JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

SERGE ALINHAC

Diffusion des singularités à travers une surface pour un opérateur hyperbolique

Journées Équations aux dérivées partielles (1976), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1976____A1_0>

DIFFUSION DES SINGULARITES A TRAVERS UNE SURFACE POUR UN OPERATEUR HYPERBOLIQUE.

par

S. ALINHAC

INTRODUCTION.

Cet article étudie la propagation des singularités pour un modèle d'opérateur à caractéristiques doubles, du type $P_+P_- +$ reste, avec $\{P_+,P_-\} \neq o$ sur la variété caractéristique $P_+ = P_- = o$ (de codimension 2). Les résultats présentés affinent, de façon quantitative (ordre des opérateurs), les résultats généraux établis en [2].

En supposant que les caractéristiques sont simples pour $t \neq o$, on montre comment une singularité "pure" (mettons, de P_-) pour $t > o$ "diffuse" pour $t < o$ en deux singularités : une de P_-, qui "fait suite" à la singularité pour $t > o$, comme dans le cas de caractéristiques simples, et une de P_+, qui peut être éventuellement absente (cas d'un produit) ou atténuée.

Bien que ce travail soit prolongation de [1] et [2], on a fait une exposition auto-contenue, redémontrant en particulier le théorème de [2].

I) Position du problème ; étude d'un cas particulier.

On étudie, dans le plan $\mathbb{R}^2$ de point courant (x,t), l'opérateur $P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - t^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a(t) \frac{\partial}{\partial x}$. On notera $P_{\pm} = \frac{\partial}{\partial t} \pm t \frac{\partial}{\partial x}$. Bien qu'on construise dans la partie II une parametrix du problème de Cauchy sur $t = 0$ associé à P, on s'intéresse ici plus particulièrement au problème suivant, que nous nommons "diffusion" des singularités à travers $t = 0$: étant donnée une solution u de $Pu = 0$ qui, pour $t > 0$, n'a de singularités que dans les caractéristiques de P_-, quelles sont les singularités de u pour $t < 0$?

Pour préparer l'étude générale de II, supposons d'abord $a = \text{cte}$. On a alors la :

Proposition 1 : Soit $P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + a \frac{\partial}{\partial x}$. Supposons que $a = -(2k+1)$ (k entier ≥ 0).
Alors une singularité "pure" P_- pour $t > o$ demeure "pure" P_- pour $t < 0$ (la partie II montre d'ailleurs que c'est le seul cas).

Preuve. Supposons d'abord $a = -1$. Alors $P = P_+P_-$, et si $Pu = P_+P_-u = 0$, P_-u est C^∞ pour $t > 0$, donc aussi pour tout t. La singularité de u se transmet donc de $t > 0$ à $t < 0$ le long de la caractéristique simple de P_-.

.Soit maintenant $a = -(2k + 1)$. Comme $[P_+, P_-] = -2\frac{\partial}{\partial x}$,

$P_+P_-P_- = P_-(P_+P_- - 2\frac{\partial}{\partial x})$, et $P_+P_-^{k+1} = P_-^k \ P$. Si $Pu = 0$, $P_+P_-^{k+1} \ u = 0$, donc P_-^{k+1} u est C^∞ pour tout t, et WF(u) $\subset$ car P_{-1} pour tout t.

II) Le cas général.

Le théorème ci-dessous est un résumé des résultats établis aux point 1) $\longrightarrow$ 3). La partie A reprend les résultats généraux de [2], tandis que la partie B précise quantitativement la "diffusion ".

Théorème.

Soit $P = \frac{\partial}{\partial t^2} - t^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a(t) \frac{\partial}{\partial x}$, *où* $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, $a(o)$ *réel.*

A] *Il existe des opérateurs* $E_{\pm} : \varepsilon'_{+1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$
(ε'_{+1} *désigne l'espace des distributions* u *à support compact avec* $WF(u) \subset \{\xi > o\}$)
tels que :

i) $P E_{\pm} = 0$, *modulo* C^∞.

ii) Pour tout $t_0 > o$, $E_{\pm}$, *restreint à* $t > t_0$, *s'écrit (modulo un opérateur régularisant dépendant de* t *) comme un opérateur intégral de Fourier dont la lagrangienne est décrite par la phase* $\varphi_{\mp} = (x-y)\,\xi \mp \frac{t^2}{2}\,\xi$, *et d'ordre* $m_{\pm}$, *avec :*

$$m_\pm = -\tfrac{1}{2} \pm \frac{\mathrm{Re}\, a(o)}{4}\,.$$

iii) E_+ *et* E_- *sont des solutions "indépendantes" dans le noyau de* P *en ce sens qu'il existe des opérateurs* $\sigma_\pm\,(D_x)$*, d'ordre* 0*, et* $\mu_\pm\,(D_x)$ *d'ordre* $-\tfrac{1}{2}$*, tels que :*

$$\begin{cases} E_+\sigma_+ + E_-\,\sigma_-\big|_{t=o} = id \quad , \quad (E_+\sigma_+ + E_-\sigma_-)'_t\big|_{t=o} = 0 \\ E_+\mu_+ + E_-\,\mu_-\big|_{t=o} = 0 \quad , \quad (E_+\mu_+ + E_-\mu_-)'_t\big|_{t=o} = id\,. \end{cases}$$

iv) $E_\pm$ *propagent "effectivement" les singularités, c'est-à-dire que si* $(x_0, +1) \in WF(v)$ *toute la partie de l'axe de bicaractéristique de* $P_\pm$ *issu de* $(x_0\,,\, o,\, +1, o)$ *au-dessus de* $t > o$ *est contenue dans* $WF(E_\pm\, v)$.

B] *Soient* $\bar{E}_\pm$ *les opérateurs obtenus en appliquant la partie* A] *du théorème pour* $t < o$*. Il existe des opérateurs* $A(D_x)$ *et* $B(D_x)$*, d'ordre zéro, tels que si* $\mathcal{V} \in \varepsilon'_+(\mathbb{R})$,

$$E_-\mathcal{V} = \bar{E}_-\, A\mathcal{V} + \bar{E}_+\, B\mathcal{V} \text{ pour } t \leq o.$$

L'opérateur A *est elliptique d'ordre zéro.*

i) Si $a(o)$ *n'est pas un entier impair négatif,* B *est elliptique d'ordre* 0.

ii) Si $a(t) = -(2p+1) + O(t^k)$ *(pour un entier* $p \geq o$*, et* $k \geq 1$*), est un opérateur d'ordre* $-\ell$ *pourvu que* $2\ell + 1 \leq k$.

Dans les points 1) ⟶ 3) qui suivent, on fournit une preuve complète de A] et B] , en passant assez vite sur les points techniques, qu'on trouvera "tels quels" dans [2] .

1) Réduction asymptotique de l'opérateur P.

C'est un cas particulier de celle de [1], que nous précisons rapidement :

Proposition 1 : Soit

$$P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - t^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a(t)\frac{\partial}{\partial x} .$$

Il existe des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0, tangentiels, $c(t,D_x)$ et $d(t,D_x)$, $c(0,D_x)$ elliptique, et un opérateur d'ordre 1, $\Pi(D_x)=ia(o)\,D_x+\Pi_0(D_x)+\Pi_{-1}+\ldots$, tels que si $\mathcal{V}$ est solution de l'équation

$$Q\,\mathcal{V} = (\frac{\partial^2}{\partial t^2}-t^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Pi\,(D_x))\,\mathcal{V} = 0, \text{ alors}$$

$\mathcal{U} = c\mathcal{V} + d|D_x|^{-1}\,\mathcal{V}'_t$ est solution de $P\mathcal{U} = 0$ (modulo C^∞).

De plus, si $a(t)= a(o) + O(t^k)$ (k entier ≥ 1), on peut choisir $\Pi_{-\ell+1}= 0$ tant que $2\ell + 1 \leq k$ ($\ell \geq 1$).

Preuve : Pour alléger l'écriture, on travaille après transformée de Fourier en x :

$$\mathcal{U} = c(t,\xi)\,\mathcal{V}(t,\xi) + \frac{d(t,\xi)}{\rho}\;\mathcal{V}'_t\,(t,\xi) ,$$

et $\mathcal{V}''_{tt} + (t^2\xi^2 + \Pi(\xi))\,\mathcal{V} = 0$. Alors

$$\mathcal{U}'' + (ia\xi + t^2\xi^2)\,\mathcal{U} = \mathcal{V}(c'' - c(\Pi - ia\,\xi) - 2t^2\rho d' - 2t\rho d - 2\frac{\Pi}{\rho}d')$$

$+\mathcal{V}'(\frac{d''}{\rho} + 2c' - \frac{d}{\rho}(\Pi - ia\,\xi))$. On choisit $c = c_0 + c_{-1} + \ldots .$, $d= d_0 + d_{-1} + \ldots$ et $\Pi = \Pi_1 + \Pi_0 + \ldots$ de façon que les coefficients de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ soient des symboles d'ordre $-\infty$.

On a d'abord : $\begin{cases} 2t^2\,d'_0 + 2t\,d_0\,c_0\,(\frac{\Pi_1}{\rho} - i\,\frac{a\xi}{\rho}) = 0 \\ 2c'_0 - d_0\,(\frac{\Pi_1}{\rho} - ia\,\frac{\xi}{\rho}) = 0 \end{cases}$

puis généralement, pour calculer c_{-p} et d_{-p}, le même système d'équations avec des seconds membres f_{-p} et g_{-p} (respectivement)

$$\rho\,f_{-p} = -c''_{-p+1} + \frac{2}{\rho}(\Pi_1\,d'_{-p+1} + \Pi_0\,d'_{-p+2} + \ldots + \Pi_{-p+2}\,d'_0) + (\Pi_0\,c_{-p+1} + \ldots + \Pi_{-p+1}\,c_0)$$

$$\rho\,g_{-p} = -\,d''_{-p+1} + \frac{1}{\rho}(\Pi_0 d_{-p+1} + \ldots + \Pi_{-p+1}\,d_0).$$

En omettant provisoirement les indices -p, on pose td = u : le système devient (avec $A = \frac{\Pi_1 - ia\,\xi}{\rho}$)

$\left\{ 2u' + \frac{A}{t}\,c = f/t \right.$, $2\,c' - \frac{A}{t}\,u = g$. Si $w_\varepsilon = c + i\varepsilon\,u$, on obtient :

$$2w'_\varepsilon + i\,\varepsilon\,\frac{A}{t}\,w_\varepsilon = g + i\,\varepsilon\,f/t \qquad (\;\xi = \pm 1)$$

On choisit désormais Π_1 en sorte que $A(o) = o(\,\Pi_1 = ia(o)\,\xi)$.

Alors $w_\varepsilon = C \exp\left(-i \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \left(\frac{A}{s}\right) ds\right)$, où

$C' = (g+i\varepsilon\, f/t) \exp\left(+i \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \left(\frac{A}{s}\right) ds\right)$, est une solution de l'équation.

. Pour f=g=0 (calcul de c_0, d_0), pn prend c=1, et

$$C_0 = \frac{W_+ + W_-}{2} = \cos \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{A}{s}\right) ds, \quad d_0 = \frac{-1}{t} \sin \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{A}{s}\right) ds.$$

. Sinon, on choisit C(0) = 0, étant entendu qu'on choisit Π_{-p+1} (calcul de C_{-p1}, d_{-p}) en sorte que $f_{-p}(0) = 0$, ce qui est loisible car $C_0(0) = 1$. Cela assure que d_{-p} est régulière.

Précisons le cas $a(t) = a(o) + O(t^k)$: $\frac{A}{t} = O(t^{k-1})$, donc $c_o' = O(t^{2k-1})$, $u_0' = O(t^{k-1})$

Si $k \geq 3$, $f_{-1}(o) = 0$ avec le choix $\Pi_o = 0$. On a alors $g_{-1} \pm i \frac{f-1}{t} = O(t^{k-3})$. De même, si $g_{-p} \pm \frac{f-p}{t} = O(t^\ell)$ et $\Pi_o = \dots = \Pi_{-p+1} = 0$, $C_{-p} = O(t^{\ell+1})$, $u_{-p} = O(t^{\ell+1})$, donc $f_{-p-1} = -c''_{-p} + \frac{2}{\rho}\Pi_1\, d'_{-p} + \Pi_{-p} C_o = \Pi_{-p} C_o + O(t^{\ell-1})$. On peut prendre $\Pi_{-p}=0$ si $\ell \geq 2$, d'où l'assertion de la proposition 1.

2) <u>Forme de la solution pour t > 0.</u>

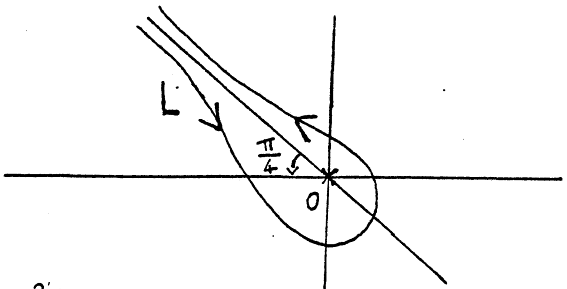
Posons T = t, X = x+ $t^2/2$. L'opérateur Q devient $Q = \partial_T^2 + 2T\frac{\partial^2}{\partial X \partial T} + \frac{\partial}{\partial X} + \Pi(D_X)$.

Après transforation de Fourier, et "stretching" $s = T|\xi|^{1/2}$, on aboutit à l'équation $q''_{ss} + 2isq'_s \frac{\xi}{\rho} + \frac{i\xi + \Pi(\xi)}{\rho} q = 0$. Comme on ne s'intéresse ici qu'aux singularités pour lesquelles $\omega = +1$ ($\xi = \rho$), on est amené à chercher

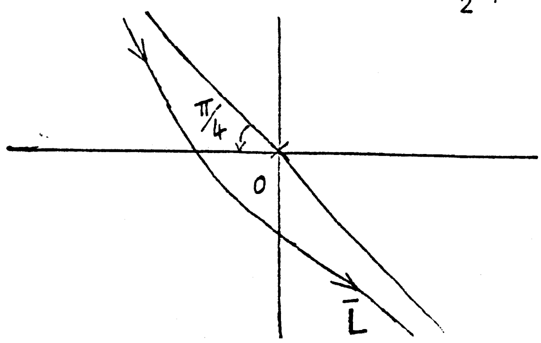
a) une base de solutions pour l'équation $q'' + 2isq' + \mu q = 0$. (ici, $\mu = i + \frac{\Pi(\xi)}{\xi}$).

On obtient ces solutions par la méthode de Laplace, respectivement

$q(s) = \int_L e^{sz} e^{-iz^2/4} z^\lambda dz$, avec $\lambda = -1-i/_2\, \mu$, et L un contour complexe de la forme :



et $\bar{q}(s) = \int_{\bar{L}} e^{sz} e^{-iz^2/4} z^\lambda dz$, avec $\lambda = -1 - i/_2\, \mu$, et $\bar{L}$ le contour



Etudions le comportement de ces solutions lorsque $s \longrightarrow +\infty$:

. Si Re $\lambda > -1$, $q(s) = 2ie^{3i\frac{\Pi}{4}} e^{-\frac{\Pi}{4}\lambda} \sin \Pi\lambda \; \tilde{I}_\lambda(s)$, où $\tilde{I}_\lambda(s) = \int_0^{+\infty} e^{ste} e^{3i\frac{\Pi}{4}} e^{-t^2/4} t^\lambda \, dt$.

En posant $s\,t = \sqrt{2}\alpha$, $\tilde{I}_\lambda(s) = (\frac{\sqrt{2}}{s})^{\lambda+1} \int_0^{+\infty} e^{(i-1)\alpha} e^{-\frac{\alpha^2}{2s^2}} \alpha^\lambda \, d\alpha$, la dernière intégrale écrite tend clairement vers une constante non nulle quand $s \longrightarrow +\infty$.

Donc $q(s) \sim cte \frac{1}{s^{\lambda+1}}$ et on "gagne un cran" de comportement en s par dérivation de q : $q'(s) \sim cte \frac{1}{s^{\lambda+2}}$, etc (on dit que q se comporte "comme" $\frac{1}{s^{\lambda+1}}$).

Si Re$\lambda < -1$, la formule $\frac{\lambda}{s} q_{\lambda-1}(s) = \frac{i}{2s} q_{\lambda+1}(s) - q_\lambda(s)$ permet d'étendre le résultat précédent.

. En prenant pour $\bar{L}$ la droite d'équation $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = -1$ et en observant que

$\bar{q}(s) = \int_{\bar{L}} e^{s^2} e^{-is^2 \varphi^2/4} s^{\lambda+1} \varphi^\lambda d\varphi$; il vient

$\bar{q}(s) = s^{\lambda+1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-is^2} e^{-s^2\frac{2x^2}{2}} (x(1-i) - 2i)^\lambda \, dx \, (1-i)$. En posant

$x = t/s$, $\bar{q}(s) = e^{-is^2} s^\lambda (1-i) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \left(\frac{t(1-i)}{s} - 2i\right)^\lambda dt$, et le coefficient de e^{-is^2} dans l'expression de $\bar{q}$ se comporte "comme" s^λ. On note $\bar{q}(s) = e^{-is^2} \bar{\bar{q}}(s)$.

De ces comportements, on déduit en particulier que q et $\bar{q}$ sont des solutions indépendantes (si λ entier ≥ 0, on doit remplacer q par $\tilde{I}_\lambda$).

b) En retournant aux coordonnés d'origine, on obtient que, si v et W n'ont de singularités que pour $\xi = \rho$,

$\tilde{E}_- v = \int e^{ix\xi + it^2/2\xi} q(t|\xi|^{1/2}, \xi) \hat{\mathcal{V}}(\xi) d\xi$ et $\tilde{E}_+ W = \int e^{ix\xi - t^2/2\xi} \bar{\bar{q}}(t|\xi|^{1/2}, \xi) \hat{W}(\xi) \, d\xi$

Sont des solutions de $QE_{\pm} = 0$.

Observons que pour $t \geq 0$, les fonctions $q(t|\xi|^{1/2})$ et $\bar{\bar{q}}(t|\xi|^{1/2})$ se comportent comme des symboles (1/2 , 1/2) (pour plus de précisions, voir Boutet de Monvel [3]).

. Pour $t_0 > 0$ fixé, q et $\bar{\bar{q}}$ restreints à $t > t_0$ sont des symboles classiques (1,0) d'ordres respectifs exactement

$m_- = -\frac{\text{Re } \lambda(\infty)+1}{2}$, $m_+ = \frac{\text{Re } \lambda(\infty)}{2}$, où $\lambda(\infty) = \lim_{\xi \longrightarrow +\infty} \lambda(\xi)$

$= -1 - {}^{i}/_{2} \; \mu(\infty) = -1 - i/2 \; i(1 + a(o)) = -1 + \frac{a(o)+1}{2} = \frac{a(o)-1}{2}$

Les solutions $\tilde{E}_- v$ et $\tilde{E}_+ W$ ont leurs fronts d'onde contenus dans les bicaractéristiques respectivement de P_- et P_+ issues des singularités des données v et W.

. D'autre part, si $(x_\circ, +1) \in WF(\mathcal{V})$, alors tout l'arc de bicaractéristique de P_- issu de $(x_\circ, 0, +1, 0)$ au-dessus de $t>0$ est dans le front d'onde de $\tilde{E}_-\mathcal{V}$ (de même pour $\tilde{E}_+$). En effet,

$$\tilde{E}_-\mathcal{V}\Big|_{t=0} = q(o,D_x)\mathcal{V}, \quad (\tilde{E}_-\mathcal{V})'_t\Big|_{t=0} = q'_s\,(o,D_x)\ \ |D_x|^{1/2}\ \mathcal{V}\ ;$$

comme la solution q n'est pas indentiquement nulle, l'un au moins des deux opérateurs q ou q'_s est elliptique, et donc l'une des traces de $\tilde{E}_-\mathcal{V}$ est singulière en $(x_\circ, +1)$. Or l'on sait [1] que, dans ces conditions, l'un au moins des deux arcs issus de $(x_\circ, 0, +1, 0)$ pour P_- et P_+, pour $t > 0$, est contenu dans le front d'onde de $\tilde{E}_-\ \mathcal{V}$. D'après le point précédent, ce ne peut être que celui de P_-.

Enfin, il est facile d'établir, compte tenu de ce que les solutions q et $\bar{q}$ sont indépendantes, que toute solution U de $QU = 0$ dont les traces n'ont de singularités que du type $(x_\circ, +1)$ s'écrit, pour $t > 0$, $U = \tilde{E}_-\mathcal{V} + \tilde{E}_+ W$, pour certaines $\mathcal{V}$ et W.

3) Forme de la solution pour $t < 0$.

a) Comportement de $q(s)$ lorsque $s \longrightarrow -\infty$.

Posons $s = -\sigma$, $\sigma > 0$. La fonction $q(-\sigma)$ est encore une solution de l'équation 2.a : $q'' + 2i\,\sigma q' + \mu q = 0$. Elle s'écrit donc $q(-\sigma) = Aq(\sigma) + B\,\bar{q}(\sigma)$, où A et B sont des pseudo-différentiels d'ordre 0 à déterminer. On a, en posant

$\delta = q'(0)\,\bar{q}(0) - q(0)\,\bar{q}'(0)$ (elliptique), $A\,\delta = -(q(0)\,\bar{q}'(0) + q'(0)\bar{q}(0))$, et $B\,\delta = 2q(0)\,q'(o)$.

Pour étudier l'ellipticité de A et B, on suppose que dans les expressions qui définissent q et $\bar{q}$, λ a la valeur $\lambda(\infty)$, et l'on étudie la nullité des valeurs résultantes pour A et B.

. Commençons par B ; comme $q'_\lambda(0) = q_{\lambda+1}(0)$, on étudie $q_\nu(0)$. Si $\mathrm{Re}\nu > -1$, $q_\nu(0) = 2\,ie^{3\frac{i\pi}{4}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}\nu}\,(\sin \pi\nu)\int_0^{+\infty} e^{-t^2/4}t^\nu\,dt$, et la dernière intégrale écrite qui vaut $2^\nu\Gamma\,(\frac{\nu+1}{2})$, n'est jamais nulle. Les seules valeurs pour lesquelles $q_\nu(0) = 0$ sont ν entier ≥ 0.

Si $\mathrm{Re}\nu \leq -1$, $\nu q_{\nu-1}(0) = \frac{i}{2}q_{\nu+1}(0)$, donc $q_\nu(0)$ ne peut être nulle que si ν entier.

Si $\nu = -k$, k entier ≥ 1, $q_{-k}(0) = 2\pi\,i\ \mathrm{Res}_\circ\,(z^{-k}\,e^{-i\,z^2/4})$: $q_{-k}(0)=0 \iff$ k pair

Si maintenant $\lambda(\infty)$ est un entier ≥ 0, on a pris en fait $\tilde{I}_\lambda$ en place de q, et alors $B \neq 0$.

Si λ est entier pair ≤ -1, $q_\lambda(0) = 0$, et si λ est entier impair ≤ -1, $q'_\lambda(0) = 0$

En résumé, B elliptique $\Longleftrightarrow \lambda \neq$ (entier ≤ -1)

. Voyons A. On a, si $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$, $\bar{q}_\lambda(0) = 2\,i\,e^{-3i\frac{\pi}{4}(\lambda+1)} \sin\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\,\tilde{I}_{\lambda+1}(0)$

On a alors, à un facteur non nul près,

$$q_\lambda(0)\,q_\lambda^{-1}(0)\,q_\lambda^1(0)\bar{q}_\lambda(0) = (\sin\pi\tfrac{\lambda}{2})\,\tilde{I}_\lambda(0)\,\tilde{I}_{\lambda+2}(0) - ie^{-i\frac{\pi}{4}}\cos\frac{\pi\lambda}{2}\,\tilde{I}^2_{\lambda+1}(0).$$

Pour λ réel (ce que l'on a supposé pour simplifier, mais qui ne joue vraisemblablement aucun rôle), les $\tilde{I}_\lambda(0)$ sont réels, et le nombre écrit ne peut être nul.

Si $\mathrm{Re}\lambda \leq -1$, on a comme plus haut $q_{\lambda-1}(0)^{-1}\,q_{\lambda-1}(0) + q'_{\lambda-1}(0)\,\bar{q}_{\lambda-1}(0) =$

$$\frac{i}{2\lambda}\left(q_\lambda(0)\,\bar{q}'_\lambda(0) + q'_\lambda(0)\,\bar{q}_\lambda(0)\right)$$

Donc A ne peut être nul que si λ entier ≤ -1. Mais ce cas est l'un de ceux où $B = 0$, et si par exemple $q(0) = 0$, nécessairement $q'(0) \neq 0$ (car $q \not\equiv 0$) et $\bar{q}(0) \neq 0$ (car $\delta \neq 0$) donc A n'est jamais nul.

b) Ordre du symbole lorsque $\lambda(\infty) =$ (entier ≤ -1).

Supposons $\lambda(\xi) = -2p + h(\xi)$, h symbole d'ordre $-r$, $r \geq 1$.

Alors grâce à cette formule, $\lambda q_{\lambda-1}(0) = i/2\, q_{\lambda+1}(0)$, il vient $q_\lambda(0) = \dfrac{(i/2)^p\, q_h(0)}{(h-1)\dots(h+1-2p)}$

et comme h est petit, $\mathrm{Re}\, h > -1$,

$q_h(0) = (\sin\pi h) \times$ (symbole elliptique d'ordre 0). Donc $q_h(0)$ est un symbole d'ordre $-r$, et $q_\lambda(0)$ aussi, donc B aussi.

Si $\lambda = -(2p+1) + h$, $q'_\lambda(0) = q_{\lambda+1}(0)$, même conclusion.

Comme $\lambda(\infty) = \dfrac{a(0) - 1}{2}$, cette situation se produit pour $a(0) = 1 - 2k$, $k \geq 1$, c'est-à-dire <u>a(0) entier impair négatif</u>.

Si alors $\pi(\xi) = i\,a(0)\xi + \pi_{-\ell}(\xi) + \dots$, π_{-e} <u>elliptique</u>, alors h est elliptique d'ordre $-\ell$, et B aussi.

c) En application de la proposition 1, on pose :

$E_\pm = C\,\tilde{E}_\pm + d\,|D_x|^{-1}\,(\tilde{E}_\pm)'_t$, obtenant ainsi des opérateurs vérifiant la partie A] du théorème. Les opérateurs $\bar{E}_\pm = (c + d\,|D_x|^{-1}\frac{\partial}{\partial t})\,(\tilde{E}_\pm(-t))$

Sont, modulo un opérateur elliptique d'ordre 0, les opérateurs qu'on obtient en appliquant à P la partie $\bar{A}$] du théorème pour le demi-plan $t < 0$.

De la formule $\tilde{E}_-\mathcal{V}(x,t) = (\tilde{E}_-A(D_x)\mathcal{V})(x,-t) + (\tilde{E}_+\,B(D_x)\mathcal{V})(x,-t)$ valable pour $t < 0$, qu'on vient d'établir en b), on déduit

$$E_-\mathcal{V}\big|_{t<0} = \bar{E}_-\,A\,(D_x)\,\mathcal{V} + \bar{E}_+\,B\,(D_x)\,\mathcal{V}.$$

B I B L I O G R A P H I E

[1] Alinhac S. Parametrix et propagation des singularités pour un problème de Cauchy à multiplicité varaible.
Astérisque n° 19, 1976

[2] Alinhac S. Parametrix pour un système hyperbolique à multiplicité variable. Comm. in P.D.E., 2, 1977.

[3] Boutet de Monvel L. Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo differential operators.
C.P.A.M. 27, 1974

ALINHAC Serge
44, rue Clément Perrot
94400 VITRY