JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

GILLES LEBEAU

Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes

Journées Équations aux dérivées partielles (1982), p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A10_0>

DEUXIEME MICROLOCALISATION SUR LES SOUS-VARIETES ISOTROPES

par G. LEBEAU

§ 0. INTRODUCTION

La notion de deuxième microlocalisation le long d'une sous-variété involutive réelle a été inventée par M. Kashiwara [cf. J. M. Bony 1] et ses aspects algébriques ont été développés par Y. Laurent [3] . Dans [5] , J. Sjöstrand a construit, en utilisant ses propres techniques, la notion de deuxième front d'onde analytique sur une sous-variété lagrangienne réelle. Les résultats (à paraître) que nous donnons brièvement ici montrent que les idées et méthodes de [5] , ainsi que la théorie géométrique de P. Schapira [4] permettent naturellement de construire une deuxième microlocalisation à partir d'une sous-variété isotrope réelle.

Cette notion a été développée pour traiter certains problèmes de diffraction pour les opérateurs P du second ordre, de type principal réel lorsque toute une bicaractéristique de P est contenue dans le bord, et permet d'étendre un théorème de Kataoka [2] sur la diffraction aux géométries non strictement convexes.

On utilise ici systématiquement les espaces H_φ de J. Sjöstrand [5] : Si X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et φ une fonction continue sur X, à valeurs réelles, une fonction $u(x,\lambda)$ définie sur $X \times \mathbb{R}_+$, holomorphe en x appartient à $H_\varphi(X)$ si et seulement si :

$$0.1 \qquad \forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\,\lambda(\varepsilon)\ ,\ \lambda \geq \lambda(\varepsilon) \Longrightarrow \forall\ x \in X\ |u(x,\lambda)| \leq e^{\lambda[\varphi(x)+\varepsilon]}$$

Pour $u \in H_\varphi(X)$, on définit son spectre, SS(u) , comme étant le fermé de X complémentaire des points au voisinage desquels on a une estimation 0.1 avec φ remplacé par $\varphi - C$ où C est strictement positif. Lorsque φ est pluri-sous-harmonique stricte, la 2-forme de Lévi $\frac{2}{i}\ \bar{\partial}\partial\varphi$ munit X d'une structure symplectique réelle, et les élements de H_φ jouent le rôle des microfonctions sur $T^*\mathbb{R}^n$. Pour Γ sous-variété <u>isotrope</u> de X pour $\frac{2}{i}\ \bar{\partial}\partial\varphi$, on définit au § 1 la notion de Γ-analyticité et c'est cette notion qu'on microlocalise en associant à tout élément u de H_φ un deuxième micro support qui est un fermé d'une variété analytique réelle de dimension 2n, notée $\tilde{\Gamma}$, construite au § 2. Il est remarquable que $\tilde{\Gamma}$ soit munie naturellement d'une structure symplectique homogène, et on a une injection canonique de $T^*\Gamma$ dans $\tilde{\Gamma}$. Dans le § 3, on énonce les deux théorèmes principaux, régularité microanalytique et Watermelon, et on donne dans un cas particulier l'expression d'une transformation intégrale de type Bros-Iagolnitzer qui permet de lire le deuxième micro-support.

§ I. Γ -ANALYTICITE

Soit X une variété analytique complexe de dimension n. On note $X^{\mathbb{R}}$ la variété réelle sous-jacente, $TX \simeq TX^{\mathbb{R}}$ le fibré tangent à X, $T^*X^{\mathbb{R}}$ le fibré cotangent à $X^{\mathbb{R}}$, T^*X le fibré cotangent à X. On identifie T^*X et $T^*X^{\mathbb{R}}$ de la façon suivante : à la forme $\mathbb{C}$-linéaire $\zeta \in T^*_xX$ on associe la forme $\mathbb{R}$-linéaire $u \to -\operatorname{Im}\zeta(u)$. On note $\sigma = \partial[\zeta dz]$ la 2-forme canonique sur T^*X, $\operatorname{Re}\sigma$ et $\operatorname{Im}\sigma$ ses parties réelles et imaginaires qui sont des 2-formes symplectiques sur $T^*X^{\mathbb{R}}$ identifié à T^*X ; alors $-\operatorname{Im}\sigma$ est la 2-forme canonique sur $T^*X^{\mathbb{R}}$. Suivant la terminologie de Schapira [4] , pour une sous-variété de T^*X, on dit qu'elle est $\mathbb{R}$- symplectique (ou lagrangienne ou isotrope ou involutive) (resp. I symplectique etc...) si elle est symplectique pour la 2-forme $\operatorname{Re}\sigma$ (resp. $\operatorname{Im}\sigma$).

Soit φ une fonction sur X à valeurs réelles, on note j_φ l'injection de X dans T^*X :

$$\text{I.1} \qquad j_\varphi(x) = (x, \frac{2}{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x))$$

et

$$\text{I.2} \qquad \Lambda_\varphi = j_\varphi(X).$$

Alors Λ_φ correspond par identification au sous-espace de $T^*X^{\mathbb{R}}$:

$$\text{I.3} \qquad \{(x,\xi) \in T^*X^{\mathbb{R}} \quad , \quad \xi = d\varphi(x)\}$$

et donc est I lagrangienne. On a :

$$\text{I.4} \qquad j^*_\varphi(\operatorname{Re}\sigma) = \frac{2}{i}\bar{\partial}\partial\varphi$$

Par suite Λ_φ est $\mathbb{R}$- symplectique si et seulement si $\bar{\partial}\partial\varphi$ est non dégénérée et dans ce cas [cf. 4] T^*X est complexifié de Λ_φ. On notera

$$\text{I.5} \qquad \mathcal{L}_\varphi(u,v) = \frac{2}{i}\bar{\partial}\partial\varphi(u,iv)$$

la 2-forme hermitienne de type de Lévi associée à φ . Dans la suite, φ désignera une fonction analytique de X dans $\mathbb{R}$ <u>strictement</u> <u>pluri-sous-harmonique</u>, i.e. $\mathcal{L}_\varphi$ est définie positive. Alors Λ_φ est I-lagrangien, $\mathbb{R}$ symplectique , et X est muni de la 2-forme symplectique $\frac{2}{i}\,\bar\partial\partial\varphi$.

<u>Lemme I.6</u> : Soit V un sous-espace $\mathbb{R}$ linéaire de T_xX, $V^\perp$ son orthogonal pour $\frac{2}{i}\,\bar\partial\partial\varphi$. Alors

1) $V^\perp \oplus iV = T_xX$

2) Si V est involutif et $H = V \cap iV$

$$V^\perp \oplus H \oplus iV^\perp = T_xX$$

D'après le lemme précédent, si Γ est une sous-variété isotrope de X, $T\Gamma \cap iT\Gamma = \{0\}$ donc est totalement réelle. Le lemme suivant caractérise les sous-variétés isotropes de X.

<u>Lemme I.7</u> : Soit Γ une sous-variété totalement réelle de X de complexifié $\Gamma^{\mathbb{C}}$. Il y a équivalence entre

1) Γ est isotrope

2) Il existe h pluri harmonique sur $\Gamma^{\mathbb{C}}$ telle que

$$\varphi|_{\Gamma^{\mathbb{C}}} - h \geqslant 0 \quad \text{et} \quad (\varphi - h)|_{\Gamma} = 0$$

Si 2) est satisfait, h est unique et

I.8 $$\varphi|_{\Gamma^{\mathbb{C}}} - h \simeq \operatorname{dist}^2(z,\Gamma)$$

Soit à présent V une sous-variété involutive de X, au voisinage de V, d'après le lemme I.6, X s'identifie à $\tilde{V}$, la réunion des complexifiés des feuilles isotropes de V. On définit donc la fonction réelle φ_V sur X par :

I.9 Si Γ est feuille de V, $\varphi_V|_{\Gamma^{\mathbb{C}}} = h$, où h est défini par le lemme I.7

Alors φ_V est pluri-sous-harmonique et on a $\varphi \geqslant \varphi_V$ avec égalité exactement sur V. Soit à présent $\widetilde{j_\varphi(V)}$ la réunion des complexifiés des feuilles de $j_\varphi(V)$ dans T^*X.

Lemme I.10 : $\Lambda_{\varphi_V} = \widetilde{j_\varphi(V)}$,

d'où

Corollaire I.11 : Si Γ est une sous-variété isotrope de X, V et V' deux sous-variétés involutives dont Γ est une feuille, alors

$$\varphi_V - \varphi_{V'} \in O\ (\mathrm{dist}^2(z, \Gamma^{\mathbb{C}}))$$

On pose donc la définition suivante de régularité analytique partielle :

Définition I.12 : Soit Γ une sous-variété isotrope de X pour $\frac{2}{i}\bar{\partial}\partial\varphi$, et $x_o \in \Gamma$. On dit que $u \in H_\varphi$ est Γ-analytique en x_o si et seulement si il existe $M \geqslant 0$ et V sous-variété involutive dont Γ est une feuille, tels que au voisinage de x_o, on ait $u \in H_{\varphi'}$, où $\varphi'(x) = \varphi_V(x) + M\ \mathrm{dist}^2(x, \Gamma^{\mathbb{C}})$, et on note Γ-supp.sing(u) le fermé de Γ formé des x où u n'est pas Γ-analytique.

Cette définition est justifiée par le théorème suivant (prolongement analytique) qui se déduit du principe du maximum :

Théorème I.13 : Si u est Γ-analytique sur un ouvert connexe w de Γ , alors $SS(u) \cap w$ est soit $\emptyset$, soit égal à w.

§ II. CONSTRUCTION DE $\tilde{\Gamma}$:

Soit M une variété symplectique, analytique réelle de dimension 2n et Γ une sous-variété analytique isotrope de M, de dimension d. Alors au voisinage de chaque point de Γ , il existe une carte locale symplectique (X,ξ) de M, centrée en ce point, dans laquelle Γ a pour équation :

II.1 $$x_{d+1} = \dots = x_n = 0 \qquad \xi = 0$$

Les résultats qui suivent se montrent en se ramenant à une telle carte.

Soit E l'ensemble des fonctions $s \to \gamma(s)$ de $C^\infty(\mathbb{R}, M)$ vérifiant $\gamma(0) \in \Gamma$ $\dot{\gamma}(0) \in (T_{\gamma(0)}\Gamma)^\perp$ et E_2 l'espace des jets à l'ordre 2 en s = 0 des éléments de E, qui est une variété analytique de dimension 4n. On munit E de la relation d'équivalence $\sim$ définie par :

$$\text{II.2} \qquad \gamma_1 \sim \gamma_2 \quad \text{ssi} \quad \begin{array}{l} \gamma_1(0) = \gamma_2(0) \ ; \ \dot{\gamma}_1(0) - \dot{\gamma}_2(0) \in T\Gamma \\ \forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R}) \ , \ f|_\Gamma = 0, \ H_f|_\Gamma \in T\Gamma \ \Rightarrow (f\circ\gamma_1 - f\circ\gamma_2)(s) \in O(s^3) \end{array}$$

et on pose

$$\text{II.3} \qquad \tilde{\Gamma} = E/\sim$$

Alors $\tilde{\Gamma}$ s'identifie à un quotient de E_2 et est une variété analytique de dimension 2n. Pour $\gamma \in E$, on note $\tilde{\gamma}$ sa classe dans $\tilde{\Gamma}$ et π désigne l'application canonique de $\tilde{\Gamma}$ dans $(T\Gamma)^\perp/(T\Gamma)$ induite par $\gamma \to (\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$, qui est surjective. Soit 0 la section nulle de $(T\Gamma)^\perp/T\Gamma$ et γ tel que $\tilde{\gamma} \in \pi^{-1}(0)$. Alors pour f vérifiant $f|_\Gamma = 0$, $H_f|_\Gamma \in T\Gamma$, $\lim\limits_{s\to 0} \frac{2}{s^2} f[\gamma(s)]$ ne dépend que de $H_f[\gamma(0)]$ et définit une injection canonique j de $T^*\Gamma$ dans $\tilde{\Gamma}$. On a donc une "suite exacte" au-dessus de Γ .

$$\text{II.4} \qquad 0 \longrightarrow T^*\Gamma \xrightarrow{j} \tilde{\Gamma} \xrightarrow{\pi} (T\Gamma)^\perp/T\Gamma \longrightarrow 0$$

Sur $\tilde{\Gamma}$ on a évidemment une homogénéité canonique définie par $t.\tilde{\gamma} = \widetilde{s \longrightarrow \gamma(ts)}$.
Soit à présent TE l'ensemble des $\phi \in C^\infty(\mathbb{R},TM)$, $\phi(s) = (\gamma(s),v(s))$ vérifiant

1) $v(0) \in T\Gamma$, $\gamma \in E$

2) $\forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ $f|_\Gamma = 0$, $H_f|_\Gamma \in T\Gamma \Rightarrow df_{\gamma(s)}[v(s)] \in O(s^2)$

Pour $\phi \in TE$, on pose

$$\text{II.6} \qquad 2\alpha(\phi) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \langle\gamma'(s),v(s)\rangle$$

<u>Lemme II.7</u> : $\alpha(\phi)$ induit une 1-forme canonique $\alpha_{\tilde{\Gamma}}$ sur $\tilde{\Gamma}$, homogène de degré 2 et $\omega_{\tilde{\Gamma}} = d\alpha_{\tilde{\Gamma}}$ est une 2-forme <u>symplectique</u> sur $\tilde{\Gamma}$.

On appelle $\tilde{\Gamma}$ l'éclaté symplectique de Γ . Ces constructions géométriques s'expriment simplement dans la carte II.1 : Si pour $(\tilde{x},\tilde{\xi}) \in \mathbb{R}^{2n}$ on pose :

$$\text{II.8} \qquad \gamma(s) = (\tilde{x}', s\tilde{x}'', \frac{s^2}{2}\tilde{\xi}', s\tilde{\xi}'')$$

alors $(\tilde{x},\tilde{\xi}) \to \tilde{\gamma}$ est un système de coordonnées locales sur $\tilde{\Gamma}$ dans lequel on a :

II.9 $$\begin{cases} 2\alpha_{\tilde{\Gamma}} = \tilde{\xi}' d\tilde{x}' + \tilde{\xi}'' d\tilde{x}'' - \tilde{x}'' d\,\tilde{\xi}'' \\ 2\omega_{\tilde{\Gamma}} = d\tilde{\xi}' \wedge d\tilde{x}' + 2d\tilde{\xi}'' \wedge d\tilde{x}'' \end{cases}$$

§ III. DEUXIEME MICRO-SUPPORT

Soit X et φ comme dans le § 1, et Γ une sous-variété isotrope de X pour $\frac{2}{i}\,\bar{\partial}\partial\varphi$. On montre qu'à tout $u \in H_\varphi(X)$, on peut associer un fermé homogène de $\tilde{\Gamma}$, noté $S^2_\Gamma(u)$ et qu'on appelle le Γ-deuxième micro-support de u. On pose alors :

III.1 $$SS^2_\Gamma(u) = S^2_\Gamma(u) \cap j(T^*\Gamma) \; ; \quad \dot{SS}^2_\Gamma(u) = SS^2_\Gamma(u) \cap j(T^*\Gamma \setminus \Gamma)$$

et on obtient l'analogue du théorème classique de la microlocalisation :

Théorème III.2 : 1) $S^2_\Gamma(u) = \emptyset$ ssi $SS(u) \cap \Gamma = \emptyset$

2) Si p est la projection de $T^*\Gamma$ sur Γ, on a :

$$p(\dot{SS}^2_\Gamma(u)) = \Gamma.\text{supp sing }(u)$$

Soit à présent τ une fonction analytique réelle sur Γ, telle que l'hypersurface $\tau = 0$ de Γ soit lisse. Si $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$ et θ est un vecteur tangent, alors la classe dans $\tilde{\Gamma}$ du chemin $s \to \gamma(s) + \frac{s^2}{2}\theta$ ne dépend que de la classe de θ modulo $(T\Gamma)^\perp$ donc définit une action additive de $T^*\Gamma$ sur $\tilde{\Gamma}$.

Théorème III.3 (Watermelon) : Soit $u \in H_\varphi(X)$ tel que $\Gamma \cap SS(u) \cap \tau < 0 = \emptyset$. Alors $S^2_\Gamma(u)\,\big|_{\tau=0}$ est invariant par $\mathbb{R}.d\tau$.

Terminons en donnant un exemple de transformation intégrale caractérisant le deuxième micro-support : soit $X = \mathbb{C}^n$ $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{Im}\ x)^2$, $\Gamma = \{x = (x',x''),$ $\mathrm{Im}\ x' = 0,\ x'' = 0\}$ avec $x' = (x_1,\dots,x_d)$. Pour $\mu > 0$, $z \in \mathbb{C}^n$ et w ouvert de Γ, on pose, pour $u \in H_\varphi$ au voisinage de w :

III.4 $$\tilde{u}_w(z,\mu,\lambda) = \int_w e^{\frac{-\lambda\mu^2}{2(1-\mu^2)}(z'-x')^2}\, u(x', \mu z'',\lambda)dx'$$

Alors pour Re $z' \in w$, $|\mu z''|$ assez petit, on obtient par déformation de contour d'intégration l'estimation :

III.5 $$|\tilde{u}_w(z,\mu,\lambda)| \leqslant e^{\lambda\mu^2\varphi(z) + \lambda\varepsilon}$$

pour $\lambda \geqslant \lambda(\varepsilon)$ et $0 < \mu \leqslant \mu_o$, où μ_o dépend de la distance de Re z' au complémentaire de w.

Soit $\Delta_\mu(z)$ le point de X :

III.6 $$\text{Re } x' = \text{Re } z' \qquad \text{Im } x' = \mu^2 \text{Im } z' , \qquad x'' = \mu z''$$

et $\tilde{\Delta}(z)$ la classe dans $\tilde{\Gamma}$ du chemin III.6 tracé dans X lorsque μ varie. [Lorsqu'on écrit III.4 sous forme de transformation canonique (à $\mu > 0$ fixé), $\Delta_\mu(z)$ est le point stationnaire de la phase qu'on obtient dans l'exponentielle]. Alors $z \to \tilde{\Delta}(z)$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}^n$ sur $\tilde{\Gamma}$ et $T^*\Gamma$ s'identifie à $z'' = 0$. De plus, il est symplectique si on munit $\mathbb{C}^n_z$ de la 2-forme $\frac{2}{i}\bar{\partial}\partial\varphi$. Alors pour $z_o \in \mathbb{C}^n$, Re $z'_o \in w$, $\tilde{\Delta}(z_o) \notin S^2_\Gamma(u)$ équivaut à :

III.7 Il existe $C > 0$ et U voisinage de z_o et $\mu_o > 0$ tels que pour $0 < \mu \leqslant \mu_o$ et $\lambda \geqslant \lambda(\mu)$ décroissant en μ on ait :

$$\forall\, z \in U \qquad |\tilde{u}_w(z,\mu,\lambda)| \leqslant e^{\lambda\mu^2[\varphi(z) - c]}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. Bony : Extension du théorème de Holmgren. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1975-76, exposé 17.

[2] M. Kataoka : Micro-local theory of boundary value problems II.

[3] Y. Laurent : Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe. Thèse, Orsay, 1982.

[4] P. Schapira : Condition de positivité dans une variété symplectique complexe. Application à l'étude des microfonctions. Ann. Sc. E.N.S. 14, 1981.

[5] J. Sjöstrand : Singularités analytiques microlocales. Publ. univ. Paris Sud (1981).

***