JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

MARC AUTHIER

Construction d'un inverse et propagation de la régularité des solutions pour un problème de Dirichlet hyperbolique

Journées Équations aux dérivées partielles (1976), p. 1-23

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1976____A2_0>

CONSTRUCTION D'UN INVERSE ET PROPAGATION DE LA REGULARITE DES SOLUTIONS POUR UN PROBLEME DE DIRICHLET HYPERBOLIQUE

par

Marc AUTHIER

(Département de Mathématiques, Université de REIMS
B.P. 347 - 51062 REIMS-CEDEX)

1 - Introduction et préliminaires

Soit $Q(D)$ un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants et Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ (Ω est l'intérieur d'une sous-variété compacte C^∞ à bord de $\mathbb{R}^n$). On peut définir un espace de Hilbert normal de distributions en complètant $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme

$$\|\varphi\|_Q = \|Q(D)\varphi\|_{L^2}$$

On désignera cet espace par $H_o(Q,\Omega)$. Son dual, qui est lui aussi un espace de Hilbert de distributions sera noté $H'(Q,\Omega)$. On voit facilement que l'opérateur

$$P(D) = Q(D)\ Q^*(D)$$

est un isomorphisme isométrique de $H_o(Q,\Omega)$ sur $H'(Q,\Omega)$. Nous appellerons problème de Dirichlet pour $P(D)$, le problème aux limites défini par cet isomorphisme.

Dans ce travail, on cherche à construire l'isomorphisme inverse de $P(D)$ sous les hypothèses suivantes, qui seront valables dans toute la suite.

Hypothèse sur Q : $Q(D)$ est un opérateur homogène d'ordre m strictement hyperbolique par rapport à $N \in \mathbb{R}^n$.

Hypothèse sur Ω : Ω est ouvert borné régulier $Q(D)$-convexe de $\mathbb{R}^n$.

On va, avant de continuer, introduire une notation que nous utiliserons constamment. On notera

$$L^2_Q(\Omega)$$

l'image par $Q(D)$ de $H_o(Q,\Omega)$. C'est aussi l'adhérence dans $L^2(\Omega)$ de $Q(D)\ \mathcal{D}(\Omega)$. On peut alors faire les remarques suivantes :

- l'isomorphisme

$$P(D) = Q(D)^2 : H_o(Q,\Omega) \longrightarrow H'(Q,\Omega)$$

se factorise en deux isomorphismes

(1.1) $\quad Q(D) : H_o(Q,\Omega) \longrightarrow L^2_Q(\Omega)$

(1.2) $\quad Q(D) : L^2_Q(\Omega) \longrightarrow H'(Q,\Omega)$.

- On sait (cf. [1]) que le premier de ces isomorphismes peut s'étudier de la façon suivante : soit Q^{-1} la solution élémentaire du problème de Cauchy pour $Q(D)$ (c'est l'unique solution élémentaire à support dans un cône saillant contenant N), soit $\tilde{f}$ le prolongement par zéro en dehors de Ω de $f \in L^2_Q(\Omega)$, alors $Q^{-1} * \tilde{f} \in H_o(Q,\Omega)$. L'inverse de $Q(D)$ pour ce premier isomorphisme est donc Q^{-1}.

- L'isomorphisme qu'il est "intéressant" d'étudier est donc le second, et c'est ce que nous allons faire dans la suite de ce travail.

Le plan de l'étude est le suivant. On caractérise d'abord $L^2_Q(\Omega)$ comme intersection des sous-espaces fermés de $L^2(\Omega)$ noyaux de certains opérateurs de moyenne sur des hyperplans. Puis on construit le projecteur orthogonal

$$E : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2_Q(\Omega).$$

Enfin, après avoir constaté que

$$QE = Q,$$

on obtient un inverse en composant E avec un relèvement quelconque

$$A : H'(Q,\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

vérifiant $QA = Id°$.

On applique les résultats obtenus à

$$Q(D) = D_1 D_2$$

dans le plan. Dans ce cas particulier on obtient des résultats assez précis de propagation des singularités des solutions du problème correspondant à l'isomorphisme (1-2), et donc du problème de Dirichlet.

Je remercie D. Revuz de m'avoir signalé l'intérêt des opérateurs quasi-compacts, une première version de ce travail utilisait d'ailleurs beaucoup plus les idées de [3].

2 - Etude de $L^2_Q(\Omega)$

Le but de cette partie est de donner des caractérisations utilisables des éléments de $L^2_Q(\Omega)$, pour pouvoir ensuite construire le projecteur

$$L^2(\Omega) \longrightarrow L^2_Q(\Omega).$$

On a d'abord

Proposition 2.1 : Soit $v \in L^2(\Omega)$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $v \in L^2_Q(\Omega)$.

ii) Il existe $u \in \mathcal{E}'$ tel que $Qu = \tilde{v}$.

iii) $\hat{v}(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $Q(\xi) = 0$.

Démonstration : Elle utilise deux lemmes dont on trouvera une démonstration dans [1] pour le lemme 2.1 et dans [2], par exemple, pour le lemme 2.2.

Lemme 2.1 : Soit H_a un demi-espace $\langle x,N\rangle > a$, contenant $\overline{\Omega}$, on a

a) Pour tout $f \in L^2(H_a)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Qu = f \\ \operatorname{supp} u \subset \overline{H}_a \end{cases}$$

appartient à $H_o(Q,H_a)$.

b) L'application de prolongement par 0 en dehors de Ω identifie $H_o(Q,\Omega)$ à $\mathcal{E}'_{\bar\Omega} \cap H_o(Q,H_a)$, de plus $Q\tilde{u} = \widetilde{Qu}$.

<u>Lemme 2.2</u> : Soient $P \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$, $v(P)$ la variété des zéros réels de P, et

$$P = \prod_{i=1}^{r} P_i^{\alpha_i}$$

la décomposition de P en facteurs $\mathbb{R}$-irréductibles.

Si pour tout i, $1 \leq i \leq v$, on a $\alpha_i = 1$ et $\dim v(P_i) = n-1$ (cette dimension est celle de la variété des points réguliers de $v(P_i)$), alors pour toute fonction f entière sur $\mathbb{C}^n$ il existe une fonction g entière sur $\mathbb{C}^n$ telle que

$$f = Pg,$$

si et seulement si f est nulle sur $v(P)$.

Ces deux lemmes étant acquis, la démonstration de la proposition se déroule comme suit :

i) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ iii) sont pratiquement évidents.

iii) $\Longrightarrow$ ii) : Q étant strictement hyperbolique vérifie les hypothèses du lemme 2.2, il existe donc g entière telle que

$$\hat{v}(\xi) = Q(\xi)\ g(\xi).$$

D'autre part le théorème de Lindelöf (ou ses corollaires, cf. [10]) permet d'affirmer que, $\hat{v}$ étant d'un certain type exponentiel et Q un polynôme, g, dont on sait qu'elle est entière, est de même type exponentiel que $\hat{v}$.

D'où ii) en utilisant le théorème de Paley-Wiener.

ii) $\Longrightarrow$ i) : soit $u = \mathcal{F}^{-1}g$, Ω étant Q-convexe et u à support compact on sait que $u \in \mathcal{E}'_{\bar\Omega}$; u est donc solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Qu = \tilde{v} \\ \operatorname{supp} u \subset H_a, \end{cases}$$

donc $u \in H_o(Q,H_a)$, d'où i) en utilisant le lemme 2.1, ce qui achève la démonstration.

Pour exploiter la caractérisation iii), on va introduire une classe de moyennes sur des hyperplans. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1}_y \times \mathbb{R}_t$, et soient :

$$t_o = \inf \{t \in \mathbb{R} \ ; \ \bar{\Omega} \cap \{(y,t) \ ; \ y \in \mathbb{R}^{n-1}\} \neq \phi\}$$

$$t_1 = \sup \{t \in \mathbb{R} \ ; \ \bar{\Omega} \cap \{(y,t) \ ; \ y \in \mathbb{R}^{n-1}\} \neq \phi\}$$

$$\Omega_t = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \quad ; \quad (y,t) \in \Omega\}$$

$$\bar{\bar{\Omega}}_t = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \quad ; \quad (y,t) \in \bar{\Omega}\}$$

On va supposer que pour tout $t \in [t_o,t_1]$, $\bar{\bar{\Omega}}_t$ est connexe.

Soit $f \in L^2(\Omega)$, pour presque tout $t \in [t_o,t_1]$, on peut définir

$$\int_{\Omega_t} f(y,t)\, dy .$$

Considérons alors la fonction définie presque partout sur $\mathbb{R}^n$ par

$$Mf(y,t) = \left(\frac{1}{\text{mes } \Omega_t} \int_{\Omega_t} f(z,t)dz \right) \times 1_\Omega (y,t)$$

où 1_Ω désigne l'indicatrice de Ω. On appellera encore Mf la restriction de cette fonction à Ω.

<u>Lemme 2.3</u> : M est un projecteur orthogonal dans $L^2(\Omega)$.

<u>Démonstration</u> : M est visiblement linéaire et idempotent de $L^2(\Omega)$ dans lui même. D'autre part

$$||Mf||^2_{L^2} = \int_\Omega \left| \frac{1}{\text{mes } \Omega_t} \int_{\Omega_t} f(z,t)dz \right|^2 dy\, dt,$$

en appliquant le théorème de Fubini, on trouve :

$$||Mf||^2_{L^2} = \int_{t_o}^{t_1} \frac{\text{mes } \Omega_t}{\text{mes } \Omega_t^2} \left| \int_{\Omega_t} f(z,t)dz \right|^2 dt.$$

L'inégalité de Schwarz permet d'écrire

$$\left|\int_{\Omega_t} f(z,t)\,dz\right|^2 \leq \text{sur } \Omega_t \,.\, \int_{\Omega_t} |f(z,t)|^2\,dz,$$

d'où :

$$\|Mf\|^2_{L^2} \leq \|f\|^2_{L^2}.$$

M est donc bien un projecteur orthogonal.

<u>Lemme 2.4</u> : M est un projecteur continu dans $C^o(\overline{\Omega})$.

<u>Démonstration</u> : Admettant provisoirement que

(2.2) $\qquad MC^o(\overline{\Omega}) \subset C^o(\overline{\Omega})$

on voit que M est idempotent et de graphe fermé, d'où le résultat. Pour vérifier (2.2), vérifions d'abord le lemme suivant.

<u>Lemme 2.5</u> : Soit K un voisinage compact de la projection sur $\mathbb{R}^{n-1}_y$ de $\overline{\Omega}$ et soit $f \in L^2(\Omega)$. Si $t_2 \in \,]t_o,t_1[$ et si l'application :

$$t \longmapsto \tilde{f}(.,t)$$

est continue de $\mathbb{R}$ dans $L^1(K)$ au point t_2, alors l'application

$$t \longmapsto Mf(y,t)$$

est continue au point t_2.

<u>Commentaire</u> : $\tilde{f}(.,t)$ désigne le prolongement par 0 à K de la restriction de f à Ω_t. D'autre part $Mf(y,t)$ ne dépend en fait pas de y sur Ω_t.

<u>Démonstration</u> : Compte tenu des hypothèses faites sur Ω l'application

$$t \longmapsto \frac{1}{\text{mes } \Omega_t}$$

est continue sur $]t_o,t_1[$. On a d'autre part

$$\left|\int_{\Omega_{t_2+h}} f(z,t_2+h)\,dz - \int_{\Omega_{t_2}} f(z,t_2)\,dz\right| \leq$$

$$\leq \int_{\Omega_{t_2}\ \Omega_{t_2+h}} |f(z,t_2)|\,dz + \int_{\Omega_{t_2+h}} |f(z,t_2+h)-f(z,t_2)|\,dz$$

$$\leq \text{mes}(\Omega_{t_2} \ \Omega_{t_2+h}) \ ||\tilde{f}(.,t_2)||_{L^2(K)} + ||\tilde{f}(.,t_2+h)-\tilde{f}(.,t_2)||_{L^1(K)}$$

d'où le résultat.

Fin de la démonstration du lemme 2.4 : Compte tenu du lemme précédent, il ne reste qu'à étudier la continuité de Mf aux points (y,t_o) et (y,t_1) de $\bar{\Omega}$, c'est-à-dire à montrer l'existence d'une limite pour l'application

$$\varphi : t \longrightarrow \frac{1}{\text{mes } \Omega_t} \int_{\Omega_t} f(z,t)\ dt$$

lorsque t tend vers t_o à droite (resp. t tend vers t_1 à droite). Or, soit g un prolongement continu de f à K x $[t_o,t_1]$, et soient s et t quelconques dans $]t_o,t_1[$, on a

(2.3) $\quad |\varphi(s)-\varphi(t)| \leq \sup_{y \in K} |g(y,s)-g(y,t)|$.

La continuité de g sur le compact K x $[t_o,t_1]$, et par suite sa continuité uniforme, permet alors de montrer que φ est uniformément continue sur K x $]t_o,t_1[$ et se prolonge donc en une application (uniformément) continue unique à K x $[t_o,t_1]$, ce qui est exactement le résultat cherché.

Soit maintenant $\theta \in S^{n-1}$, en utilisant la décomposition en somme directe :

$$\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}\theta)^+ \oplus \mathbb{R}\theta ,$$

on peut définir un projecteur orthogonal dans $L^2(\Omega)$ en prenant les moyennes de f sur les hyperplans $\langle x,\theta\rangle = t$.

On a alors :

Proposition 2.2 : Soit $v \in L^2(\Omega)$, les propriétés suivantes sont équivalentes

a) $v \in L^2_Q(\Omega)$.

b) $M_\theta v = 0$ pour tout $\theta \in S^{n-1} \cap v(Q)$.

c) $M_{\theta_p} v = 0$ pour une suite (θ_p) dense dans $S^{n-1} \cap v(Q)$.

Démonstration : b) est équivalent au iii) de la proposition 2.1. En effet, par un changement de variable on peut ramener une génératrice quelconque de $v(B)$ à être engendrée par $\theta = (0,\ldots,0,1)$. La nullité de $\hat{v}(\xi)$ sur cette génératrice s'écrit donc

$$\hat{v}(0,\ldots,0,\tau) = 0 \ , \quad \text{pour tout } \tau \in \mathbb{R}$$

où encore

(2.4) $$\widehat{v}(0,\ldots,0,t) = 0 \ , \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

$\widehat{v}$ désignant la transformée de Fourier partielle de $\tilde{v}$ par rapport à $(x_1,\ldots,x_{n-1})$. Or, (2.4) équivaut à

$$\int \tilde{v}(y,t)\, dy = 0 \ , \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

D'où la propriété cherchée.

A son tour c) est équivalent à b) compte tenu du lemme suivant.

Lemme 2.6 : Soit (θ_p) une suite de S^{n-1} convergeant vers $\theta \in S^{n-1}$, (M_{θ_p}) converge vers M_θ dans $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$ (resp. dans $\mathcal{L}(C^o(\overline{\Omega}))$) simplement.

Démonstration : La propriété relative à $C^o(\overline{\Omega})$ se vérifie directement sans aucun problème. Soient alors f et g quelconques dans $L^2(\Omega)$, on a, en utilisant le lemme 2.1

$$\|M_{\theta_p} f - M_\theta f\|_{L^2} \le \|M_{\theta_p} f - M_{\theta_p} g\|_{L^2} + \|M_{\theta_p} g - M_\theta g\|_{L^2} + \|M_\theta g - M_\theta f\|_{L^2}$$

$$\le 2\, \|f-g\|_{L^2} + \|M_{\theta_p} g - M_\theta g\|_{L^2} \ .$$

Il ne reste qu'à utiliser la propriété pour $C^o(\overline{\Omega})$ et la densité de $C^o(\overline{\Omega})$ dans $L^2(\Omega)$ pour achever la démonstration du lemme.

Pour terminer ce paragraphe, donnons encore une propriété qui nous servira par la suite

Proposition 2.3 : Soient $\theta \in S^{n-1} \cap V(\Omega)$ et $v \in L^2(\Omega)$. Alors

(2.5) $$Q(D)\, M_\theta v = 0.$$

Démonstration : On peut toujours se ramener à $\theta = (0,\dots,0,1)$, dire que $\theta \in v(Q)$ se traduit par

$$Q(D) = D_n^{m-1} R_1(D') + \dots + R_m(D')$$

où $R_k(D')$ est un opérateur homogène d'ordre k par rapport à

$$D' = (D_1,\dots,D_{n-1}).$$

Or $M_\theta v$ ne dépend que de la variable x_n, d'où le résultat.

3 - Projecteur sur l'intersection de deux sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux sous-espaces fermés de $\mathcal{H}$, M et N les projecteurs orthogonaux

(3.1)
$$\begin{cases} M : \longrightarrow \mathcal{M}^\perp \\ N : \longrightarrow \mathcal{N}^\perp \end{cases}$$

on désigne par T le composé MN et on a donc $T^* = NM$. On va d'abord donner un développement en série du projecteur orthogonal P sur le sous espace fermé $\mathcal{P} = \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ de $\mathcal{H}$.

Pour cela nous ferons une hypothèse sur T et sur T^* utilisant la notion de quasi-compacité d'un opérateur (cf. [3], [11]).

Définition 3.1 : Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, T est quasi-compact s'il existe un entier m et un opérateur compact K tels que

(3.2)
$$\|T^m - K\| < 1$$

Nous utiliserons les propriétés suivantes de ces opérateurs (on peut en trouver une démonstration dans [3]) :

(3.2.a) - Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est quasi-compact si, et seulement si, il est somme d'un opérateur de rang fini et d'un opérateur de rayon spectral strictement inférieur à un ([3], Th. 1.4).

(3.3.b) – Si T est quasi compact et I l'identité de $\mathcal{H}$, $\lambda I-T$ est un opérateur à indice d'indice nul pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ de module supérieur ou égal à un ([3], Th. 1.6).

On a alors, les notations étant celles du début du paragraphe :

<u>Proposition 3.1</u> : Si T et T^* sont quasi-compacts, les séries de terme général $T^k(I-M)$ et $T^{*k}(I-N)$ sont convergentes dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et on a

$$P = -I + \sum_{k=0}^{\infty} T^k(I-M) + \sum_{k=0}^{\infty} T^{*k}(I-N). \tag{3.4}$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de montrer la convergence des deux séries dans $\mathcal{L}(H)$, en effet l'opérateur P défini alors par (3.4) vérifiera

$$\begin{cases} \operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} M \cap \operatorname{Ker} N \\ P \text{ est idempotent et auto-adjoint.} \end{cases} \tag{3.5}$$

La démonstration de la convergence s'appuie sur deux lemmes.

<u>Lemme 3.2</u> : Sous les hypothèses de la proposition 3.1, on a

a) $\operatorname{Ker}(I-T) = \operatorname{Ker}(I-T^*) = \operatorname{Ker}(I-M) \cap \operatorname{Ker}(I-N)$.

b) T n'a, sur le cercle unité, pas de valeur propre autre que 1.

c) $\operatorname{Im}(I-T) = \operatorname{Im}(I-T^*) = \operatorname{Ker}(I-T)^{\perp} = \operatorname{Ker}(I-T^*)^{\perp}$.

<u>Démonstration</u> : Soit $f \in \mathcal{H}$ tel que $\|Tf\| = \|f\|$, on peut écrire :

$$\|f\| = \|MNf\| \leq \|Nf\| \leq \|f\|$$

en utilisant $\|M\| = \|N\| = 1$; on a donc

$$\|Nf\| = \|f\|,$$

ce qui, N étant un projecteur orthogonal équivaut à

$$f \in \operatorname{Ker}(I-N).$$

On en déduit, par un raisonnement analogue que

$$f \in \operatorname{Ker}(I-M).$$

Ceci montre que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{Ker}(e^{i\alpha}I-T) \subset \mathrm{Ker}(I-M) \cap \mathrm{Ker}(I-N),$$

on vérifierait de même que

$$\mathrm{Ker}(e^{i\alpha}I-T^{*}) \subset \mathrm{Ker}(I-M) \cap \mathrm{Ker}(I-N).$$

Réciproquement, si $f \in \mathrm{Ker}(I-M) \cap \mathrm{Ker}(I-N)$, on voit que

$$MNf = NMf = f,$$

ce qui achève la vérification de a) et b).

L'inclusion standard

$$\mathrm{Im}S \subset (\mathrm{Ker}\ S^{*})^{\perp}$$

permet d'écrire, compte tenu de ce qui précède

(3.6) $$\mathrm{Im}(I-T) \subset \mathrm{Ker}(I-T^{*})^{\perp} = \mathrm{Ker}(I-T)^{\perp}.$$

D'autre part I-T est d'indice nul (propriété 3.3.b) puisque T est quasi-compact. On déduit donc de (3.6) :

(3.7) $$\mathrm{Im}(I-T)^{\perp} = \mathrm{Ker}(I-T)$$

d'où, Im(I-T) étant fermée

$$\mathrm{Im}(I-T) = \mathrm{Ker}(I-T)^{\perp}.$$

Le même raisonnement pour T^{*} achève la démonstration du lemme.

Dans la suite de cette démonstration on posera

(3.8) $$\mathcal{H}_{o} = \mathrm{Im}(I-T)$$

c'est un sous-espace de Hilbert de $\mathcal{H}$.

Lemme 3.3 : Sous les hypothèses précédentes :

a) T et T^{*} sont des endomorphismes de $\mathcal{H}_{o}$.

b) Im(I-M) et Im(I-N) sont contenus dans $\mathcal{H}_{o}$.

Démonstration : a) est évident, compte tenu du lemme précédent c). Pour vérifier b), il suffit de montrer que Im(I-M) est orthogonal à Ker(I-T). Or Im(I-M) est orthogonal à Ker(I-M) qui contient (lemme 3.3 a)) Ker I-T.

Démonstration de la proposition 3.1 (suite) : Pour montrer la convergence des séries de termes généraux respectifs

$$T^k(I-M)$$

et

$$T^{*k}(I-N)$$

il suffit, compte tenu du lemme précédent, de montrer que T (resp. T^*) a un rayon spectral strictement inférieur à 1 dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_o)$. Or T (resp. T^*) est quasi-compact, il est donc somme dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, et donc dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_o)$, d'un opérateur U de rayon spectral strictement inférieur à 1 et d'un opérateur V de rang fini. Ce spectre de V est contenu dans le disque unité puisque $\|T\| = 1$, et ne comprend donc que la valeur propre 1 (lemme 3.2 b). Puisque $\mathcal{H}_o = \mathrm{Ker}(I-T)^{\perp}$ (resp. $\mathrm{Ker}(I-T^*)$), on voit que le spectre de T (resp. T^*) dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_o)$ ne rencontre pas le cercle unité. D'où le résultat.

Remarque 3.4 : On peut donner d'autres expressions de P équivalentes à (3.4), par exemple :

(3.9) $$P = (I-M) \sum_{k\geq o} T^{*k}(I-N)$$

et

(3.10) $$P = (I-N) \sum_{k\geq o} T^k(I-M).$$

4 - Projecteur orthogonal sur $L^2_Q(\Omega)$

On va d'abord montrer que les moyennes M_θ sont, en un certain sens régularisantes, puis on appliquera les résultats du paragraphe précédent.

Soit donc (θ_p) une suite d'éléments de S^{n-1} distincts.

Proposition 4.1 : Soient p,q,r trois entiers vérifiant $p\neq q$ et $q\neq r$ alors $M_{\theta_p} M_{\theta_q} M_{\theta_r}$ est un opérateur linéaire continu de $L^2(\Omega)$ dans $C^o(\overline{\Omega})$.

Démonstration : (On notera M_k au lieu de M_{θ_k} pour alléger l'écriture).

Il suffit, par application du graphe fermé, de démontrer que l'image de $L^2(\Omega)$ par $M_p\, M_q\, M_r$ est contenue dans $C^o(\overline{\Omega})$.

Soit donc $f \in L^2(\Omega)$, $M_r f$ est une fonction de $L^2(\Omega)$ ne dépendant que de la variable $\langle x,\theta_r\rangle$; on va montrer qu'elle vérifie les hypothèses du lemme 2.5.a) relativement à la moyenne M_q. Supposons $\theta_q = (0,\dots,0_1,1)$, il faut montrer que la fonction

$$\lambda \longmapsto f(\Sigma\, \alpha_i\, x_i + \alpha_n\, \lambda)$$

est continue au point λ à valeurs dans $L^1(K)$ (les notations sont celles du lemme 2.5, et on a posé $\theta_r = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$). Soit alors $(\beta_1,\dots,\beta_{n-1})$ vérifiant

$$\sum_1^{n-1} \alpha_i\, \beta_i = \alpha_n\ ,$$

désignons par τ_h, h étant un nombre réel positif, la translation de vecteurs $(\beta_1 h,\dots,\beta_{n-1}h)$, on a :

$$\|1_{\Omega_\lambda}.f(\Sigma\alpha_i x_i+\alpha_n\lambda) - 1_{\Omega_{\lambda+h}}.f(\Sigma\alpha_i x_i+\alpha_n(\lambda+h))\|_{L'(K)}$$

$$\leq \operatorname{mes}(\tau_h\ \ \Omega_{\lambda+h}\ \Delta\ \Omega_\lambda)\ \ \|f(\Sigma\alpha_i x_i+\alpha_n\lambda)\|_{L'(K)}\ ,$$

où Δ désigne la différence symétrique. D'où le résultat cherché. $M_q\, M_r\, f$ est donc une fonction continue sauf aux points où le plan tangent à $\partial\Omega$ est normal à θ_q. La continuité de $M_p\, M_q\, M_r\, f$ sur $\overline{\Omega}$ se vérifie alors facilement par un raisonnement analogue à celui du lemme 2.4 puisque $\theta_p \neq \theta_q$.

Donnons maintenant les notations suivantes : soit (θ_k) une suite dense dans $S^{n-1} \cap V(Q)$, désignons par $\mathfrak{M}_p$ le sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$ défini par

$$\mathfrak{M}_p = \{f \in L^2(\Omega)\ ;\ M_{\theta_k} f = 0,\ \ 1 \leq k \leq p\}$$

par E_p le projecteur orthogonal sur $\mathfrak{M}_p$ et par $F_p = I-E_p$ le projecteur orthogonal sur $\mathfrak{M}_p$. On remarque, en appliquant la proposition 2.2 que

(4.1) $$L^2_Q(\Omega) = \bigcap_{p\geq o} \mathfrak{M}_p.$$

On va construire de proche en proche les projecteurs E_p.

Proposition 4.2 : Pour tout p entier on pose $T_p = F_{p-1} M_p$, on a alors :

a) T_p^2 et T_p^{*2} sont compacts de $L^2(\Omega)$ dans lui-même.

(4.2) b) $E_p = -I + \sum_{k\geq o} T_p^k E_{p-1} + \sum_{k\geq o} T_p^*(I-M_p)$.

Démonstration : Compte tenu de la proposition 3.1 et de la définition des opérateurs quasi-compacts, il suffit de vérifier a). Cette vérification utilisera le lemme classique suivant.

Lemme 4.1 : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, tout opérateur continu de $L^2(\Omega)$ dans $C^o(\overline{\Omega})$ est compact de $L^2(\Omega)$ dans lui-même. Cf. [7].

On a alors :

Lemme 4.2 : Pour tout entier $k\geq 2$ on désigne par (H_k) la propriété

$$(H_k)\quad\begin{cases} (a_k) : T_k^2 \text{ et } (T_k^*)^2 \text{ sont des opérateurs continus de } L^2(\Omega) \text{ dans } C_o(\overline{\Omega}). \\ (b_k) : F_k \text{ est un opérateur continu de } C^o(\overline{\Omega}) \text{ dans lui-même.} \\ (c_k) : M_p\, F_q\, M_r \text{ est un opérateur continu de } L^2(\Omega) \text{ dans } C_o(\overline{\Omega}) \\ \text{pour } q\leq k-1,\ p\geq k,\ r\geq k. \end{cases}$$

Alors (H_k) implique (H_{k+1}).

Démonstration : On vérifie d'abord que (H_k) implique (C_{k+1}). Pour cela, il suffit de vérifier que l'image de $L^2(\Omega)$ par $M_p\, F_k\, M_r$ (p et $r\geq k+1$) est contenue dans $C^o(\overline{\Omega})$, la continuité résultant du théorème du graphe fermé. Or (a_k) implique la convergence de la série (4.2) pour p=k, on a donc

$$M_p\, F_k\, M_r = M_p\, M_k\, M_r + M_p\, F_{k-1}\, M_r - M_p\, T_k\, E_{k-1}\, M_r$$
$$- M_p\, T_k^+\, (I-M_k)\, M_r - M_p\, T_k^2\, (\sum_{s\geq o} T_k^s\, E_{k-1})\, M_r$$

$$- M_p (T_k^*)^2 \, (\sum_{s \geq 0} (T_k^*)^s \, (I-M_k)) \, M_r .$$

On étudie chacun des 6 termes du second membre, ils appartiennent à $C^o(\bar{\Omega})$:

Terme 1 : proposition 4.1.

Terme 2 : hypothèse (c_k).

Terme 3 : il peut encore s'écrire :

$$- M_p \, F_{k-1} \, M_k \, E_{k-1} \, M_r ,$$

il suffit donc ici aussi d'appliquer l'hypothèse (c_k).

Terme 4 : il s'écrit de même

$$- M_p \, M_k \, F_{k-1} \, M_r + M_p \, M_k \, F_{k-1} \, M_k \, M_r$$

et relève encore de l'hypothèse (c_k) et du lemme 2.4.

Termes 5 et 6 : la série entre parenthèses converge dans $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$ d'après (a_k), d'où le résultat par application de (a_k) encore une fois, et du lemme 2.4.

On en déduit immédiatement que (H_k) implique (a_{k+1}). En effet

$$T_{k+1}^2 = F_k \, M_{k+1} \, F_k \, M_{k+1} ,$$

il suffit donc d'appliquer (b_k) et (c_{k+1}) (raisonnement analogue pour T_k^*).

Il ne reste donc qu'à vérifier que (H_k) implique (b_{k+1}). Or on sait, (a_{k+1}) étant vérifié, que la série (4.2) converge pour $p = k+1$. Il suffit d'écrire la valeur de F_{k+1} tirée de (4.2) et d'étudier chaque terme d'une manière analogue à celle que l'on vient de voir.

On a enfin un dernier lemme dont la juxtaposition avec le lemme 4.1 terminera visiblement la démonstration de la proposition 4.2.

Lemme 4.3 : Pour tout $p \geq 1$, T_p^2 et $(T_p^*)^2$ sont continus de $L^2(\Omega)$ dans $C^o(\bar{\Omega})$.

Démonstration : Compte tenu du lemme précédent, il suffit de vérifier (H_k) pour k=2. Ce qui ne pose aucun problème:en appliquant le lemme 2.4 et la proposition 4.1 on obtient (a_2), (b_1), (c_2), qui par le raisonnement du lemme 4.2 entraînent à leur tour (b_2).

On arrive enfin au but de ce paragraphe.

Proposition 4.3 : Soit (θ_p) une suite dense dans $S^{n-1} \cap v(Q)$, soit $f \in L^2(\Omega)$, et soit (E_p) la suite de projecteurs précédemment définis

a) $(E_p f)$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers un élément que nous noterons Ef.

b) L'application

$$f \longmapsto Ef$$

est le projecteur orthogonal de $L^2(\Omega)$ sur $L^2_Q(\Omega)$.

c) On a

$$Q(D)\ Ef = Q(D)\ f.$$

Démonstration : (E_p) est une suite décroissante (pour la relation d'ordre standard sur les opérateurs hermitiens) de projecteurs orthogonaux, on sait (cf. par exemple [6] App. 2, p. 331) qu'elle converge simplement vers sa borne inférieure, c'est-à-dire vers le projecteur orthogonal sur l'intersection des espaces $\mathcal{M}_p$, d'où a) et b) puisque l'on a (4.1).

Enfin la proposition 2.3 et le développement en série (4.2) permettent de vérifier facilement, de proche en proche, que

$$Q(D)\ E_p f = Q(D)\ f$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. La suite $(E_p f)$ convergeant dans $L^2(\Omega)$ converge a fortiori dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, d'où la dernière assertion de la proposition.

Remarque 4.1 : Par analogie avec la remarque 3.4, on peut donner d'autres formes du projecteur E_p, en particulier, on a

$$E_p = (I-M_p) \sum_{k \geq o} T_p^k\ E_{p-1}. \tag{4.3}$$

5 - Applications

On va se borner au cas de l'opérateur

$$Q(D) = D_x\ Dy$$

des cordes vibrantes dans le plan. La méthode développée ici ne donne pas de résultats intéressants dans des cas plus généraux, le passage à la limite

$$\lim E_p = E$$

de la proposition 4.3 étant difficile à exploiter

Pour ce cas particulier, on utilisera les notations suivantes : pour toute $f \in H'(Q,\Omega)$ on notera v la solution de

$$(5.1) \qquad \begin{cases} Qv = f \\ v \in L^2_Q(\Omega) \end{cases}$$

et par u la solution de

$$(5.2.) \qquad \begin{cases} Pu = f \\ u \in L^2_Q(\Omega). \end{cases}$$

D'autre part, on notera $a(x)$ et $b(x)$, $a(x) \leq b(x)$, les ordonnées des points d'abscisse x de $\partial\Omega$, $c(y)$ et $d(y)$, $c(y) \leq d(y)$, les abscisses des points d'ordonnée y de $\partial\Omega$ (Ω est $Q(D)$-convexe !). Enfin pour toute fonction $w \in L^2(\Omega)$, on notera :

$$(5.3) \qquad \begin{cases} M_1\, w(x,y) = \left(\frac{1}{b(x)-a(x)} \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} w(x,t)\,dt\right) \times 1_\Omega \\ \\ M_2\, w(x,y) = \left(\frac{1}{d(y)-c(y)} \displaystyle\int_{c(y)}^{d(y)} w(s,y)\,ds\right) \times 1_\Omega \end{cases}$$

Le projecteur E sur $L^2_Q(\Omega)$ pourra donc s'écrire sous les formes :

$$(5.4) \qquad E = (I-M_1) \sum_{k \geq o} T^{*k}(I-M_2) = (I-M_2) \sum_{k \geq o} T^k(I-M_1)$$

avec $T = M_1M_2$. On désignera encore par Σ l'ensemble des points où $\partial\Omega$ est caractéristique pour Q.

Proposition 5.1 : Supposons Ω convexe, soit $f \in C^o(\bar\Omega)$, la solution v du problème (5.1) vérifie :

$$v \in C^o(\bar\Omega) \cap C^1(\bar\Omega \setminus \Sigma).$$

Démonstration : On peut trouver $w \in C^1(\bar\Omega)$ tel que

$$Qw = f,$$

il suffit pour cela de prolonger f en une fonction continue à support compact de $\mathbb{R}^2$ et de prendre pour w le produit de convolution de f avec la solution élémentaire standard de Q. On a alors en explicitant (5.4) :

$$(5.5)\qquad \begin{aligned} v = (I-M_2)(I-M_1)w + (I-M_2)T(I)M_1)x \\ + (I-M_2)T^2 \sum_{k\geq o} T^k(I-M_1)w. \end{aligned}$$

Il suffit d'appliquer le lemme 2.4, la proposition 3.1 et la proposition 4.2 pour voir que tous les termes du second membre de (5.5) sont dans $C^o(\bar{\Omega})$.

On a d'autre par

$$(5.6)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} - M_1 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{b'-a'}{b-a} M_1 w - \frac{b'}{b-a} w(x_1 b(x)) \\ + \frac{a'}{b-a} w(x,a(x)) - \frac{b'-a'}{b-a} M_1 h + \frac{b'}{b-a} hob(x) - \frac{a'}{b-a} hoa(x) \end{aligned} \right.$$

formule valable dans $\bar{\Omega}\setminus\Sigma$, obtenue par dérivation de (5.4) et où l'on a posé :

$$(5.7)\qquad h(y) = M_2 \left(\sum_{k\geq o} T^k(I-M_1)w \right).$$

On pourrait évidemment obtenir une formule analogue pour la dérivée partielle de v par rapport à y. Compte tenu de (5.6), la proposition se vérifie immédiatement.

Remarque 5.1 : La démonstration précédente donne évidemment un résultat lorsque Ω est Q(D)-convexe sans être convexe, v est toujours dans $C^o(\bar{\Omega})$ et est de classe C^1 dans l'ouvert complémentaire des bicaractéristiques issues des points caractéristiques de $\partial\Omega$ où Ω n'est pas connexe ($a'(x) = 0$ sans que $b(x) = a(x)$ et les points analogues où $b'(x) = 0$, $c'(y) = 0$, $d'(y) = 0$).

Remarque 5.2 : On peut traduire la proposition 5.1 dans le cadre du problème de Dirichlet (5.2). Il vient, compte tenu des résultats rappelés dans l'introduction $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\bar{\Omega}\setminus\Sigma)$. (resp. $u \in C^1(\bar{\Omega})$ si Ω est seulement Q(D)-convexe). En particulier on voit que les conditions aux limites correspondant au problème variationnel de Dirichlet :

$$\begin{cases} \gamma_o u = 0 \\ \tilde{\gamma}_1 u = 0 \end{cases}$$

où γ_o est la trace usuelle et $\tilde{\gamma}_1$ est la trace de la dérivée "conormale" $\frac{\partial}{\partial \tilde{v}}$ donnée, pour la paramétrage

$$t \longmapsto (x(t), y(t))$$

de $\partial\Omega$, par

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{v}} = x'(t) \frac{\partial}{\partial x} - y'(t) \frac{\partial}{\partial y} ,$$

(Cf. [1]), peuvent être prises au sens classique dès que le second membre f est continu sur $\overline{\Omega}$.

On va maintenant énoncer un lemme que nous utiliserons par la suite.

Lemme 5.1 : Soit $w \in L^2(\Omega)$ tel que $Qw = f$, soit v la solution du problème (5.1) et soit h défini par (5.7). On a :

(5.8) $$h' = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} .$$

Démonstration : Soit

$$g = \sum_{k \geq o} T^k (I-M_1)\ w.$$

On remarque immédiatement que :

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} ,$$

et que :

$$h = g-v$$

d'où (5.8).

On va, pour les propositions suivantes, se restreindre au cas où Ω est strictement convexe. Dans le cas d'un ouvert simplement $Q(D)$ convexe, certaines des propriétés ci-dessous restent valables. Donnons encore quelques notations utilisant l'hypothèse faite sur Ω. On désignera par a (resp. b) la borne inférieure (resp. supérieure) de l'ensemble

$$X = \{s \in \mathbb{R} \;;\; \Omega \cap \{x=s\} \neq \phi\}$$

et par c (resp. d) la borne inférieure (resp. supérieur) de l'ensemble

$$Y = \{t \in \mathbb{R} \;;\; \Omega \cap \{y=t\} \neq \phi\} .$$

Alors l'ensemble Σ des points caractéristiques de $\partial\Omega$ contient exactement quatre points : (a,y_0), (b,y_1), (x_0,c), (x_1,d).

La donnée d'un point (x,y) de R^2 détermine deux bicaractéristiques réelles de Q

(5.9.a) $\qquad t \longmapsto (x+t,y,1,0)$

(5.9.b) $\qquad t \longmapsto (x,y+t,0,1)$

que l'on peut donc repérer par leur projection sur $\mathbb{R}^2$. On appellera donc bicaractéristiques de Q passant par (x,y) (sans précision supplémentaire) ces projections.

On peut alors donner la définition.

<u>Définition 5.1</u> : On appelle famille de bicaractéristiques réfléchies issues d'un point de Σ, l'ensemble de tous les segments de bicaractéristique contenus dans Ω et obtenus par réflexion (au sens de [9]) à partir de l'unique bicaractéristique rencontrant $\bar{\Omega}$ passant par le point considéré.

Plus précisément, on parlera de la famille des bicaractéristiques issues d'un point de Σ obtenues par moins de p réflexions, le sens à donner à cette locution étant évident.

Enfin l'énoncé de la proposition qui suit utilisera la notation suivante :

- $\bar{\Omega}^1_p$ (resp. $\bar{\Omega}^2_p$) est le complémentaire dans $\bar{\Omega}$ de la réunion des segments de bicaractéristiques du type (5.9.a) (resp. (5.9.b)) obtenues par moins de p réflexion à partir d'un quelconque des points de Σ .

Soit alors $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, il existe visiblement $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$ telle que

$$Qw = f.$$

On a alors :

Proposition 5.2 : Soit $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$ vérifiant $Qw = f$ et v la solution du problème (5.1). Sur $\overline{\Omega}_p^2$ on a :

$$(5.10)\quad \frac{\partial^p v}{\partial x^p} = G_p(x,y) + \sum_{0\leq j\leq p-1} \alpha_{j,p}(x)\, \frac{\partial^j v}{\partial y^j}(x,a(x)) + \sum_{0\leq j\leq p-1} \beta_{j,p}(x)\, \frac{\partial^j v}{\partial y^j}(x,b(x))$$

où $G_p \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \Sigma)$ et les $\alpha_{j,p}$ et les $\beta_{j,p}$ sont C^∞ sur $\overline{\Omega}_o^2$.

$\overline{\Omega}_o^2$ désigne l'ensemble $\overline{\Omega} \setminus \{(a,y_o),(b,y_1)\}$.

Démonstration : La formule (5.10) se vérifie de proche en proche sans aucune difficulté à partir de (5.6) et (5.8).

Remarque 5.3 : On a évidemment une formule analogue pour les dérivées partielles par rapport à y.

On va énoncer maintenant des résultats concernant la propagation et la réflexion des singularités des solutions du problème (5.1), et donc du problème (5.2).

Les propositions qui suivent concernent le support singulier de v, mais, compte tenu de la forme des bicaractéristiques de Q, on pourrait les énoncer en terme du spectre singulier de v sans aucun problème.

Proposition 5.3 : Soient $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et v la solution du problème (5.1), le support singulier de v est contenu dans l'adhérence de la réunion des familles de bicaractéristiques réfléchies issues des points de Σ.

Proposition 5.4 : Soient $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, v la solution du problème (5.1) et (x,y) un point non caractéristique de $\partial\Omega$, ou bien aucune des bicaractéristiques passant par (x,y) n'est dans le support singulier de v, ou bien les deux bicaractéristiques passant par (x,y) sont dans ce support singulier.

Pour énoncer la proposition suivante, il faut faire la convention qui suit : on dira que $(x,y) \in \partial\Omega$ n'est pas dans le support singulier de v s'il existe un prolongement $\bar{v}$ de v à un voisinage de (x,y) tel que (x,y) n'appartienne pas au support singulier de $\bar{v}$.

Proposition 5.5 : Soient $f \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ et v la solution du problème (5.1) une condition nécessaire et suffisante pour que $v \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ est que Σ ne soit pas contenu dans le support singulier de v.

Les propositions (5.3), (5.4) et (5.5) sont des conséquences directes de la proposition (5.2) et de son analogue pour les dérivées partielles par rapport à y.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. AUTHIER: Problème de Dirichlet pour des opérateurs hyperboliques de type positif - Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 25 (1971) p. 691-765.

[2] M. AUTHIER- J. FRISCH : Idéaux géométriques de fonctions entières ou de polynomes réels - Séminaire d'Analyse - Département de Mathématiques de l'Université de Reims (1974).

[3] A. BRUNEL - D. REVUZ : Quelques applications probalilistes de la quasi compacité. Ann. Inst. H. Poincaré 10 (1974), p. 301-337.

[4] J. CHARARAIN : Le problème mixte hyperbolique. Sém. Bourbaki exp. 432 (1973), p. 21.

[5] J. CHAZARAIN : Propagation des singularités pour une classe d'opérateurs à caractéristiques multiples et résolubilité locale. Ann. Inst. Fourier 24 (1974), p. 203-223.

[6] J. DIXMIER: Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. Gauthier-Villars (1957).

[7] A. GROTHENDIECK : Sur les applications linéaires faiblement compactes des espaces du type C(K). Canad. J. Math 5 (1953), p. 35-64.

[8] L. HORMANDER : On the existence and regularity of solutions of linear partial differential equations. Enseigt Math 17 (1971), p. 99-163.

[9] L. NIRENBERG : Lectures in partial differential equations. Reg. Conf. Ser. in Math n° 17 A.M.S. (1973).

[10] F. TREVES : Linear partial differential equations with constant coefficients. Gordon and Breach (1966).

[11] K. YOSIDA : Quasi completely continuons linear functional operators. Jap. J. Math 15 (1939), p. 297-301.