

S. MIZOHATA

Sur quelques équations du type Schrödinger

Journées Équations aux dérivées partielles (1981), p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1981____A11_0>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR QUELQUES EQUATIONS DU TYPE SCHRÖDINGER

par S. MIZOHATA

§ 1. INTRODUCTION

Il s'agit du problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles linéaires de la forme

$$(1) \quad \partial_t^m u(x,t) + \sum_{j=1}^m a_j(x,t; \partial_x) \partial_t^{m-j} u(x,t) = f(x,t),$$

$(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy pour (1), à savoir, on se donne la donnée de Cauchy

$$(1)' \quad \partial_t^i u(x,0) = u_i(x) \quad , \quad (0 \leq i \leq m-1)$$

Si $\text{ordre } a_j \leq j$ ($1 \leq j \leq m$), (1) est dite kowalewskienne d'après Petrowsky. L'équation kowalewskienne qui est bien posée dans la classe C^∞ est appelée hyperbolique, et il y a beaucoup de travaux sur la caractérisation des équations hyperboliques. D'autre part, quand l'équation n'est pas kowalewskienne, si le problème de Cauchy est bien posé pour t positif et négatif dans un espace fonctionnel convenable, je dis que cette équation est du type Schrödinger.

Je voudrais souligner que, quand les coefficients dépendent de x , la caractérisation des équations du type Schrödinger devient assez délicate, et il apparaîtra des conditions de nature tout à fait différente de celles des cas hyperboliques. Comme un exemple simple, je considère :

$$(2) \quad L(u) = i\partial_t u + \Delta u + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_{x_j} u + c(x)u = f(x,t),$$

dans l'espace $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$.

On suppose que les coefficients $b_j(x)$ et $c(x)$ sont bornés avec leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. Le problème que nous allons considérer est le problème de Cauchy dans l'espace L^2 . Donnons la définition.

Définition : Nous dirons que l'équation (2) est bien posé dans l'espace L^2 si

$\forall u_0(x) \in L^2, \forall f(.,t) \in C_t^0(L^2)$, il existe une et une seule solution

$u(.,t) \in C_t^0(L^2)$, telle que $u(x,0) = u_0(x)$, et d'ailleurs on a l'inégalité,

$$(3) \quad \|u(\cdot, t)\| \leq C(T) [\|u_0(x)\| + \left| \int_0^t \|f(\cdot, s)\| ds \right|],$$

pour tout $|t| \leq T$.

J. Takeuchi a proposé une condition suffisante [2]. Mais sa démonstration me semble-t-il, n'est pas claire. Je vais montrer que la condition de Takeuchi est une condition nécessaire, et ensuite je me propose une condition suffisante.

La condition de Takeuchi peut s'énoncer comme il suit :

$$(C_0) \quad \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \int_0^t b_j(x + \omega s) \omega_j ds \quad \text{est resté borné, quand } (x, \omega, t) \text{ parcourt} \\ \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R}^1 .$$

Pour la démonstration de la nécessité, nous utilisons une solution approximative -paquet d'ondes- indiquée par G. D. Birkhoff [1].

§ 2. NECESSITE DE (C₀)

Posons $u = e^{i\varphi} v$.

$$e^{-i\varphi} L(e^{i\varphi} v) = - [\partial_t \varphi + \sum_i (\partial_{x_i} \varphi)^2] v + iT_\varphi \cdot v + M(v) ,$$

où

$$(4) \quad \begin{cases} T_\varphi = \partial_t \varphi + 2 \sum_j \partial_{x_j} \varphi \partial_{x_j} \varphi + \sum_j b_j(x) \partial_{x_j} \varphi , \\ M = \Delta \varphi + \sum_j b_j(x) \partial_{x_j} \varphi + C(x) . \end{cases}$$

On prend comme φ (fonction de phase)

$$(5) \quad \varphi = \xi x - |\xi|^2 t , \quad \xi \in \mathbb{R}^n ,$$

et comme v une solution de $T_\varphi v = 0$:

$$(6) \quad v(x, t; \xi) = \exp \left[- \int_0^t \sum_j b_j(x - 2\xi s) \xi_j ds \right] \psi(x - 2\xi t) .$$

Maintenant on va montrer que l'inégalité (3) ne subsiste plus, si la condition (C₀) est violée. Dans ce cas, on voit que :

$$-\operatorname{Re} \int_0^t \sum_j b_j(x - 2\omega s) \omega_j ds$$

n'est pas borné supérieurement, lorsque (x, ω, t) parcourt $\mathbb{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R}_+^1$. Alors il existe (x^1, ω^0, t_0) , ($t_0 > 0$) tel que

$$(7) \quad -\operatorname{Re} \int_0^{t_0} \sum_j b_j (x^1 - 2\omega^0 s) \omega_j^0 ds \geq \log(2C(T)).$$

où $C(T)$ est la constante dans (3).

Désignons

$$x^0 = x^1 - 2\omega^0 t_0,$$

et prenons dans l'expression (6),

$$(8) \quad \xi = \rho \omega^0, \quad t_\rho = t_0 / \rho,$$

ρ étant le paramètre tendant vers $+\infty$. Alors

$$(9) \quad v_\rho(x, t) \equiv v(x, t; \rho \omega^0) = \exp\left[-\int_0^{\rho t} \sum_j b_j (x - 2\omega^0 s) \omega_j^0 ds\right] \psi(x - 2\rho \omega^0 t).$$

Ceci implique que

$$v_\rho(x, t_\rho) \equiv v(x, t_0 / \rho; \rho \omega^0) = v(x, t_0; \omega^0),$$

qui montre que $v_\rho(x, t_\rho)$ est indépendante de ρ comme fonction de x .

Maintenant on choisit $\psi(x) \in C_0^\infty$, $\int \psi^2 dx = 1$, de support assez petit, concentré autour du point x^0 . Alors compte tenu de (7), on peut supposer que

$$(10) \quad \|v_\rho(\cdot, t_\rho)\| \geq \frac{3}{2} C(T) \|\psi(x)\|.$$

Or
$$L(e^{i\varphi} v) = -e^{i\varphi} M(v_\rho) = e^{i\varphi} f_\rho,$$

et l'expression (9) montre que $\|f_\rho(\cdot, s)\|$ est resté borné pour $s \in [0, t_\rho]$ quand ρ tend vers $+\infty$. Ceci implique

$$\int_0^{t_\rho} \|f_\rho(\cdot, s)\| ds$$

tend vers 0 lorsque ρ tend vers ∞ , car $t_\rho = t_0 / \rho$. Ce qui montre que l'inégalité (3) ne subsiste plus compte tenu de (10).

§ 3. SUFFISANCE

L'idée fondamentale est de réduire l'équation $L(u) = f$ à une équation de Schrödinger usuelle. Dans ce but, posons

$$u(x,t) = k(x,t,D)v(x,t),$$

où $k(x,t,D)$ est un opérateur pseudo-différentiel usuel.

On définit le symbole de k par

$$\begin{cases} (\partial_t + 2 \sum_j \xi_j x_j + \sum b_j(x) \xi_j) k(x,t;\xi) = 0 \\ k(x,0;\xi) = 1. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$(11) \quad \begin{cases} k(x,t;\xi) = e^{\varphi(x,t;\xi)} \\ \varphi(x,t;\xi) = - \int_0^t \sum_j b_j(x - 2\xi s) \xi_j ds \end{cases}$$

$L(u) = f$ devient

$$\begin{cases} k(i\partial_t + \Delta)v + k_1(x,t;D)v = f \\ k_1(x,t;\xi) = (\Delta + \sum b_j \partial_{x_j} + c(x))k(x,t;\xi). \end{cases}$$

Maintenant, on pose, en dehors de (C_0) , la condition suivante :

$$(C_\alpha) \quad \forall |\alpha| \geq 1, \quad \int_0^\infty |\partial_x^\alpha b_j(x + \omega s)| ds \text{ est resté borné,}$$

lorsque (x, ω) parcourt $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$, $(1 \leq j \leq n)$.

Sous ces conditions, on voit facilement que

- i) $\forall (\alpha, \beta) \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta k(x,t;\xi)| \leq M_{\alpha\beta}$
- ii) $\forall \alpha \quad |\partial_\xi^\alpha k(x,t;\xi)| \leq M_\alpha t^{|\alpha|}$.

On applique le théorème de Calderon-Vaillancourt. On voit que k, k_1 sont des opérateurs bornés dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, de plus $k(x,t;D)$ est invertible comme élément de $\mathcal{L}(L^2;L^2)$ si $|t|$ est assez petit. Alors, l'équation se réduit à

$$(i\partial_t + \Delta + k^{-1}k_1)v = k^{-1}f,$$

qui démontre la suffisance.

D'où le

Théorème : Pour que l'équation (2) soit bien posée dans l'espace L^2 , la condition (C_0) est nécessaire. Si l'on ajoute la condition (C_α) à la condition (C_0) , le problème est bien posé dans l'espace L^2 .

Pour montrer l'inversibilité de k , il suffit de considérer l'opérateur pseudo-différentiel, noté $e^{-\varphi}$, qui correspond au symbole $e^{-\varphi(x,t;\xi)}$. On voit que

$$e^{-\varphi} \circ k = I + r(x,t;D),$$

$$k \circ e^{-\varphi} = I + r'(x,t;D)$$

où $\|r\|, \|r'\|$ se majorent par $\text{const. } |t|$.

REFERENCES

- [1] G. D. Birkhoff : Quantum mechanics and asymptotic series, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (1939), 681-700.
- [2] J. Takeuchi : On the Cauchy problem for some non kowlewskian equations with distinct characteristic roots, J. Math. Kyoto Univ., 20 (1980), 105-124.
- [3] S. Mizohata : On some Schrödinger type equations, Proc. Japan Acad. Sci. (1981)
- [4] S. Mizohata : Sur quelques équations du type Schrödinger, à paraître au Séminaire de Vaillant (1981).

*
*
*