

BERNARD HELFFER

## **Quelques exemples d'opérateurs pseudodifférentiels localement résolubles**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1977), p. 88-116

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1977\\_\\_88\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1977__88_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# QUELQUES EXEMPLES D'OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS

## LOCALEMENT RESOLUBLES

par

B. HELFFER

### INTRODUCTION

Dans cet exposé, nous voudrions montrer comment la méthode de Melin - Sjöstrand [18] pour construire des paramétrixes pour certaines classes d'opérateurs de type principal peut être utilisée pour construire des paramétrixes pour des opérateurs à caractéristiques doubles. Cette idée est déjà utilisée dans une note de Kucerenko [15] qui donne des résultats ne reflétant pas complètement la réalité. Les méthodes que nous utiliserons ici semblent pour l'instant trop faibles pour comprendre la propagation des singularités au voisinage d'un point double (nous espérons que ce n'est qu'un inconvénient provisoire), mais elles permettent d'aborder des problèmes assez diversifiés : résolubilité locale, hypoellipticité. La méthode utilisée est simple, on cherche à donner un sens à la formule :

$$P^{-1} = i \int_0^{+\infty} e^{-itP} dt$$

où  $P$  est un opérateur pseudo différentiel d'ordre 1.  $e^{-itP}$  est construit comme un opérateur Fourier intégral à phase complexe [17]. On sera conduit à estimer la norme de  $e^{-itP}$  (convenablement modifié par un régularisant) comme opérateur de  $L^2$  dans  $L^2$  pour donner un sens à l'intégrale.

L'article est organisé comme suit : les § 1 et 2 constituent pour l'essentiel un Survey des travaux de Melin - Sjöstrand [17] [18]. On rappelle au § 1 un minimum sur les F.I.O. à phase complexe et au § 2 les résultats obtenus sur les opérateurs de type principal. Seul l'exemple (2-3-2) est original. Au § 3, on expose la méthode générale

dans le cas des caractéristiques doubles, et on énonce un premier théorème de résolubilité locale (Th.3-3-4). Au § 4, on donne deux exemples d'applications. Au § 4.1, on montre comment on retrouve un théorème classique d'hypoellipticité avec perte d'une dérivée connu sous le nom de Théorème de Radkevic [16] [12]. Au § 4.2, on étudie la résolubilité locale pour certains opérateurs à caractéristiques multiples, l'originalité des démonstrations venant du fait que dans les exemples considérés, la résolubilité locale résulte d'une étude globale dans le fibré cotangent. Nous remercions J. Sjöstrand qui a bien voulu nous initier aux Fourier intégraux à phase complexe.

### § 1. RAPPELS SUR LA METHODE DE MELIN-SJOSTRAND

Nous rappelons ici les résultats de [18] ; une étude parallèle est menée dans [14], [15] par Kučerenko. L'idée générale est de relier la paramétrix à droite  $Q$  de  $P$  (où  $P$  est un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre 1 sur un ouvert  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ ) et la solution d'un problème d'évolution associé :

$$(1.1.) \quad (D_t + P) A_t \equiv 0$$

$$A_t /_{t=0} \equiv I$$

( $\equiv$  signifie ici modulo un opérateur régularisant dépendant régulièrement de  $t$ ).

On a alors formellement comme candidats possibles pour  $Q$  :

$$(1.2) \quad Q_1 \equiv i \int_0^\infty A_t dt \quad \text{ou} \quad Q_2 \equiv -i \int_{-\infty}^0 A_t dt$$

On doit se poser deux types de question :

( $Q_1$ ) l'existence de  $A_t$  pour  $t \geq 0$  ou  $t \leq 0$

( $Q_2$ ) Problème de convergence de l'intégrale.

En ce qui concerne ( $Q_2$ ) disons simplement pour l'instant qu'il est des cas (cas avec propagation) où l'étude microlocale ne nécessite qu'une intégration sur un intervalle fini  $[0, T]$ . On a cette propriété dans le cas des opérateurs de type principal.

En ce qui concerne  $(Q_1)$ ,  $A_t$  est cherché ici sous la forme d'un Fourier-Intégral à phase complexe [17]. Si le symbole principal  $p$  de  $P$  est réel,  $A_t$  existe pour tout  $t$  (sous des hypothèses non essentielles sur  $p$  qu'on peut toujours supposer vérifiées en modifiant  $p$  en dehors d'un voisinage du point considéré).  $A_t$  est alors un Fourier-Intégral à phase réelle [10][4].

Si le symbole principal  $p$  de  $P$  est complexe,  $A_t$  existe en général pour  $t \geq 0$ , si  $\text{Im } p \leq 0$  et pour  $t \leq 0$  si  $\text{Im } p \geq 0$ .

$A_t$  est un fourier intégral à phase complexe, associé à une variété Lagrangienne positive  $\Lambda_t$  dans  $\tilde{T}^*X \setminus 0 \times \tilde{T}^*X \setminus 0$ , qui est obtenu en transportant par le flot  $\phi_t$  associé à  $H_p$  (l'hamiltonien de  $p$ ) la lagrangienne positive initiale  $\Lambda_0 = \left\{ (x, \xi, y, \eta) \in \tilde{T}^*X \setminus 0 \times \tilde{T}^*X \setminus 0 ; x=y, \xi=\eta \right\}$ . La positivité de  $\Lambda_t$  est assurée pour  $t \geq 0$  par la condition  $\text{Im } p \leq 0$ .

Au moins pour  $t$  petit, le noyau distribution de  $A_t$  a l'expression suivante :

$$(1.3) \quad A_t(x, y) = \int_{\text{osc}} e^{i[\langle x, \xi \rangle - H(t, y, \xi)]} a(x, t, y, \xi) d\xi$$

$$A_0(x, y) = \delta(x-y)$$

$H$  vérifie :

$$(1.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = p(H'_\xi, \xi) \quad \text{mod } (\text{Im } H)^N \\ H|_{t=0} = y \cdot \xi \end{cases}$$

où, pour donner un sens à l'équation, on a pris une extension presque analytique de  $p$  et où le symbole principal  $a_0$  de  $a$  vérifie l'équation de transport :

$$(1.5) \quad i^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \sum_j \frac{\partial p}{\partial x_j} (H'_\xi, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right] a_0 + c \cdot a_0 = 0$$

$$a_0|_{t=0} = 1$$

$$\text{avec } c = \left( p_0 - \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial \xi_j} \right) - \frac{1}{2i} \left[ \sum_j \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial \xi_j} + \sum_{j,k} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \right]$$

On posera dans la suite:  $p'_0 = p_0 - \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial \bar{x}_j}$

Dans le cas où  $p$  est réel, on peut donner une expression plus agréable.

Soit le système :

$$(1.6) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial p}{\partial \xi} & x(0) = y \\ \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} & \xi(0) = \eta \end{cases}$$

On a :  $x(t, y, \eta) = H'_\xi \left( \xi(t, y, \eta), y, t \right)$

En effet :  $x(0, y, \eta) = y = H'_\xi(\eta, y, 0)$

et  $\left[ H'_\xi \left( \xi(t, y, \eta), y, t \right), \xi(t, y, \eta) \right]$  vérifie (1.6)

Soit  $\eta(\xi, y, t)$  la solution de  $\xi(\eta, y, t) = \xi$   
 et  $J = \det \left( \frac{D\xi}{D\eta} \right)$

Alors on a

$$(1.7) \quad \alpha_0(x, y, t, \xi) = \frac{1}{\sqrt{\det \left( \frac{D\xi}{D\eta} \right)}} \exp \left( i \int_0^t p'_0[x(\tau, y, \eta), \xi(\tau, y, \eta)] d\tau \right) \eta(\xi, y, t)$$

La condition de positivité de  $\Lambda_t$  se traduit par  $\text{Im} H \leq 0$  dans un voisinage de  $\Lambda_t \mathbb{R}$ .

Lorsque  $\text{Im} p$  n'est pas de signe constant, Melin - Sjöstrand [18] obtiennent encore des résultats en utilisant une décomposition de l'opérateur identité (de noyau distribution  $\delta(x-y)$ ), comme une superposition d'opérateurs Fourier - Intégraux à phase complexe  $A_\alpha$ , tels que  $A_\alpha \in I^0(X \times X, \Lambda_\alpha)$ , où  $\Lambda_\alpha$  est une famille lisse de Lagrangiennes positives dépendant de  $\alpha \in S^*X$  telle que  $(\Lambda_\alpha)_\mathbb{R}$  est le demi-axe passant par  $(\alpha, -\alpha)$ .

$$(1.8) \quad I = \int_{S^*X} A_\alpha d\alpha$$

On est alors amené à étudier :

$$(1.9) \quad \begin{cases} (D_t + P)A_{t,\alpha} \equiv 0 \\ A_{t,\alpha/t=0} \equiv A_\alpha \end{cases}$$

pour  $t \geq 0$  ou pour  $t \leq 0$ , selon la localisation de  $\alpha$ .

Par exemple si  $L$  est une hypersurface conique régulière dans  $T^*X \setminus 0$  délimitant deux ouverts  $T^*X_+$  et  $T^*X_-$  disjoints tels que  $T^*X_+ \cup L \cup T^*X_- = T^*X \setminus 0$ ; on peut avoir à utiliser une décomposition de  $I$  associée à  $L$ .

On désigne par  $S^*X_\pm$ , l'intersection de  $T^*X_\pm$  avec  $S^*X$ , on considère :

$$(1.10) \quad I = \int_{S^*X_+} A_\alpha d\alpha + \int_{S^*X_-} A_\alpha d\alpha = \pi_+ + \pi_- .$$

Dans certains cas (cf § 2), on cherche  $Q$  sous la forme :

$$(1.11) \quad Q \equiv i \int_0^{+\infty} e^{-itP} \pi_+ dt - i \int_{-\infty}^0 e^{-itP} \pi_- dt$$

où  $(e^{-itP} \pi_+)$  (resp.  $e^{-itP} \pi_-$ ) est définie par :

$$\int \frac{A_{t,\alpha}}{S^*X_+} d\alpha \quad \left( \text{resp. } \int \frac{A_{t,\alpha}}{S^*X_-} d\alpha \right)$$

Nous renvoyons à [18] pour les détails.

## § 2. OPERATEURS DE TYPE PRINCIPAL

### § 2.1 Le cas où $p$ est réel

On sait [4] que, si  $H_p$  n'est pas collinéaire à l'axe du cône  $\left( \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right)$ , l'opérateur  $P$  de symbole  $p$  est "équivalent" à  $\frac{\partial}{\partial x_n}$ , et qu'on peut construire deux paramétrixes propageant l'une le long des bicaractéristiques positives, l'autre le long des bicaractéristiques négatives. La méthode esquissée au § 1 permet, comme il est remarqué dans l'introduction de [18], la construction de deux paramétrixes naturelles :

$$Q_1 = i \int_0^{+\infty} A_t dt \quad \text{et} \quad Q_2 = -i \int_{-\infty}^0 A_t dt$$

où  $A_t$  est la solution de (1.1)

Le WF' de  $A_t(\Lambda_{t\mathbb{R}})$  est formé des points  $(x, \xi, y, \eta)$  tels que  $(x, \xi) = \Phi_t(y, \eta)$  où  $\Phi_t(y, \eta)$  est la solution de (1.6).

On en déduit que le WF' de  $\int_0^\infty A_t dt$  est la réunion de la diagonale dans  $T^*X \setminus 0 \times T^*X \setminus 0$  et des points  $(x, \xi, y, \eta)$  tels que  $(x, \xi) = \Phi_t(y, \eta)$  pour un  $t$  positif ou nul, et tels que  $p(y, \eta) = 0$ . Il est en effet facile de voir qu'aux points où  $p(y, \eta) \neq 0$ ,  $\int_0^\infty A_t dt$  est égal à  $P^{-1}$ , l'opérateur pseudodifférentiel de symbole principal  $(\frac{1}{p})$ . En ces points,  $P$  est en effet elliptique.

Lorsque  $H_p$  n'est pas collinéaire à l'axe du cône, on peut montrer que  $i \int_0^\infty A_t dt$  a toujours un sens microlocalement, car si  $\chi_i$  ( $i=1,2$ ) sont deux opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 égaux à 1 dans un voisinage conique  $V_i$  et à support dans un voisinage conique  $\tilde{V}_i$  suffisamment petit d'un point  $\rho$ , on voit aisément qu'il existe  $T$  tel que :

$$\chi_1(i \int_0^\infty A_t dt) \chi_2 \equiv \chi_1(i \int_0^T A_t dt) \chi_2$$

L'existence globale de  $Q_1$  ou de  $Q_2$  s'obtient sous des hypothèses naturelles sur la géométrie des bicaractéristiques (en bref, que leurs projections sur  $X$  tendent vers l'infini).

§ 2.2. Le cas où  $\text{Imp} \leq 0$  ( ce cas est traité par Trèves [22], Kučerenko [15] et implicitement dans [18]).

Lorsque  $\text{Imp} \leq 0$  (resp.  $\text{Imp} \geq 0$ ), on ne peut construire en général qu'une seule paramétrix  $Q_1$  (resp.  $Q_2$ ) par la formule (1.2). Dans ce cas,  $(\int_0^\infty A_t dt)$  peut avoir un sens global sous l'hypothèse que les bicaractéristiques nulles de  $p$  réelles entrent dans le complexe au bout d'un temps fini. Le cas hypoelliptique correspond au cas où les bicaractéristiques nulles de  $p$  issues d'un point  $\rho$  entrent dans le complexe pour tout temps strictement positif. Nous allons préciser le lien avec l'hypoellipticité des opérateurs de type principal étudié par Trèves [20].

Rappelons qu'un opérateur  $P$  de type principal vérifie la condition (P) si son symbole principal  $p$  vérifie :

$$(P) \quad \forall x_0 \in X, \forall \xi_0 \in \mathbb{R}^n \setminus 0, \exists z, t, q \\ p(x_0, \xi_0) = 0, d_z(\text{Re}z p)(x_0, \xi_0) \neq 0$$

et  $\text{Im}(z p)$  restreint à la bande bicaractéristique de  $\text{Re}(z p)$  passant par  $(x_0, \xi_0)$  ne change pas de signe.

Il vérifie la condition (Q) si :

(Q) Pour tout  $(x_0, \xi_0)$  et  $z$  comme dans (P),  $\text{Im}(z p)$  ne s'annule identiquement dans aucun voisinage de  $(x_0, \xi_0)$  sur la bande bicaractéristique nulle de  $\text{Re}(z p)$  passant par ce point.

Sous les conditions (P) et (Q), on peut se ramener microlocalement au cas où  $\text{Im} p \leq 0$  partout. Par commodité, on construit une paramétrix à droite pour  $P^*$ , ce qui, en passant à l'adjoint, donnera une paramétrix à gauche pour  $P$ . Remarquons, que les conditions (P) et (Q) sont stables par passage à l'adjoint.

On construit alors la paramétrix  $\int_0^\infty A_t dt$ ; l'hypothèse  $d_z \text{Re} p \neq 0$  permet de lui donner un sens localement. On vérifie alors que le  $\text{WF}'$  de cette paramétrix est dans la réunion de la diagonale de  $T^*X \setminus 0 \times T^*X \setminus 0$  et des points  $(x, \xi, y, \eta)$  tels que :  $(x, \xi) = \phi_t(y, \eta)$  pour un  $t \geq 0$  et tels que  $p(y, \eta) = 0$ .

L'hypothèse (Q) implique que si :

$$(x, \xi) = \phi_t(y, \eta), \quad p(y, \eta) = 0$$

alors :  $(y, \eta) = (x, \xi)$ .

Le  $\text{WF}'$  de cette paramétrix est donc dans la diagonale de  $T^*X \setminus 0 \times T^*X \setminus 0$ . Ceci entraîne l'hypoellipticité de  $P$ .

### § 2.3 Le cas où $\text{Im} p$ change de signe

Exemple 2.3.1 (Melin - Sjöstrand) [18].

On suppose qu'on travaille au voisinage d'un point  $\rho^0$  tel



que  $p(\rho^0) = 0$ . On se donne une hypersurface conique  $L$  dans  $T^*X \setminus 0$  telle que  $\omega$  (la 1-forme canonique) restreinte à  $L$  est non nulle. On suppose que  $H_{\text{Rep}}$  n'est pas collinéaire à l'axe du cône et qu'il est transverse à  $L$ . Enfin, on a dans un voisinage  $U$  de  $\rho_0$  :

$$t \operatorname{Im} p \left( \exp t H_{\text{Rep}}(\rho) \right) \leq 0 \quad \text{pour } \rho \in L \cap U.$$

Alors en utilisant les techniques esquissées au § 1, Melin et Sjöstrand construisent une paramétrix à droite  $Q$  dont le  $\text{WF}'$  est la réunion dans  $T^*X \setminus 0 \times T^*X \setminus 0$  de la diagonale et des points  $(\rho, \mu)$  tels que

$\rho$  et  $\mu$  appartiennent à la même bande caractéristique réelle et si :

$$\begin{aligned} \rho &= \mathfrak{F}_t(\mu) \quad \text{alors} \quad t \geq 0 \quad \text{pour } \mu \in \overline{T^*X_+} \\ &\quad \text{et} \quad t \leq 0 \quad \text{pour } \mu \in \overline{T^*X_-} \end{aligned}$$

où  $T^*X_+$  et  $T^*X_-$  sont des ouverts délimités par  $L$  (le flot associé à  $H_{\text{Rep}}$  traversant  $L$  de  $T^*X_-$  à  $T^*X_+$ )

Exemple : Soit  $P = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} - i x |D_y|$

$L$  est défini par  $x = 0$  dans  $T^*\mathbb{R}^2 \setminus 0$ .

$$\text{Re } p = \xi \quad ; \quad \text{Im } p = -x |\eta|$$

$$H_{\text{Re } p} = H_\xi = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\exp(t H_{\text{Re } p})(x, y, \xi, \eta) = (x+t, y, \xi, \eta)$$

Dans cet exemple, il résulte du calcul du  $\text{WF}'$  que  $P^{\text{th}}$  est hypoelliptique.

Exemple 2.3.2 (Nirenberg - Trèves [20], Godin [6]).

Cet exemple est tiré de l'étude des opérateurs de type principal, localement résolubles, à coefficients analytiques, en dimension 2.

On se donne une hypersurface conique  $L$ , dans  $T^*X \setminus 0$ , mais on suppose cette fois-ci que  $H_{\text{Re } p}$  est tangent à  $L$ , noncollinéaire à  $\sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$  et que  $\text{Imp } s$  annule à l'ordre 3 sur  $L$ .  $\text{Im } p$  est positif dans  $T^*X_+$  et négatif dans  $T^*X_-$ . On peut par une construction analogue à celle de (2.2.1) construire localement une paramétrix pour de tels opérateurs.

Exemple : Soit  $P = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} + y^3 \frac{\partial}{\partial y}$

$L$  est défini par  $y = 0$  dans  $T^*\mathbb{R}^2 \setminus 0$ .

$\text{Re } p = \xi$  ;  $\text{Im } p = y^3 \eta$  ;  $H_{\text{Re } p} = \frac{\partial}{\partial x}$

$H_{\text{Re } p}$  est tangent à  $L$  et  $\text{Imp } s$  annule à l'ordre 3 sur  $L$ .

Godin [6] montre par des méthodes différentes (Inégalités de Carleman et addition de variables [9]) que sous les hypothèses ci-dessus :

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{D}'(X) \\ \text{Pu} &\in C^\infty(X) \\ (x, 0, 0, \eta) &\in \text{WF}u \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \exists \varepsilon > 0, \forall t, |t| < \varepsilon; (x+t, 0; 0, \eta) \in \text{WF}(u)$$

mais il n'a pas besoin de supposer que  $\text{Imp } s$  annule à l'ordre 3 au moins, hypothèse qui est essentielle pour la construction de la paramétrix.

### § 3. LE CAS OÙ $\text{Re } p$ PEUT ÊTRE COLLINAIRE A $\omega$

#### § 3.1 Le problème général

On veut considérer des cas où  $\text{Re } p$  peut devenir collinéaire à  $\sum_{j=1}^n \xi_j dx_j$ . On supposera dorénavant que  $\text{Imp } s \leq 0$ , de sorte que la

construction de  $A_t$  pour  $t \geq 0$  suffisamment petit est possible ; on supposera (quitte à modifier  $p$ ) qu'elle est possible pour tout  $t \geq 0$ .

Les deux cas de collinéarité que nous nous proposons d'étudier ici sont les suivants :

$\alpha)$   $\text{Re } p$  est de type principal, mais en un point  $(x_0, \xi_0)$ , il existe un réel  $u$  tel que  $H_{\text{Re } p} + u \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$  s'annule. Dans le cas où  $p$  est réel, une étude très intéressante de la propagation des singularités est faite dans [7] par Guillemin - Schaeffer. On étudiera au § 4 l'opérateur  $P = x(D_y^2 + D_x^2) + \lambda D_x + \mu D_y$

$\beta)$   $P$  est à caractéristique double ; c'est le cas par exemple de l'opérateur :

$$P = D_x^2 + x^2 D_y^2 + \lambda D_x + \mu D_y$$

Une autre manière de présenter est de dire qu'il existe des points fixes pour le flot  $(\exp t H_{\text{Re } p})$  associé à  $H_{\text{Re } p}$  projeté sur  $S^*X$ , c'est-à-dire qu'on a :

$$\exists \rho, \exists \lambda(t), \text{ t.q. } (\exp t H_{\text{Re } p}) (\rho) = \lambda(t) \cdot \rho$$

Un point double correspond au cas  $\lambda(t) \equiv 1$

On se rend alors facilement compte que, même pour une construction microlocale, on est obligé de considérer des intégrales sur un intervalle infini.

Considérons l'identité :

$$P \left[ i \int_0^T A_t dt \right] \equiv I - A_T$$

$A_T$  est un Fourier-intégral à phase complexe, continu de  $L^2_{\text{comp}}$  dans  $L^2_{\text{loc}}$ .

Si, localement, ou microlocalement, il est possible de modifier  $A_T$  par un opérateur régularisant de sorte que la norme de  $L^2$  dans  $L^2$  soit strictement inférieure à 1, on obtient un inverse  $Q$  sous la forme :

$$(3.1.1) \quad Q = \left( i \int_0^T A_t dt \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} A_T^n \right)$$

tel que

$$\chi PQ = \chi + R$$

où  $\chi$  est un opérateur pseudodifférentiel classique d'ordre 0 qui localise, ou microlocalise, au voisinage du point considéré.

$Q$  est continu de  $L^2$  dans  $L^2$ ,  $R$  est régularisant de  $L^2$  dans  $C^\infty$ .

Remarque 3.1.2

En ce qui concerne l'estimation de la norme de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , rappelons que si un opérateur Fourier intégral  $A$  vérifie : ]  $s < 0, C, C'$  réels, tels que :

$$(3.1.3) \quad \|Au\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq C \|u\|_{L^2}^2 + C' \|u\|_{H^s}^2 \quad \text{pour } u \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^n)$$

alors pour tout  $\varepsilon$  il existe  $\tilde{A}_\varepsilon$  tel que  $\tilde{A}_\varepsilon - A$  soit régularisant et tel que

$$(3.1.4) \quad \|\tilde{A}_\varepsilon u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq (C + \varepsilon) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

En effet si  $\chi(t)$  désigne une fonction  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^+$  qui vaut 1 pour  $|t| > 1$  et 0 pour  $|t| < 1/2$ , pour tout  $\varepsilon$ , il existe  $C''(\varepsilon)$ , tel que

$$\tilde{A}_\varepsilon = A \circ \chi \left( \frac{|D|}{C''} \right) \quad \text{vérifie (3.1.4).}$$

Ainsi quitte à perdre  $\varepsilon$ , on se contentera d'estimer la norme de  $L^2 \rightarrow L^2$ , modulo un régularisant.

Cette méthode pose un certains nombre de questions quant à son application.

(Q<sub>3</sub>) Comment estimer la norme  $L^2$  (modulo un régularisant) pour un opérateur Fourier -intégral à phase complexe. Ce problème est assez naturellement lié à :

(Q<sub>4</sub>) Lorsque  $A$  est un opérateur pseudodifférentiel dans une classe  $OPS_{\rho, \delta}^0$  avec  $1 \geq \rho > \delta \geq 0$ , on sait que la norme dans  $\mathcal{L}(L^2)$  (modulo un compact) peut être lue sur le symbole principal de  $A$ . Y-a-t-il des résultats analogues pour des sous-classes de  $OPS_{1/2, 1/2}^0$  ? Encore faudrait-il définir un substitut pour le symbole principal.

Le lien entre (Q<sub>3</sub>) et (Q<sub>4</sub>) est qu'il est classique pour estimer la norme d'un Fourier - intégral  $\mathcal{F}$ , de considérer  $\mathcal{F}^* \mathcal{F}$  qui est un opérateur pseudodifférentiel classique lorsque  $\mathcal{F}$  est à phase réelle.

(Q<sub>5</sub>) Soit  $\mathcal{F}$  un opérateur Fourier - intégral à phase complexe ; supposons qu'on sait résoudre  $(I + \mathcal{F})u = f$  pour  $f$  dans  $L^2$ . Sait-on où se trouve le front d'onde de  $u$ , connaissant le front d'onde de  $f$  ? Autrement dit,

peut-on trouver un inverse dont on connaisse le comportement microlocal. Dans le cas où  $\mathfrak{F}$  est un opérateur pseudodifférentiel dans  $\text{OPS}_{1/2, 1/2}^0(\mathbb{R}^n)$ , une réponse complète est donnée dans Beals [1]. Dans le cas où  $\mathfrak{F}$  est un Fourier-intégral à phase complexe, Eskin [5] donne une réponse partielle dans un cas particulier.

(Q<sub>6</sub>) Sous quelles conditions, les inverses construits opèrent également dans  $H^s$ .

Nous ne donnerons que des réponses très partielles à ces questions dans la suite, et souvent par des moyens détournés ; il est possible que Kučerenko [15] réponde à Q<sub>3</sub>, mais certaines difficultés semblent escamotées.

### § 3.2 Le cas où p est réel

Dans ce cas,  $A_t$  est un Fourier-intégral à phase réelle et l'estimation peut se faire par l'une des méthodes suivantes :

(M<sub>1</sub>)  $A_t^* A_t$  est un opérateur pseudodifférentiel classique dans  $\text{OPS}_{1, 0}^0$ , le calcul de la norme est donc relié à une majoration du symbole principal de  $A_t^* A_t$ . Un calcul classique montre que le symbole principal de  $A_t^* A_t$  est donné (cf 1.7) par :

$$(3.2.1) \quad \sigma(A_t^* A_t)(y, \eta) = e^{2 \int_0^t \text{Im } p'_0 [\mathfrak{F}_\tau(y, \eta)] d\tau}$$

(M<sub>2</sub>) Une autre méthode utilisée dans [21] est de comparer  $A_t$  avec la solution  $B_t$  de

$$(3.2.2) \quad \left( D_t + \frac{P + P^*}{2} \right) B_t \equiv 0 \\ B_0 \equiv 0$$

qui est (modulo un régularisant) de norme 1.

$B_t A_t$  est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 dont il est facile de vérifier que le symbole principal  $q$  satisfait à :

$$(3.2.3) \quad \frac{dq(y, \eta, t)}{q} = \text{Im } p'_0 \left( \phi_t(y, \eta) \right) dt$$

$$q(y, \eta, 0) = 1$$

d'où

$$(3.2.4) \quad q(y, \eta, t) = e^{\int_0^t \text{Im } p'_0 \left( \phi_\tau(y, \eta) \right) d\tau}$$

On décompose alors  $A_t$  sous la forme  $A_t = B_t \cdot \underline{[B_{-t} A_t]}$

(M<sub>3</sub>) Une dernière méthode est de calculer le symbole principal de  $A_t$  qui est bien défini sur la Lagrangienne  $\Lambda_t$ .

Les calculs ci-dessus ont évidemment des applications à l'étude de la décroissance  $L^2$  des solutions pour des systèmes hyperboliques. Mais on a ainsi une décroissance (modulo  $H^{-s}$ ). C'est la seule qui semble "microlocale". Un argument "global" d'une nature différente est utilisé dans [21] pour obtenir un résultat de décroissance  $L^2$ . Il résulte de ces calculs que  $A_t$  est "microlocalement" de norme strictement inférieure à 1 pour tout  $t$  strictement positif (modulo un régularisant) si  $\text{Im } p'_0 < 0$ , de même pour tout  $t$  strictement négatif si  $\text{Im } p'_0 > 0$ . Mais (3.2.1) ou (3.2.4) donnent en fait des informations plus précises qui seront utilisées au § suivant.

### § 3.3 Le cas où $p$ est complexe

Lorsque  $p$  est complexe, les méthodes données ci-dessus tombent en défaut. Nous présentons ici une méthode (utilisée également dans l'étude de la décroissance  $L^2$  des solutions pour des problèmes hyperboliques) qui relie la norme dans  $\mathcal{L}(L^2)$  de  $A_t$  (modulo un régularisant) avec l'inégalité de Garding précisée pour  $P$  démontrée par Melin [16]. On utilisera le théorème de Melin sous la forme suivante :

#### Théorème 3.3.1

Soit  $A$  un opérateur pseudodifférentiel classisique d'ordre 1, de symbole principal  $a_1$  et de symbole sous-principal  $a'_0$ . On désigne par  $\widetilde{\text{Tr}} H_{\text{Re } a_1}$

la somme des valeurs propres positives de la matrice fondamentale associée à  $\text{Re } a_1$ . Alors si :

$$\text{Re } a_1 \geq 0 ; \text{Re } a'_0 + \frac{1}{2} \widetilde{\text{Tr}} H_{\text{Re } a_1} > 0 \quad \text{sur les zéros de } \text{Re } a_1 ,$$

pour tout compact  $K$  et tout  $s$  réel négatif,

il existe  $\varepsilon_0$  strictement positif et une constante  $C_{K,S}$  tels que, pour tout  $u$  dans  $C_0^\infty(K)$ , on ait :

$$(3.3.1) \quad \operatorname{Re}(Au, u) \geq \varepsilon_0 \|u\|_0^2 - C_{K,S} \|u\|_S^2$$

Expliquons la méthode formellement ; on suppose pour simplifier qu'on a :

$$(3.3.1) \text{ bis} \quad \operatorname{Re}(Au, u) \geq \varepsilon_0 \|u\|_0^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(K)$$

et qu'il existe  $G(t)$  tel que :

$$(3.3.2) \quad \begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + A \right) G(t) = 0 \\ G(0) = I \\ \operatorname{supp} (G(t)u) \subset K \text{ si } \operatorname{supp} u \subset K' \end{cases}$$

alors pour  $u \in C_0^\infty(K')$ , on a :

$$\operatorname{Re} \left( A G(t)u, G(t)u \right) = - \operatorname{Re} \left( \frac{\partial}{\partial t} G(t)u, G(t)u \right) = - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|G(t)u\|_0^2$$

On obtient de (3.3.1) bis

$$- \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|G(t)u\|_0^2 \geq \varepsilon_0 \|G(t)u\|_0^2$$

D'où en intégrant de 0 à  $T$ , on obtient :

$$\|G(T)u\|_0^2 \leq \|G(0)u\|_0^2$$

En remplaçant  $A$  par  $A - \varepsilon$ , avec  $\varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $G(t)$  par  $e^{\varepsilon t} G(t)$ , on obtient

$$\|G(T)u\|_0^2 \leq e^{-\varepsilon T} \|u\|_0^2$$

Si (3.3.1) bis est remplacé par (3.3.1) et (3.3.2) par des égalités (modulo des régularisants), on obtient,  $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\|G(T)u\|_0^2 \leq e^{-\varepsilon T} \|u\|_0^2 + C_{T,S,\varepsilon} \|u\|_{-S}^2$$

$$\forall u \in C_0^\infty(K').$$

On applique la méthode à  $A_t$  qui vérifie (1.1),  $A_t$  étant modifié pour être à support propre. Il résulte des remarques précédentes et de la remarque (3.1.2) que :

Proposition 3.3.2

Si  $\text{Imp} \leq 0$ ,  $\text{Imp}'_0 + \frac{1}{2} \widetilde{\text{Tr}} H_{\text{Imp}} < 0$  sur les zéros de  $\text{Imp}$ ; alors pour tout  $t > 0$  suffisamment petit, il existe  $B(t)$  vérifiant (1.1) et tel que :

$$\|B(t) u\|_{L^2}^2 < \|u\|_{L^2}^2$$

Remarque 3.3.3

Il est parfois nécessaire de "microlocaliser" au voisinage d'un point si la condition ci-dessus n'est vérifiée que microlocalement. Le plus simple est de modifier  $p$  en dehors d'un voisinage conique du point considéré dans  $T^*X \setminus 0$  de telle sorte que la condition soit vérifiée partout.

Il résulte de la proposition 3.3.2 et de la méthode exposée au § 3.1 le théorème suivant :

Théorème 3.3.4

Si, dans un voisinage  $V$  d'un point  $x_0$  de  $X$ , on a  $\text{Imp} \leq 0$ , et  $\text{Imp}'_0 + \frac{1}{2} \widetilde{\text{Tr}} H_{\text{Imp}} < 0$  sur les zéros de  $\text{Imp}$  situés au dessus de  $V$ , il existe un opérateur continu  $Q$  de  $L^2$  dans  $L^2$ , un opérateur régularisant  $R$  de  $L^2$  dans  $C^\infty$ , et une fonction  $\varphi$  à support compact, valant 1 dans un voisinage de  $x_0$ , telle que :

$$\varphi P Q = \varphi + R$$

En particulier  $P$  est localement résoluble.

Remarque 3.3.5

Le théorème 3.3.4 correspond au théorème 1 de [15]. Le théorème 3.3.4 est plus puissant en ce sens que les hypothèses sont ponctuelles. Mais les conditions que nous obtenons sont indépendantes de  $\text{Re } p$  de sorte que nous ne collons pas à la réalité. Il semble possible cependant (en utilisant la paramétrix usuelle aux points elliptiques) de ne faire l'hypothèse

$\text{Imp}'_0 + \frac{1}{2} \widetilde{\text{Tr}} H_{\text{Imp}} < 0$  que sur les zéros de  $p$ .



§ 3.4 Norme  $H^S$

Le § constitue une réponse à  $Q_6$ .

On suppose que  $A_t$  vérifie :

$$(3.4.1) \quad \begin{cases} D_t A_t + P A_t \equiv 0 \\ A_0 \equiv I \end{cases}$$

et on veut étudier la continuité  $H^S$  de  $A_t$ .

Soit  $\Lambda^S$  un opérateur pseudodifférentiel proprement supporté de symbole

$(1 + |\xi|^2)^{S/2}$ ; on considère  $\Lambda^S A_t \Lambda^{-S}$ , qui vérifie :

$$(3.4.2) \quad \begin{cases} D_t \left[ \Lambda^S A_t \Lambda^{-S} \right] + \left( \Lambda^S P \Lambda^{-S} \right) \left( \Lambda^S A_t \Lambda^{-S} \right) \equiv 0 \\ \left( \Lambda^S A_t \Lambda^{-S} \right)_{t=0} \equiv I \end{cases}$$

La norme  $H^S$  de  $A_t$  (modulo un régularisant) est donnée par la norme  $L^2$  de  $\Lambda^S A_t \Lambda^{-S}$ . Il suffit donc de considérer les conditions obtenues aux deux § précédents, en calculant les symboles principaux et sous principaux de  $\Lambda^S P \Lambda^{-S}$ . Le symbole principal est clairement le même; si on désigne par  $p'_0$  le symbole sous principal de  $\Lambda^S P \Lambda^{-S}$ , on a :

$$(3.4.3) \quad \text{Imp}'_{0,S} = \text{Imp}'_0 - s \left[ \sum_j \xi_j \frac{\partial \text{Rep}}{\partial x_j} \right] |\xi|^{-2}$$

En un point à caractéristiques doubles, on a :

$$\text{Imp}'_{0,S} = \text{Imp}'_0$$

Par contre, en un point où  $H_{\text{Rep}}$  est collinéaire à l'axe du cône, c'est-à-dire lorsque :

$$(3.4.4) \quad d_\xi \text{Rep} = 0, \quad \frac{\partial \text{Rep}}{\partial x_j} = \lambda \cdot \xi_j, \quad j = 1 \dots, n$$

en un point  $(x_0, \xi_0)$

on a :

$$(3.4.5) \quad \text{Im } p'_{0,s} = \text{Im } p'_0 - \lambda s$$

On peut en déduire des résultats de résolubilité locale dans les  $H^S$ .

#### § 4. DEUX EXEMPLES D'APPLICATION

##### § 4.1 Construction de paramétrixes pour des opérateurs à caractéristiques doubles.

On suppose que  $p$  prend ses valeurs dans un cône convexe  $\Gamma$  strictement contenu dans le demi-plan inférieur de  $\mathbb{C}$  ( $\text{Im } z < 0$ ), de sorte qu'il existe  $C$  tel que  $|\text{Re } p| \leq -C \text{Im } p$ .

Il est alors possible de montrer sous ces hypothèses que :

(4.1.1)  $A_t$  est un fourier-intégral à phase complexe qui peut être défini avec une seule phase  $x \cdot \xi - H(t, y, \xi)$  pour tout  $t$ .

(4.1.2)  $A_t$  est en fait un opérateur pseudodifférentiel dans  $\text{OPS}_{1/2, 1/2}^0(\mathbb{R}^n)$ ; c'est la conséquence du fait que  $H(t, y, \xi) - y \cdot \xi$  prend ses valeurs dans un cône. ( $H(t, y, \xi) - y \cdot \xi$  est sensiblement équivalent à  $t p$ ).

(4.1.2) permet de répondre à  $(Q_g)$  posé au § 3.1. Si  $\|A_t\|_{\mathcal{L}(L^2)} < 1$ ,  $(I + A_t)^{-1}$  est un opérateur pseudodifférentiel dans  $\text{OPS}_{1/2, 1/2}^0$  de par un résultat de R. Beals [1]. Ceci permet de localiser le front d'onde de  $u$  connaissant le front d'onde de  $f$ , pour l'équation :  $(I + A_t)u = f$ .

Le théorème 3.3.4 peut alors être précisé, en ce sens que  $Q$  est un opérateur microlocal ( $\text{WF}(Qu) \subset \text{WF}u$ ), opérant dans tous les  $H^S$  et  $R$  est régularisant au sens habituel.

Comme souligné dans la remarque 3.3.5, les hypothèses du théorème 3.3.4 ne dépendent pas de  $\text{Rep}$ . Signalons qu'en considérant :

$$\frac{1}{i} \partial_t + z P, \quad z \in \mathbb{C}$$

et en faisant varier  $z$  de telle sorte de  $\text{Im } zp \leq 0$ , on retrouve en utilisant le théorème de Melin des conditions classiques d'hypoellipticité avec perte d'une dérivée [16],[12], [3], [9].

**Exemple 4.1.3** On suppose que  $p$  est réel positif.

En considérant  $\frac{1}{i} \partial_t + P$ , on peut construire un inverse sous la condition  $\text{Im } p'_0 \neq 0$ .

En considérant  $\frac{1}{i} \partial_t - iP$ , on peut construire un inverse sous la condition

$$- \text{Re } p'_0 + \frac{1}{2} \widetilde{\text{Tr}} H_{-p} < 0 \text{ lorsque } p = 0.$$

On obtient ainsi que si :

$$(4.1.4) \quad \text{Re } p'_0 + \frac{1}{2} \widetilde{\text{Tr}} H_p > 0 \quad \text{si } p = 0$$

$$\text{ou } \text{Im } p'_0 \neq 0$$

$P$  admet une paramétrix à droite.

Il ne semble pas possible pour l'instant de récupérer les conditions discrètes ; on sait que la première condition discrète apparaît lorsque :  $\text{Im } p'_0 = 0$ ,

$$\text{Re } p'_0 + \frac{1}{2} \widetilde{\text{Tr}} H_p = 0.$$

**Exemple 4.1.5**

Supposons que le symbole principal prend ses valeurs dans un cône  $\Gamma$  d'angle inférieur à  $\pi$  et que  $p'_0 \notin -\Gamma$ . Alors il est possible de trouver  $z$  dans  $\mathbb{C}$  tel que  $(z, \Gamma)$  soit strictement dans le demi-plan inférieur, et tel que :

$$\text{Im}(zp) \leq 0, \quad \text{Im}(zp'_0) < 0$$

On peut alors construire la paramétrix.

**Remarque 4.1.6**

On a des résultats plus généraux par d'autres méthodes, et comme on est obligé en partie d'utiliser ces méthodes [1], [16], [12], [3], [9], on peut s'interroger à juste titre sur l'intérêt de notre méthode. On n'a par contre aucune hypothèse sur l'ensemble caractéristique.

## § 4.2 Résolubilité locale

On a déjà donné des résultats (théorème 3.3.4) lorsque  $\text{Imp}'_0 > 0$ ; on peut se poser le problème de ce qui se passe lorsque  $\text{Imp}'_0$  change de signe. Nous allons donner plusieurs exemples d'application, à l'étude de la résolubilité locale, l'idée originale étant que cette étude locale résulte d'une étude globale dans le fibré cotangent. On suppose dans la suite que  $p$  est réel. L'étude qui va suivre est basée sur deux remarques simples.

### Remarque 4.2.1

On a jusqu'ici (Théorème 3.3.4) imposé des conditions entraînant que la norme de  $A_t$  était inférieure à 1 pour  $t$  arbitrairement petit. Ici, on veut utiliser la construction de  $A_t$  pour  $t$  grand (positif ou négatif selon les cas). On a vu (§ 3.2.1) que la norme de  $A_t$  était (modulo un régularisant)

liée au  $\sup_{y, \eta} e^{\int_0^t \text{Imp}'_0 \left( \mathfrak{F}_\tau(y, \eta) \right) d\tau}$

Ceci implique que, si  $\text{Imp}'_0$  change de signe mais si  $\int_0^t \text{Imp}'_0 \left( \mathfrak{F}_\tau(y, \eta) \right) d\tau$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ), alors la norme de  $A_t$  deviendra inférieure à 1 pour  $t$  suffisamment grand. La propriété est ici "globale" et liée au comportement du symbole principal le long des bicaractéristiques.

### Remarque 4.2.2

Pour répondre très partiellement à  $(Q_5)$  on peut utiliser, comme l'a fait Eskin dans [5], des propriétés géométriques du flot associé à  $H_p$ . Si on désigne par  $\pi$  la projection de  $T^*X \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus 0$  définie par  $\pi(x, \xi) = \xi$ , par  $\Gamma_i$ , une famille de secteurs de  $\mathbb{R}^n$ , par  $V$  un voisinage d'un point  $x_0$  dans  $X$ , on considère des cas où,

$$\pi \left( \mathfrak{F}_t(\Gamma_i \times V) \right) \subset \Gamma_i \quad \text{pour tout } t \text{ positif (ou négatif)}.$$

Il est alors possible de résoudre :

$$(I + A(t))u = f$$

de telle sorte que si  $\pi(\text{WF } f) \subset \Gamma_i$ , alors  $\pi(\text{WF } u) \subset \Gamma_i$ .

Ce type de condition apparaîtra très clairement dans les exemples que nous allons regarder.

**Exemple 4.2.3** : l'opérateur de Kannai [13]

$$\text{Soit } P = -x \partial_y^2 + \partial_x$$

On sait que  $P^*$  est hypoelliptique, mais non localement résoluble, qu'il n'est pas microlocalement hypoelliptique, mais que  $P$  est localement résoluble. Pour se placer dans le cadre considéré précédemment, on considère

$$\tilde{P} = P \cdot (-\Delta + 1)^{-1/2}$$

où  $(-\Delta + 1)$  est le laplacien usuel.

On considère le flot associé au symbole principal de  $\tilde{P}$  :  $\tilde{p} = \frac{x \eta^2}{(\eta^2 + \xi^2)^{1/2}}$

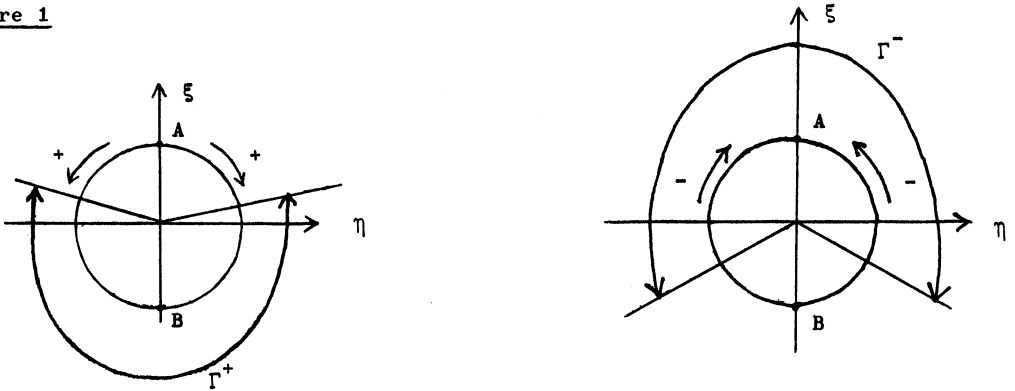
On regarde en projection sur la fibre les équations caractéristiques :

$$(4.2.3.1) \quad \frac{d\eta}{ds} = 0, \quad \frac{d\xi}{ds} = \frac{-\eta^2}{(\eta^2 + \xi^2)^{1/2}}, \quad \eta|_{t=0} = \eta_0; \quad \xi|_{t=0} = \xi_0.$$

On note  $\Psi_t(\eta_0, \xi_0)$  la solution de (4.2.3.1)

Le symbole sous-principal de  $\tilde{P}$  est donné par  $\tilde{p}'_0 = i \frac{\xi}{(\eta^2 + \xi^2)^{1/2}} + \frac{1}{2i} \frac{\eta^2 \xi}{(\eta^2 + \xi^2)^{3/2}}$

**Figure 1**



On a sur le cercle ( $|\xi|^2 + |\eta|^2 = 1$ ) deux points fixes  $A(1,0)$  et  $B(-1,0)$ .

$$(4.2.3.2) \quad \text{Imp}'_0 = \frac{\xi}{(\eta^2 + \xi^2)^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{\eta^2 \xi}{(\eta^2 + \xi^2)^{3/2}}$$

Il est clair que  $\int_0^t \text{Imp}'_0(\psi_t(\eta, \xi)) d\tau$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  uniformément pour  $(\eta, \xi)$  dans un secteur  $\Gamma_+$  contenant B et ne contenant pas A (voir figure).

De même, il est clair que  $\int_0^t \text{Imp}'_0(\psi_\tau(\eta, \xi)) d\tau$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $t$  tend vers  $-\infty$  dans un secteur  $\Gamma_-$  contenant A et ne rencontrant pas B (voir figure).

Les points fixes du flot projeté sur le cercle sont les points A et B. En ces points,  $\text{Imp}'_0$  est égal à  $+1$  (en A) et à  $-1$  (en B).

Pour montrer la résolubilité locale, on est conduit à considérer deux cônes  $\Gamma_+$  et  $\Gamma_-$  qui recouvrent  $\mathbf{R}^2$  ayant les propriétés précisées ci-dessus, et une partition de l'unité associée de telle sorte que :

$$1 = \chi_+(\xi, \eta) + \chi_-(\xi, \eta)$$

$$\text{supp } \chi_+ \subset \Gamma_+; \text{ supp } \chi_- \subset \Gamma_-$$

Pour résoudre  $\tilde{\text{P}}u = f$  pour  $f$  dans  $L^2_{\text{comp}}$ , on résoud séparément

$$\tilde{\text{P}}u_+ = \chi_+ f \quad \text{et} \quad \tilde{\text{P}}u_- = \chi_- f$$

Pour résoudre  $\tilde{\text{P}}u_+ = \chi_+ f$ , on considère l'identité :

$$\tilde{\text{P}} \left[ i \int_0^t A_\tau d\tau \right] \equiv I - A_t \quad \text{pour } t \text{ positif}$$

Pour  $t$  suffisamment grand, on peut résoudre

$$(I - A_t)u = f^+$$

de telle sorte que si  $\pi(\text{WF}f^+) \subset \Gamma_+$  alors  $\pi(\text{WF}u) \subset \Gamma_+$

Pour résoudre  $\tilde{\text{P}}u_- = \chi_- f$ , on considère l'identité :

$$\tilde{\text{P}} \left[ -i \int_{+t}^0 A_\tau d\tau \right] \equiv I - A_t \quad \text{pour } t \text{ négatif}$$

Pour  $t$  suffisamment grand, on peut résoudre

$$(I - A_t)u = f^-$$

de telle sorte que si  $\pi(WFf^-) \subset \Gamma_-$ , alors  $\pi(WFu) \subset \Gamma_-$

On construit ainsi  $Q$  sous la forme  $(Q_+\chi_+ + Q_-\chi_-)$  vérifiant  $\tilde{P}Q = I + R$  dans un voisinage de l'origine, où  $R$  est régularisant de  $L^2$  dans  $C^\infty$ ,  $Q$  continu de  $L^2$  dans  $L^2$ .  $(-\Delta + 1)^{-1/2}Q$  est alors la paramétrix pour  $P$ ; elle est continue de  $L^2$  dans  $H^1$ .

On ne suit malheureusement pas ce qui se passe sur le plan de la propagation des singularités dans l'ensemble  $(x = 0, \eta = 0)$ .

Exemple 4.2.4 : l'opérateur de Bolley - Camus [2]

$$\text{Soit } P = -x \left( \partial_y^2 + \partial_x^2 \right) + \lambda \partial_x$$

On sait que  $P$  n'est pas hypoelliptique, mais qu'il a la régularité  $C^\infty$  si on suppose que la solution a déjà une certaine régularité  $H^s$  pour  $s$  convenable. La construction d'une paramétrix à gauche ou à droite doit mettre en évidence ce phénomène. On considère pour des raisons techniques

$$\tilde{P} = P(-\Delta + 1)^{-1/2} \quad \text{de symbole principal : } p = \left[ x \eta^2 + \xi^2 \right]^{1/2}$$

Les équations bicaractéristiques sont données en projection par :

$$(4.2.4.1) \quad \frac{d\eta}{ds} = 0, \quad \frac{d\xi}{ds} = - \left[ \eta^2 + \xi^2 \right]^{1/2}, \quad \xi = \xi_0, \quad \eta = \eta_0$$

et le symbole sous principal est  $\tilde{p}'_0 = i \frac{[\lambda + 1/2]\xi}{(\eta^2 + \xi^2)^{1/2}}$

Par conséquent on a :

$$(4.2.4.2) \quad \text{Im } \tilde{p}'_0 = \left[ \text{Re } \lambda + \frac{1}{2} \right] \frac{\xi}{(\eta^2 + \xi^2)^{1/2}}$$

En projection la situation géométrique est la même que dans l'exemple précédent. Mais les points  $A$  et  $B$  ne correspondent pas à des points doubles mais seulement à des points où  $H_p$  est collinéaire à l'axe du cône. Par la même méthode que pour l'exemple (4.2.3), on montre que si :

$$(4.2.4.3) \quad (\operatorname{Re} \lambda + 1/2) > 0$$

On peut construire Q donnant la résolubilité locale dans  $L^2$ .

Ce qui est différent de l'exemple 4.2.3, c'est que les conditions dépendent de  $s$  lorsqu'on cherche à construire un inverse à partir de  $H^s$ . Utilisant les résultats du § 3.4, on obtient que si

$$(4.2.4.4) \quad \operatorname{Re} \lambda + 1/2 - s > 0$$

On peut construire Q donnant la résolubilité locale dans  $H^s$ . C'est un résultat dual du résultat de régularité pour  $P^*$  mentionné précédemment. On peut donc toujours résoudre  $Pu = f$  dans  $H^s$  pour  $s < s_0$ .

Exemple 4.2.5 : Résolubilité locale pour l'opérateur d'Euler - Poisson - Darboux [8]

$$\text{Soit } P = -x(\partial_x^2 - \partial_y^2) + \lambda \partial_x$$

Hanges [8] a construit une paramétrix sous la condition que  $\lambda \notin (0, 2, 4, \dots)$ . On considère pour des raisons techniques  $\tilde{P} = P(-\Delta + 1)^{-1/2}$  de symbole principal :

$$\tilde{p} = -x \frac{(\eta^2 - \xi^2)}{(\eta^2 + \xi^2)^{1/2}}$$

Les équations bicaractéristiques sont données en projection par :

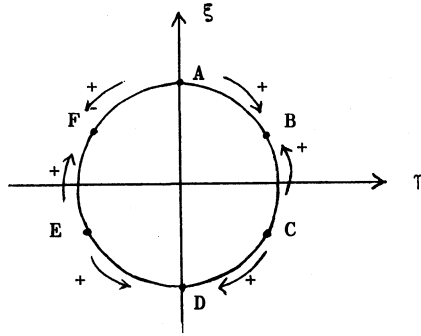
$$(4.2.5.1) \quad \frac{d\eta}{ds} = 0, \quad \frac{d\xi}{ds} = \frac{[\eta^2 - \xi^2]}{(\eta^2 + \xi^2)^{1/2}}$$

et le symbole sous principal est :

$$\tilde{p}'_0 = \frac{i[\lambda + 1]\xi}{(\eta^2 + \xi^2)^{1/2}} - \frac{1}{2i} \frac{[\eta^2 - \xi^2]\xi}{(\eta^2 + \xi^2)^{3/2}}$$



Figure 2



Sur le cercle on a 6 points fixes; A et D correspondent à des points où  $H_P$  est collinéaire à l'axe du cône; B, C, E, F correspondent à des points où  $H_P$  est nul. Pour utiliser la méthode précédente, on doit calculer le symbole sous-principal aux points A, B, C, D, E, F

$$\text{en A} \quad \text{Im } \tilde{p}'_0 = (\text{Re } \lambda + 1/2) \quad \text{Im } \tilde{p}'_0^s = \text{Re } \lambda + 1/2 - s$$

$$\text{en D} \quad \text{Im } \tilde{p}'_0 = -(\text{Re } \lambda + 1/2) \quad \text{Im } \tilde{p}'_0^s = -(\text{Re } \lambda + 1/2 - s)$$

$$\text{en B et F} \quad \text{Im } \tilde{p}'_0 = \frac{\text{Re } \lambda + 1}{\sqrt{2}} \quad \text{Im } \tilde{p}'_0^s = \frac{\text{Re } \lambda + 1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{en C et E} \quad \text{Im } \tilde{p}'_0 = -\frac{(\text{Re } \lambda + 1)}{\sqrt{2}} \quad \text{Im } \tilde{p}'_0^s = -\frac{(\text{Re } \lambda + 1)}{\sqrt{2}}$$

Si  $\text{Re } \lambda + 1 < 0$ , on peut pour tout  $s$  tel que  $\text{Re } \lambda + \frac{1}{2} - s \neq 0$ , trouver une paramétrix  $Q_s$  continue de  $H^s$  dans  $H^s$  (dont la nature dépend vraiment de  $s$ , selon que  $\text{Re } \lambda + \frac{1}{2} - s$  est positif ou négatif).

Soit l'ensemble  $\{ A, B, C, D, E, F \}$  et  $X$  l'un de ces points. On désigne par  $\Gamma(X)$  un secteur contenant  $X$  et ne contenant pas les 2 points voisins de  $X$  sur le cercle. On résoud d'abord dans  $\Gamma(A)$  et  $\Gamma(D)$  en utilisant la construction du théorème 3.3.4. On est ainsi ramené à la construction dans des secteurs  $\Gamma(B)$ ,  $\Gamma(C)$ ,  $\Gamma(E)$ ,  $\Gamma(F)$  où la construction est possible comme dans les exemples précédents. On a choisi les secteurs  $\Gamma(X)$  de telle sorte qu'ils recouvrent  $\mathbb{R}^2$ . Par ailleurs, aux points A et D, on a seulement pris comme hypothèse  $\text{Re } \lambda + \frac{1}{2} - s \neq 0$ , car les "erreurs" que la construction de la paramétrix en A et D peuvent laisser, sont absorbées ensuite.

Exemple 4.2.6

$$\text{Soit } P = -x(\partial_x - \partial_y)^2 + \lambda \partial_x + \mu \partial_y$$

On considère  $\tilde{P} = P(-\Delta + 1)^{-1/2}$  de symbole principal :

$$\tilde{P} = \frac{x(\eta - \xi)^2}{(\eta^2 + \xi^2)^{1/2}}$$

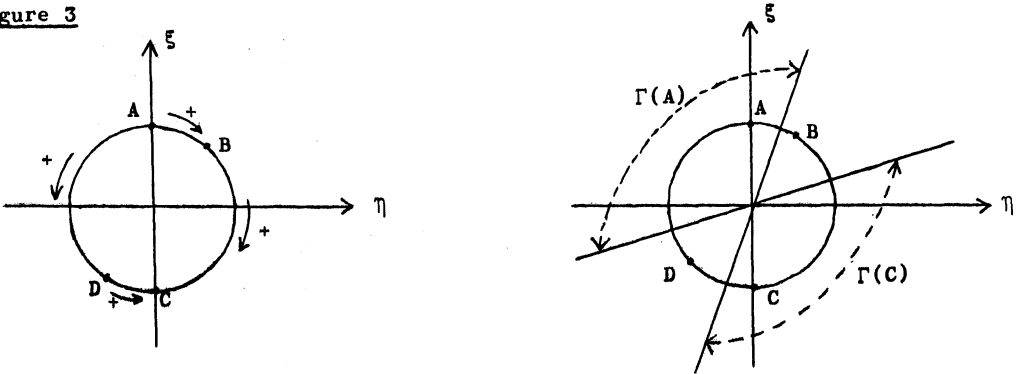
Les équations bicaractéristiques sont données par :

$$(4.2.6.1) \quad \frac{d\eta}{ds} = 0, \quad \frac{d\xi}{ds} = \frac{-(\eta - \xi)^2}{(\eta^2 + \xi^2)^{1/2}}$$

Le symbole sous-principal de  $\tilde{P}$  est donné par :

$$(4.2.6.2) \quad i(\lambda\xi + \mu\eta) [\eta^2 + \xi^2]^{-1/2} - \frac{1}{2i} \cdot \frac{2(\xi - \eta)}{(\eta^2 + \xi^2)^{1/2}} - \frac{1}{2i} \frac{(\eta - \xi)^2(-\xi)}{(\eta^2 + \xi^2)^{3/2}}$$

Figure 3



Sur le cercle, on a 4 points fixes : A et C correspondent à des points où  $H_p$  est collinéaire à l'axe du cône, B et D correspondent à des points où  $H_p$  est nul. Calculons le symbole sous-principal aux points A, B, C, D

$$\begin{array}{ll}
 \text{en A} & \text{Im } \tilde{p}'_0 = \text{Re } \lambda + 1/2 & \text{Im } \tilde{p}'_0{}^s = \text{Re } \lambda + 1/2 - s \\
 \text{en C} & \text{Im } \tilde{p}'_0 = -(\text{Re } \lambda + \frac{1}{2}) & \text{Im } \tilde{p}'_0{}^s = -(\text{Re } \lambda + 1/2 - s) \\
 \text{en B} & \text{Im } \tilde{p}'_0 = \frac{\text{Re } \lambda + \text{Re } \mu}{\sqrt{2}} & \text{Im } \tilde{p}'_0{}^s = \frac{\text{Re } \lambda + \text{Re } \mu}{\sqrt{2}} \\
 \text{en D} & \text{Im } \tilde{p}'_0 = -\frac{(\text{Re } \lambda + \text{Re } \mu)}{\sqrt{2}} & \text{Im } \tilde{p}'_0{}^s = -\frac{(\text{Re } \lambda + \text{Re } \mu)}{\sqrt{2}}
 \end{array}$$

Si  $\text{Re } \lambda + 1/2 - s > 0$  et  $\text{Re } \lambda + \text{Re } \mu \neq 0$ , on a résolubilité dans  $H^s$ ; on résoud d'abord aux points B et D puis dans des secteurs  $\Gamma(C)$ ,  $\Gamma(A)$ .

Lorsque  $\lambda$  et  $\mu$  sont réels, la condition  $(\lambda + \mu) \neq 0$  signifie que  $\tilde{P}$  ne vérifie pas une condition de Lévi. Lorsque  $\lambda + \mu = 0$ , on peut factoriser :

$$P = (-x(\partial_x - \partial_y) + \lambda)(\partial_x - \partial_y),$$

et il suffit de considérer la résolubilité locale pour l'opérateur :

$$\tilde{P} = -x(\partial_x - \partial_y) + i\lambda$$

Cet opérateur constituera l'exemple suivant :

#### Exemple 4.2.7

$$\text{Soit } P = -x \left[ i \partial_x - i \partial_y \right] + i \lambda,$$

$$\text{on a } p = x[\xi - \eta]$$

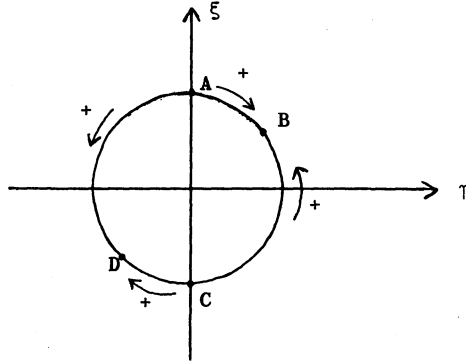
Les équations bicaractéristiques sont données en projection par :

$$(4.2.7.1) \quad \frac{d\eta}{ds} = 0, \quad \frac{d\xi}{ds} = -(\xi - \eta)$$

Le symbole sous-principal de P est donné par :

$$(4.2.7.2) \quad p'_0 = i \left[ \lambda + \frac{1}{2} \right]$$

Figure 4



Il y a sur le cercle 4 points fixes comme dans l'exemple 4.2.6.

Calculons le symbole sous-principal aux points A, B, C, D :

$$\text{en A} \quad \text{Imp}'_0 = \text{Re } \lambda + 1/2 \quad \text{Imp}'_0 = \text{Re } \lambda + 1/2 - s$$

$$\text{en B} \quad \text{Imp}'_0 = \text{Re } \lambda + 1/2 = \text{Imp}'_0^s$$

$$\text{en C} \quad \text{Imp}'_0 = \text{Re } \lambda + 1/2 \quad \text{Imp}'_0 = \text{Re } \lambda + 1/2 - s$$

$$\text{en D} \quad \text{Imp}'_0 = \text{Re } \lambda + 1/2 = \text{Imp}'_0^s$$

Sous la condition  $\text{Re } \lambda + \frac{1}{2} - s \neq 0$ ,  $\text{Re } \lambda + \frac{1}{2} \neq 0$ , on peut, en distinguant les cas, montrer la résolubilité  $H^s$  sauf lorsque  $0 < \text{Re } \lambda + \frac{1}{2} < s$ . La vérification est laissée au lecteur.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. Beals : Characterization of pseudodifferential operators and applications (à paraître).
- [2] P. Bolley, J. Camus : Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables. Bulletin Soc. Math. France, Mémoire 43 (1973), p 55 - 140.
- [3] L. Boutet de Monvel, A. Grigis, B. Helffer : Parametrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples. Astérisque 34 - 35 (1976), p 93 - 121.
- [4] J.J. Duistermaat, L. Hörmander : Fourier integral operators II. Acta Math. 128 (1972), p 183 - 269.
- [5] G. Eskin : Propagation of singularities for interior mixed hyperbolic problem. Sem. Goulaouic - Schwartz, exposé n°12 (1976 - 77).
- [6] P. Godin : Propagation des singularités pour des opérateurs de type principal, localement résolubles, à coefficients analytiques, en dimension 2. (à paraître).
- [7] V.V. Guillemin, D. Schaeffer : On a certain class of Fuchsian Partial differential equations. (à paraître).
- [8] N.W. Hanges : Parametrixes and local solvability for a class of singular hyperbolic operators. P.H.D Purdue University.
- [9] B. Helffer : Addition de variables et application à la régularité. (à paraître). Annales Institut Fourier.
- [10] L. Hörmander : Fourier Integral operators I. Acta Math. 127 (1971), p 79 - 183.
- [11] L. Hörmander : On the existence and the regularity of solutions of linear pseudodifferential equations. l'Ens.Math. 17 (1971), p 99 - 163.
- [12] L. Hörmander : A class of pseudodifferential operators with double characteristics. Math. Annalen. 217 n° 2, (1975).
- [13] Y. Kannai : An unsolvable hypoelliptic operator. Israël Journal of Math. 9, (1971), p 306 - 315.
- [14] V.V. Kučerenco : Asymptotic solutions of equations with complex characteristics. Mat. Sbornik Tom 95 (137), (1974), n° 2  
Math.USSR - Sbornik Vol. 24, (1974) n° 2.

- [15] V.V. Kučerenko : Parametrix for equations with degenerate symbol.  
Dok. Akad. Nauk.SSSR. Tom 229, (1976) n<sup>o</sup> 4;  
Sov. Math. Dokl. Vol. 17, (1976) n<sup>o</sup> 4.
- [16] A. Melin : Lower bounds for pseudo-differential operators.  
Ark. Mat. 9, (1971), p 117 - 140.
- [17] A. Melin, J. Sjöstrand : Fourier Integral operators with complex phase functions . Springer lecture Notes 459, p 255 - 282.
- [18] A. Melin, J. Sjöstrand : Fourier Integral operators with complex phase functions and parametrix for an interior boundary value problem.  
Comm. in P.D.E., (1976).
- [19] A. Menikoff, J. Sjöstrand : Sur la distribution des valeurs propres d'opérateurs hypoelliptiques. (congrès de St-Jean-de-Monts 1977).
- [20] L. Nirenberg, F. Trèves : On local solvability of linear partial differential equations. Part II Sufficient conditions. Comm. Pure Appl. Math. 23, (1970), p 459 - 510.
- [21] J. Rauch, M. Taylor : Decay of solutions to Non-dissipative Hyperbolic Systems on Compact Manifolds. Comm Pure Appl. Mathematics Vol 28, p 501 - 523, (1975).
- [22] F. Trèves : Hypoelliptic partial differential equations of principal type. Sufficient conditions and necessary conditions. Comm. Pure Appl. Math. 24, (1971), p 631 - 670.
- [23] F. Trèves : A new method of proof of the subelliptic estimates.  
Comm. Pure Appl. Math. 24, (1971), p 71 - 115.

Ecole Polytechnique  
Centre de Mathématiques  
Plateau de Palaiseau  
91128 PALAISEAU Cedex