JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

MOHAMED S. BAOUENDI
CHARLES GOULAOUIC

Analyticité précisée d'opérateurs intégraux

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979____A9_0>

ANALYTICITE PRECISEE D'OPERATEURS INTEGRAUX

par M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC

Dans l'étude du problème de Cauchy (linéaire et non linéaire) pour des opérateurs pseudo-différentiels analytiques sur une variété compacte, nous avons été amenés à décrire le comportement de tels opérateurs dans une chaîne d'espaces de Banach de fonctions analytiques. Dans [1] nous avons utilisé une description de ces espaces à l'aide des itérés de champs de vecteurs. Nous donnons ici une description d'une telle chaîne en utilisant les prolongements dans le domaine complexe et montrons comment certains opérateurs intégraux opèrent dans cette chaîne; cette méthode, plus géométrique, s'adapte mieux aux généralisations non linéaires ainsi qu'aux problèmes de Cauchy sur des variétés à bord. Notons qu'elle est proche de celle utilisée par C. B. Morrey [3] pour montrer l'analyticité des solutions d'équations elliptiques.

1. Description des espaces

On suppose, pour simplifier, que Γ est une variété compacte réelle de dimension n définie par

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ \varphi(x_1,\dots,x_{n+1}) = 0\},$$

où φ est analytique et $d\varphi \neq 0$ sur Γ. Alors, pour $s > 0$ suffisamment petit, on définit

$$\Gamma_s = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^{n+1}\ ;\ \varphi(z_1,\dots, z_{n+1}) = 0;\ |y| < s\}.$$

On choisit $\mu \in]0,1[$ et on note E_s l'espace des fonctions u holomorphes dans Γ_s et C^μ, c'est-à-dire telles que :

$$\|u\|_s = \sup_{z\in\Gamma_s} |u(z)| + \sup_{z,z'\in\Gamma_s} \frac{|u(z) - u(z')|}{|z-z'|^\mu} < \infty .$$

Ces espaces E_s forment une chaîne décroissante d'algèbres de Banach et on a :

$$a(\Gamma) = \bigcup_{s<o} E_s \quad ,$$

où $a(\Gamma)$ désigne l'espace des fonctions analytiques sur Γ.

2. Action des opérateurs

Soit P un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre d ($d \in \mathbb{N}$) sur Γ ; on a le résultat suivant :

Théorème 1 : Il existe $s_o > 0$ tel que pour tous $0 < s' < s \leq s_o$, l'opérateur P est continu de E_s dans $E_{s'}$ et vérifie :

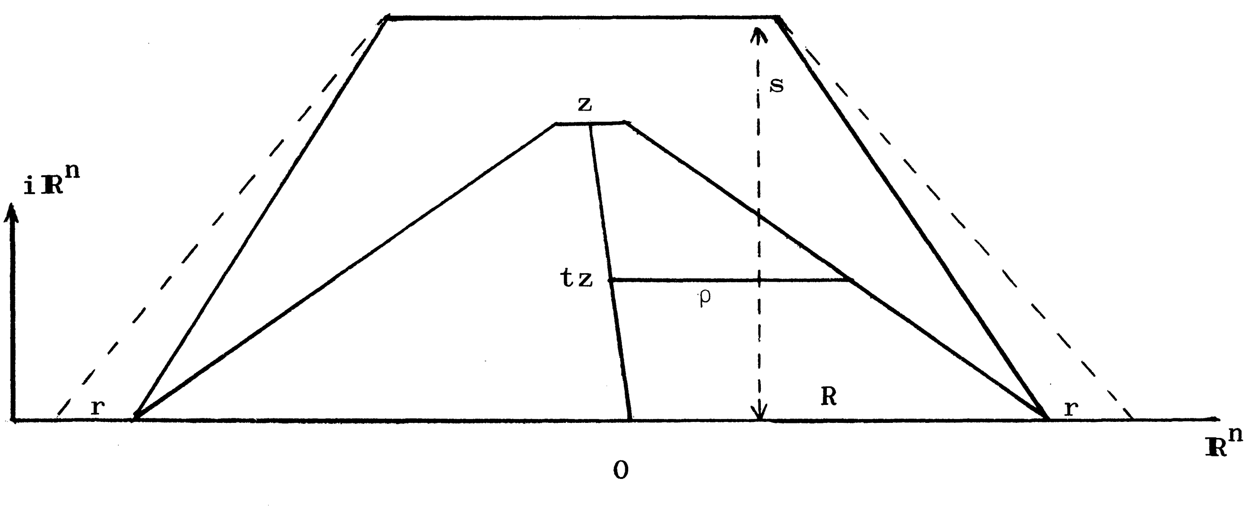
$$\|Pu\|_{s'} \leq \frac{C}{(s-s')^d} \|u\|_s \quad \text{pour } u \in E_s \; ,$$

où C est localement bornée sur $]0,s_o]$.

En particulier, les opérateurs d'ordre 0 sont bornés dans tous les espaces E_s ; d'ailleurs on ramène la démonstration du cas général à celle de ce cas particulier en utilisant une paramétrix d'opérateur elliptique. L'essentiel du travail est ensuite une étude de l'action des noyaux dans $\mathbb{C}^n$ (localement) au voisinage de $\mathbb{R}^n$.

3. Etude locale

Pour $s > 0$, $h_o > 0$, $R > 0$ on note $B = B(s,h_o,R) = \{x + iy \in \mathbb{C}^n ; |y| < s, |y| < h_o(R - |x|)\}$.



Soit K l'opérateur intégral défini par

(1) $$Ku(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,x-X)u(X)dX$$

où $k(x,X)$ est analytique pour $X \neq 0$ et $x \mapsto k(x,.)$ est analytique à valeurs dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$; on montre qu'alors le support singulier analytique de Ku est contenu dans celui de u et, plus précisément si $k(x,Z)$ est analytique pour $|\mathrm{Im}\, Z| < h(\mathrm{Re}\, Z|$ avec $h > h_o$, on a :

<u>Proposition 1</u> : Il existe $s_o > 0$ tel que, pour $s \in]0,s_o]$, pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et holomorphe dans $B(s,h_o,R)$, Ku est aussi holomorphe dans $B(s,h_o,R\ )$.

La méthode consiste simplement à prolonger pour $z \in B$ l'expression de Ku donnée par (1) en utilisant un cycle d'intégration convenable constitué par des domaines "parallèles à $\mathbb{R}^n$ " et Σ_z de représentation paramétrique $(t,\theta) \in [0,1] \times S_{n-1} \mapsto Z(t,\theta) = tz + \rho\theta$ avec $\rho = t\varepsilon + (1-t)R$, $\varepsilon > 0$ localement indépendant de z et S_{n-1} désignant la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$.

Avec les mêmes notations, si on suppose de plus que k est le noyau d'un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 0, (cf. [2]), on a, en notant $B_r = B(s,h_o,R+r)$ pour $r > 0$:

<u>Théorème 2</u> : Si u est C^μ et de support compact K dans $\mathbb{R}^n$, holomorphe sur B_r et C^μ sur $\overline{B}_r$, alors Ku est aussi holomorphe sur B et $C^\mu(\overline{B})$ et on a :

$$\|Ku\|_{C^\mu(\overline{B})} \leq C_r(\|u\|_{C^\mu(\overline{B}_r)} + \|u\|_{C^\mu(K)}) .$$

Dans la démonstration, la partie la plus délicate est relative au cas d'un noyau $k(x,X)$ homogène en X de degré -n et tel que $\int_{S^{n-1}} k(x,X)d\sigma(X) = 0$.

Au lieu de prouver les inégalités C^μ on travaille dans des espaces L^∞ avec poids grâce au résultat suivant de [3] qui dit qu'une fonction f est holomorphe et C^μ sur un ouvert Ω convenable de $\mathbb{C}^n$ si et seulement si ses dérivées vérifient $\frac{\partial f}{\partial z_i} \cdot \delta^{1-\mu} \in L^\infty(\Omega)$ où δ est la distance à $\partial\Omega$.

La fin de la démonstration du théorème utilise un cycle dans

$\mathbb{C}^n$ légèrement différent de celui utilisé pour montrer l'analyticité et des estimations de diverses intégrales.

---

[1] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Cauchy problem for analytic pseudo-differential operators. Comm. in Partial Differential Equations, 1(2), 135-189 (1976).

[2] L. Boutet de Monvel : Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et problèmes aux limites elliptiques ; Ann. Inst. Fourier, Grenoble 19 (1970) p.169-268.

[3] C. B. Morrey : Multiple integrals in the calculus of variations. Springer Verlag 1966.

***