

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PHAM THE LAI

DIDIER ROBERT

**Sur un problème aux valeurs propres non linéaire**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1979), p. 1-5

<[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1979\\_\\_\\_\\_A15\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979____A15_0)>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR UN PROBLEME AUX VALEURS PROPRES

NON LINEAIRE

par PHAM THE LAI et D. ROBERT

I. Introduction

Soit  $P(\lambda) = P_0 + \lambda \cdot P_1 + \dots + \lambda^{m-1} P_{m-1} + \lambda^m$  un polynôme de la variable complexe  $\lambda$  dont les coefficients  $P_0, \dots, P_{m-1}$  sont des opérateurs différentiels à coefficients indéfiniment dérivables dans  $\mathbb{R}^n$ . Nous nous proposons de donner des conditions suffisantes pour qu'il existe  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  et  $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$  espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide, tels que  $P(\lambda_0) \cdot u_0 = 0$ . Dans ce cas, par analogie au cas classique ( $m=1$ ), nous dirons que  $\lambda_0$  est une valeur propre et  $u_0$  un vecteur propre de la famille d'opérateurs  $P(\lambda)$ .

La motivation principale de ce travail est de donner un début de réponse à une question posée par B. Helffer [7]. Dans [7], l'auteur donne des exemples non triviaux d'opérateurs différentiels  $A(x, D)$  à coefficients analytiques, hypoelliptiques et tels que l'équation  $A(x, D)u = 0$  admette une solution non-analytique. Pour cela, on associe à  $A(x, D)$  un polynôme à coefficients opérateurs différentiels  $P(\lambda)$  et on construit la solution de  $A(x, D)u = 0$  à partir d'une valeur propre et d'un vecteur propre de  $P(\lambda)$ . Par exemple, à l'opérateur  $A = D_x^2 + (x^2 D_y - D_z)^2$  est associé le polynôme :  $P(\lambda) = D_x^2 + (x^2 - \lambda)^2$  et il résultera de notre travail que  $P(\lambda)$  admet au moins un vecteur propre dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . La recherche de vecteurs propres pour des polynômes à coefficients opérateurs a déjà fait l'objet de plusieurs travaux. Citons par exemple : Keldysh [9], Krein and Langer [10], Friedman and Shinbrot [5].

Cependant ces travaux ne sont pas directement applicables au cas différentiel considéré ici. Notre étude s'apparente plutôt aux travaux de S. Agmon [1] sur la résolvante des problèmes aux limites elliptiques.

La méthode d'Agmon consiste à contrôler la résolvante  $(P_0 + \lambda)^{-1}$ ,  $|\lambda| \rightarrow +\infty$  dans des secteurs du plan complexe d'ouverture suffisante et à en déduire qu'il existe un système complet de vecteurs propres (généralisés) par le principe de Phragmen-Lindelöf. De plus Agmon donne une condition nécessaire et suffisante sur le symbole du problème pour avoir un contrôle

optimal sur une demi-droite issue de l'origine, donnée dans  $\mathbb{C}$ .

Nous nous proposons de faire une étude analogue pour l'application  $\lambda \mapsto P(\lambda)^{-1}$ .

Dans [2] M. S. Baouendi et J. Sjöstrand ont fait ce type d'étude dans le cas où  $P_0, \dots, P_{m-1}$  sont des opérateurs définis sur la sphère  $S^n$  et où  $P_0$  est elliptique d'ordre  $m$ ,  $P_j$  est un opérateur différentiel d'ordre  $m-j$  pour  $1 \leq j \leq m-1$ .

## II. Enoncé des résultats

On suppose que  $P_0, P_1, \dots, P_{m-1}$  sont des opérateurs différentiels d'ordre  $\leq m$  et vérifiant :

(C) Il existe un entier  $k \geq 1$  tel que :

$$P(r^{\frac{1}{m}} \cdot \lambda, r^{\frac{1}{k}} \cdot x, r^{\frac{1}{m}} \cdot \xi) = r \cdot P(\lambda, x, \xi) \text{ pour tout } r > 0, (\lambda, x, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

(E)  $P(\rho, x, \xi) \neq 0$  pour tout  $\rho \geq 0$ , et tout  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus (0, 0)$

(C)  $P_0$  prend ses valeurs dans un cône propre de  $\mathbb{C}$ , symétrique par rapport à l'axe réel.

Désignons par  $S_P$  le cône de  $\mathbb{C}$  :

$$S_P = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \text{il existe } (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus (0, 0) \text{ tel que } P(\lambda, x, \xi) = 0 \}$$

On sait que  $P_0$  admet un unique prolongement fermé à partir de  $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$  comme opérateur non borné de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (voir [12]). Désignons alors par  $D(P_0)$  le domaine de la fermeture de  $P_0$ . En utilisant les résultats de [12] on peut voir facilement que :  $D(P_0) = \{ u \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n), x^\alpha D^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ pour } \frac{|\alpha|}{k} + \frac{|\beta|}{m} \leq 1 \}$ .

Posons la :

Définition 1 : Soit  $\theta \in [0, 2\pi[$  et  $\rho_0 \geq 0$ . Désignons par  $\Delta(\theta, \rho_0)$  la demi-droite :  $\{ \rho e^{i\theta}, \rho > \rho_0 \}$ . On dira que  $\Delta(\theta, \rho_0)$  est un rayon de croissance minimale pour  $P$  s'il existe  $C > 0$  telle que :

$$(*) \quad \left\| P(\rho \cdot e^{i\theta})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), D(P_0^S))} \leq \frac{C}{\rho^{m(1-s)}}$$

pour  $\rho \geq \rho_0$  et  $s \in \{0,1\}$ :

Cette terminologie est empruntée à Agmon ([1]). On a besoin d'une seconde définition qui elle est empruntée à Kelysh ([9]) :

**Définition 2** : Soit  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $P(\lambda_0)$  n'est pas injectif. On appelle sous-espace propre généralisé de  $P$  associé à  $\lambda_0$  le sous-espace vectoriel de  $D(P_0)$  noté  $\text{Sp}_{\lambda_0}[P]$  engendré par les solutions  $u_0, u_1, \dots, u_k$  des systèmes :

$$(S_k) \quad \begin{cases} P(\lambda_0)u_0 = 0 \\ P(\lambda_0)u_1 + \frac{dP}{d\lambda}(\lambda_0)u_0 = 0 \\ \text{-----} \\ P(\lambda_0)u_k + \frac{dP}{d\lambda}(\lambda_0)u_{k-1} + \dots + \frac{1}{k!} \frac{d^k P}{d\lambda^k}(\lambda_0)u_0 = 0 \end{cases}$$

où  $k$  décrit  $\mathbb{N}$ .

**Proposition 1** : 1) Si  $P(\lambda)^{-1}$  existe alors  $P(\lambda)^{-1}$  est un opérateur compact de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$

2)  $\lambda \mapsto P(\lambda)^{-1}$  est méromorphe dans  $\mathbb{C}$  à valeurs dans  $\mathcal{L}(L^2, D(P_0^s))$  pour  $s = 0$  ou  $1$ .

3)  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Sp}_{\lambda_0}[P] < +\infty$ .

Nous énonçons maintenant les résultats principaux de notre travail.

**Théorème 1** : Soit  $\theta \in [0, 2\pi[$ . Il existe  $\rho_0 \geq 0$  ; tel que  $\Delta(\theta, \rho_0)$  soit un rayon de croissance minimale pour  $P$  si et seulement si

$$\Delta(\theta, 0) \subseteq \mathbb{C} \setminus \text{Sp}.$$

**Théorème 2** : Soient  $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$  tels que  $\Delta(\theta_1, 0) \cup \Delta(\theta_2, 0) \subset \mathbb{C} \setminus \text{Sp}$  et  $\theta_2 - \theta_1 < \frac{k\pi}{n(k+m)}$ . S'il existe  $\theta \in ]\theta_1, \theta_2[$  tel que  $\Delta(\theta, 0) \subseteq \text{Sp}$  alors il existe  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\arg \lambda_0 \in [\theta_1, \theta_2]$  tel que  $P(\lambda_0)$  ne soit pas injectif.

**Théorème 3** : Soient  $\Delta(\theta_1, 0), \dots, \Delta(\theta_s, 0)$   $s$  demi-droites du plan complexe. On suppose :

- i)  $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_s \leq 2\pi$
- ii)  $|\theta_{j+1} - \theta_j| < \frac{k\pi}{n(m+k)} \quad 1 \leq j \leq s-1, \quad \theta_1 < \frac{k\pi}{n(m+k)}$

$$|\theta_1 - \theta_s + 2\pi| < \frac{k\pi}{n(m+k)}$$

iii)  $\Delta(\theta_j, 0) \subset \mathbb{C} \setminus S_p$  pour  $j = 1, \dots, s$ .

Alors l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres généralisés de  $P$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Exemples : 1)  $P(\lambda) = D_t^2 + (t^2 - \lambda)^2$ .

Ici on a  $S_p = \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$ . Or :

$$\frac{k\pi}{n(k+m)} = \frac{2\pi}{1(2+1)} = \frac{2\pi}{3}.$$

C'est insuffisant pour conclure qu'il existe des valeurs propres. Mais la demi-droite  $]0, +\infty[$  est dans la résolvante et il existe  $C > 0$  telle que

$$\|P(\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))} \leq C \cdot \lambda \text{ pour tout } \lambda \geq 1.$$

On peut alors en déduire que le système des vecteurs propres généralisés de  $P$  est total dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

$$2) P(\lambda) = D_t^2 + t^2 + 2a\lambda t + 2b\lambda \cdot D_t + \lambda^2, \text{ a et b réels.}$$

On a la conclusion du théorème 3 si  $a^2 + b^2 < \frac{1}{2}$ . Cependant par un calcul direct, B. Helffer ([7]) montre que la condition  $a^2 + b^2 < 1$  suffit.

$$3) P(\lambda) = -\Delta + |x|^{2k} + \left( \sum_{j=1}^n a_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \lambda + \lambda^2.$$

on a :  $S_p = i\mathbb{R}$ . La conclusion du théorème 3 s'applique.

- [1] S. Agmon : Lectures on elliptic boundary value problem. Van Nostrand Math. Studies, n°2 (1965).
- [2] Baouendi-Sjöstrand : Régularité analytique pour des opérateurs elliptiques singuliers en un point. Ark. för Mat. 14, 1976, 9-33.
- [3] H. O. Cordes : On compactness of commutators of multiplications and convolutions and boundness of pseudodifferential operators. J. Funct. Anl. 18 (1975) 115-131.

- [4] Dunford-Schwartz : t.2 Linear operators. Interscience, Publ.
- [5] Friedman-Shinbrot : Nonlinear eigenvalue problems. Acta Math. 121 (1-2) 77-128 (1968).
- [6] Gohberg-Krein : Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non autoadjoints. Dunod, 1972.
- [7] B. Helffer : Remarques sur des résultats de G. Métivier sur la non-hypoanalyticité. Séminaire de l'Université de Nantes, exposé 9, 1978-79.
- [8] Helffer-Nourrigat : Hypoellipticité pour des groupes nilpotents de rang de nilpotence 3. Comm. in P.D.E 3(8)-643-743 (1978).
- [9] M. V. Keldysh : On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators. Russian Math surveys, vol. 26, n° 4 (1971).
- [10] Krein-Langer : On some mathematical principles in the linear theory of damped oscillations of continua . Integral equations and operator theory. Vol.1-3, 364-399, 1978.
- [11] G. Métivier : Une classe d'opérateurs non hypoelliptiques analytiques. Séminaire Goulaouic-Schwartz (1978-79).
- [12] D. Robert : Propriétés spectrales d'opérateurs pseudodifférentiels. Comm. in P. D. E., 3 (9) 755-826 (1978).
- [13] Titchmarsh : The theory of functions. Oxford Univ. Press London (1939).

\*  
\*\*  
\*