0 \quad .$$

Si $\Delta'_{-1}(F, G_0, s)$ vérifie une hypothèse de Weierstrass en s, on a :

$$\text{disc}_s \; \Delta'_{-1}(\underline{F}, G_0, s) = 0 \quad , \quad \forall G_0 \; ,$$

G_0 dans un voisinage convenable.

<u>Conséquence</u> 2 - On peut supprimer dans la conséquence précédente l'hypothèse que $\underline{F}$ est tangente en un point quadratique, du fait qu'un point général sur W est quadratique.

<u>Conséquence</u> 3 - Par récurrence, on obtient ainsi, que, si pour x, un ℓ-plan $(\ell < q)$, est tangent à V_x, alors il s'appuie sur V.

6. - <u>Proposition</u> 3

Soit V : $\varphi(x,\tau) = 0$, un germe d'hypersurface analytique en $(\underline{x}, 0)$ dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^q$, réduit ; on suppose que, pour tout x, où V_x est lisse, la fibre V_x est une hypersurface non développable. Δ : $\Delta(x,F) = 0$ (F hyperplan de $\mathbb{C}^q$), est une hypersurface analytique réduite telle que :

$\forall (x,F) \in \Delta$, ou bien F est tangent à V_x, ou bien F passe par un point singulier de V_x. Alors si, pour $\underline{x}$, $\Delta(\underline{x}, F)$ est non réduit, $V_{\underline{x}}$ a un point singulier.

Cette proposition est la conséquence d'un lemme de [4], cf. aussi [1].
Ce lemme montre que si $V_{\underline{x}}$, ($\underline{x}$ fixe) est un germe d'hypersurface de $\mathbb{C}^q$ en 0 réduit lisse non développable alors, dans un voisinage convenable de 0, un hyperplan tangent à $V_{\underline{x}}$ en un point général τ est tangent seulement en τ, avec un contact quadratique.

Conséquence 4 - On en déduit que :

Si un ℓ-plan (x, F_ℓ), $\ell > q$, s'appuie sur V et ne coupe pas la partie singulière de V_x, alors il est tangent à V_x et si $(x, \mathbb{C}^q)$ s'appuie sur V, V_x a un point singulier.

La démonstration du théorème 1 se fait alors par récurrence à l'aide de la proposition 1 en considérant l'intégrale $I'(x)$.

Une rédaction détaillée sera donnée dans une autre publication.

J. VAILLANT
Equipe de Recherches associée
au C.N.R.S. 070 901
Tour 45-46, 5ème étage
Mathématiques
Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)
4, Place Jussieu

75230 PARIS CEDEX 05

Références

(1) J. BRIANCON et J.P. SPEDER - Thèse Nice (1976)

(2) T. FUKUDA et T. KOBAYASHI - A local isotopy theorem.

(1982)

(3) Y. HAMADA et G. NAKAMURA - On the singularities of the solution of the Cauchy problem ...
Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa, 4 (1977), 725-755.

(4) J.P. HENRY, M. MERLE, C. SABBAH - Sur la condition de THOM stricte pour un morphisme analytique complexe. Public. Centre de Math. de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau (1982).

(5) T. KOBAYASCHI -On the singularities of the solution to the Cauchy problem ...

(1982)

(6) LE DUNG TRANG et B. TEISSIER - Variétés polaires locales et classes de Chern des Variétés Singulières
Annals of Mathematics 114 (1981) 457-491.

(7) J. LERAY - Un complément au théorème de N. NILSSON sur les intégrales ...
Bulletin de la Société Mathématique de France, 95, (1967) 313-374

(8) F. PHAM - Intégrales de type singulier fin et calcul microdifférentiel.
Conférence à Nancy (1983)

(9) D. SCHILTZ, J. VAILLANT et C. WAGSCHAL - Problème de Cauchy ramifié à caractéristiques multiples en involution.
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 291, (1980), 659-662.

(10) D. SCHILTZ, J. VAILLANT et C. WAGSCHAL - Problème de Cauchy ramifié : racine caractéristique double ou triple en involution.
J. Math. Pures et Appliquées, 4, (1982), 423-443.