JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEFF RAUCH

Propagation des singularités pour les équations des ondes semi-linéaires

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979____A8_0>

Conférence n° 8

PROPAGATION DES SINGULARITES POUR LES EQUATIONS DES ONDES SEMI-LINEAIRES

par J. RAUCH

Je vais exposer la propagation des singularités pour les équations des ondes semi-linéaires. En voici deux exemples :

(1) $$u_t - u_x = f(u)$$

(2) $$u_{tt} - \Delta u = f(u), \ \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} .$$

Deux principes sont importants. Pour une solution dans H_s les singularités d'ordre $t < 2s - n/2$ se propagent comme dans le cas des équations linéaires. On en trouvera les énoncés précis dans l'exposé important de J. M. Bony [2] et dans les références suivantes : [3], [4], [5] . D'autre part, dans le cas non linéaire, il y a des phénomènes nouveaux . Par exemple :

1) Dans le cas de l'équation (1), le support singulier de u est contenu dans la réunion des rayons qui rencontre le support singulier de u(0). WF(u) est contenu dans la variété caractéristique de $\partial_t + \partial_x$, mais, WF(u) peut contenir des bicaractéristiques qui ne passent pas au-dessus de WF(u(0)). On a les mêmes résultats pour toute équation scalaire d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^n$.

2) Dans le cas de l'équation (2) avec une variable d'espace,les singularités sont continues dans l'ensemble des rayons qui quittent le support singulier des données de Cauchy de u, mais, il peut arriver que WF(u) n'est pas continu dans la variété caractéristique de $\partial_t^2 - \partial_x^2$. De même pour les systèmes 2×2 d'ordre un avec une variable d'espace.

3) Sauf pour les cas particuliers 1) et 2), on peut trouver des points dans le support singulier de u qui n'appartiennent pas à l'ensemble des rayons qui quittent le support singulier des données de Cauchy de u.

Les exemples que nous donnons sont extraits de [5] et [6].

---

[1] J. M. Bony : Localisation et propagation des singularités pour les équations non linéaires. Journées "Equations aux Dérivées Partielles", Saint-Jean-de-Monts, 1978.

[2] J. M. Bony : Calcul symbolique et singularités des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires, Journées "Equations aux Dérivées Partielles", Saint-Cast, 1979.

[3] B. Lascar : Singularités des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires. C. R. Acad. Sc. Paris, t.287 (1978) 527-529.

[4] J. Rauch : Singularities of solutions of semilinear wave equations, J. Math. Pure et Appliquées, à paraître.

[5] J. Rauch : Exposé, Séminaire Lions, Janvier 1979, à paraître.

[6] J. Rauch and M. Reed : Propagation of singularities for semilinear hyperbolic equations in one space variable, to appear.

[7] M. Reed : Propagation of singularities for nonlinear waves in one dimension, Comm. P. D. E. 3 (1978) 153-199.

*
* *
*