

MOHANE MOUSSAOUI

**Régularité de la solution d'un problème à dérivée oblique pour  
l'opérateur de Laplace dans un polygone plan**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1976), p. 1-11

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1976\\_\\_\\_A11\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1976___A11_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

REGULARITE DE LA SOLUTION D'UN PROBLEME A DERIVEE OBLIQUE,  
POUR L'OPERATEUR DE LAPLACE, DANS UN POLYGONE PLAN

par

MOUSSAOUI

IMSP - Faculté des Sciences  
Parc Valrose - NICE

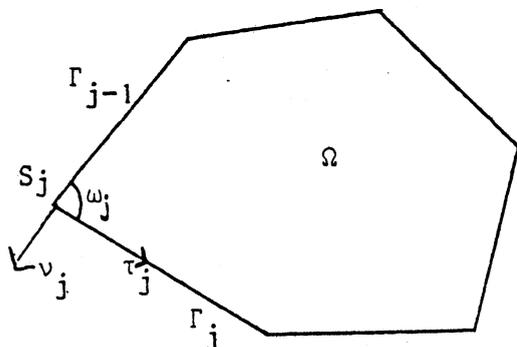
0. INTRODUCTION.

Pour fixer les idées, nous commençons par introduire les notations suivantes :  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , borné, de frontière  $\Gamma$  polygonale ;  $\Gamma$  sera donc la réunion d'un nombre fini de segments linéaires  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . On supposera  $\Omega$  d'un seul côté de sa frontière  $\Gamma$ .

$S_j$  désignera l'origine de  $\Gamma_j$ ,  $\Gamma (= \cup \overline{\Gamma_j})$  étant orientée dans le sens direct.

$\omega_j$  désignera la mesure de l'angle formé par  $\Gamma_{j-1}$  et  $\Gamma_j$ , vers l'intérieur de  $\Omega$ .

On notera  $\nu_j$  la normale à  $\Gamma_j$  orientée vers l'extérieur de  $\Omega$  et  $\tau_j$  le vecteur unitaire tangent à  $\Gamma_j$  et orienté dans le sens de  $\Gamma_j$ .



Le problème que l'on se propose d'étudier alors est celui de l'existence, unicité et régularité d'une solution du problème :

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f \\ \frac{\partial u}{\partial X_j} \Big|_{\Gamma_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

où  $f$  est donnée, par exemple, dans  $L^2(\Omega)$  et  $X_j$  est un vecteur unitaire quelconque.

Lorsque  $X_j = \tau_j$  ou  $\nu_j$   $j = 1, 2, \dots, N$  ; on se ramène à un problème de Neumann, de Dirichlet ou à un problème mêlé. Ces problèmes ont été étudiés par divers auteurs et entre autres dans Grisvard [2] où tous les résultats sont regroupés.

Les difficultés qui apparaissent, lorsque les vecteurs  $X_j$  sont quelconques, sont de plusieurs ordres.

\* La méthode variationnelle classique ne donne pas de résultat en général. En effet, posons

$$D = \{j \in [1, 2, \dots, N] ; X_j = \tau_j\}.$$

Posons  $V = \{u \in H^1(\Omega) ; u|_{\Gamma_j} = 0\}$ , où  $H^s(\Omega)$  désigne l'espace de Sobolev usuel.

Si  $X_j \neq \tau_j$  alors il est de la forme  $a_j \nu_j + b_j \tau_j$ ,  $a_j \neq 0$ . La forme habituelle qui donne le résultat quand  $\Omega$  est régulier (cf. Lions [4])

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dX + \sum_{j \notin D} \alpha_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u}{\partial \tau_j} v \, d\sigma$$

avec  $\alpha_j = \frac{b_j}{a_j}$  n'est pas continue sur  $V \times V$  muni de la norme de  $H^1(\Omega)$ . En effet

$\frac{\partial u}{\partial \tau_j} \Big|_{\Gamma_j}$  et  $v|_{\Gamma_j}$  sont respectivement dans  $H^{-1/2}(\Gamma_j)$  et  $H^{1/2}(\Gamma_j)$ , espaces qui

ne sont pas en dualité.

\* La formule de Green n'est pas valable également pour des raisons analogues aux précédentes et l'adjoint d'un tel problème (et même du problème de Neumann) ne sont pas tout à fait des problèmes aux limites. cf. Grisvard [2].

Il est cependant possible, en utilisant la méthode de projection indiquée dans Lions [5] de montrer que le problème admet une solution dans  $H^1(\Omega)$  mais la méthode ne donne pas l'unicité.

En effet appelons  $W = V \cap \{u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) ; u(S_j) = 0 \quad j = 1, \dots, N\}$   
 et 
$$b(u,v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + uv) + \sum_{j \notin D} \frac{\alpha_j}{2} \int_{\Gamma_j} \left( \frac{\partial u}{\partial \tau_j} v - \frac{\partial v}{\partial \tau_j} u \right) d\sigma .$$

Cette forme est bilinéaire, continue sur  $V$  pour  $v$  fixé dans  $W$  et coercitive sur  $W \times W$  muni de la norme induite par  $V$  puisque

$$b(v,v) = \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 .$$

Ainsi on a pour toute  $f$  dans  $L^2(\Omega)$  il existe  $u \in V$  solution de

$$b(u,v) = \int_{\Omega} f \cdot v \, dX \quad \forall v \in W .$$

Il est facile de vérifier que  $u$ , ainsi obtenue, est solution de  $P$ .

L'idée que nous utiliserons, dans les cas que nous traiterons ici, est de considérer certains parmi ces problèmes qui sont à indice.

Nous exposons ici deux cas simples, le cas général sera publié ultérieurement.

### I. ESTIMATION A PRIORI.

L'idée est de faire une homotopie du problème donné (P) sur un problème dont on connaît l'indice. Ceci nous amène à considérer le problème complètement non homogène

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial X_j} |_{\Gamma_j} = h_j \quad j = 1 \dots N \end{cases}$$

où les fonctions  $h_j$  sont données dans  $H^{1/2}(\Gamma_j)$ . Nous aurons besoin du

THEOREME 1.1. On suppose qu'il existe  $j$ ,  $1 \leq j \leq N$  tel que  $X_j \neq \tau_j$ ,

et que,  $\forall j$ ,  $X_j \neq \pm X_{j+1}$  ( $X_{N+1} = X_1$ ) alors l'application :

$$\begin{aligned} T : H^2(\Omega) &\longrightarrow \prod_{j=1}^N H^{1/2}(\Gamma_j) \\ u &\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial X_j} |_{\Gamma_j} \quad j = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

est linéaire, continue surjective et admet un relèvement linéaire continu.

Ce théorème est une conséquence du théorème [7.2] de Grisvard [3].

Remarque 1.1. Si  $X_j = \tau_j \quad \forall j$ , et étant donné  $h_j \in H^{1/2}(\Gamma_j) \quad j = 1, 2, \dots, N$ , il existe  $u \in H^2(\Omega)$  telle que  $\frac{\partial u}{\partial \tau_j} = h_j$  sur  $\Gamma_j$  si et seulement si

$$\sum_j \int_{\Gamma_j} h_j \, d\sigma = 0.$$

Remarque 1.2. Si  $X_j = \pm X_{j+1}$  pour un  $j \in [1, \dots, N]$ , le relèvement n'est possible que si  $h_j$  et  $h_{j+1}$  vérifient une condition intégrale qui définit un sous-espace non fermé de  $\prod_{j=1}^N H^{1/2}(\sigma_j)$ . Ceci nous amène à l'hypothèse

$$H(X_1, X_2, \dots, X_N) : X_j \neq X_{j+1} \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Nous avons alors la

PROPOSITION 1.2. On suppose  $H(X_1, \dots, X_N)$  vérifiée. Alors pour tout

$$u \in H_S^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) ; u(S_j) = 0, j = 1 \dots N\}$$

on a

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C(X_1, \dots, X_N) (\|\Delta u - u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial X_j} \right\|_{H^{1/2}(\Gamma_j)}^2)$$

où  $C(X_1, \dots, X_N)$  est indépendante de  $u$ .

Ceci implique en particulier que l'image de l'opérateur

$(-\Delta + 1, \frac{\partial}{\partial X_j}, j = 1 \dots N)$  est fermée dans

$$E = L^2(\Omega) \times \prod_{j=1}^N H^{1/2}(\Gamma_j) .$$

De plus, on ne peut pas avoir une telle estimation si  $X_j = X_{j+1}$  d'après la remarque 1.2.

Preuve de la proposition 1.2.

Grâce au théorème 1.1, il existe  $v \in H_S^2(\Omega)$  telle que

$$\frac{\partial v}{\partial X_j} = \frac{\partial u}{\partial X_j} \text{ sur } \Gamma_j, j = 1 \dots N \text{ avec}$$

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C_1(X_1, \dots, X_N) \sum_{j=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial X_j} \right\|_{H^{1/2}(\Gamma_j)}$$

soit alors :  $w = u - v$

$w \in H_S^2(\Omega)$  et vérifie  $\frac{\partial w}{\partial X_j} = 0, j = 1, \dots, N.$

$\frac{\partial w}{\partial X_j} = 0$  s'exprime soit par  $w = 0$  sur  $\Gamma_j$  si  $X_j = \tau_j$ ,  
soit par  $\frac{\partial w}{\partial v_j} = \alpha_j \frac{\partial w}{\partial \tau_j}$  si  $X_j \neq \tau_j$ .

Effectuant le carré scalaire  $(-\Delta w + w, -\Delta w + w)$  il vient :

$$\begin{aligned} \|-\Delta w + w\|_0^2 &= \|\Delta w\|_0^2 + \|w\|_0^2 - 2(\Delta w, w) \quad * \\ &= \|\Delta w\|_0^2 + \|w\|_0^2 + 2\|\text{grad } w\|_0^2 - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \frac{\partial w}{\partial v_j} w \, d\sigma. \end{aligned}$$

Si  $X_j = \tau_j$  alors  $w = 0$  sur  $\Gamma_j$  et  $\int_{\Gamma_j} w \cdot \frac{\partial w}{\partial v_j} \, d\sigma = 0$

Si  $X_j \neq \tau_j$  alors  $\int_{\Gamma_j} \frac{\partial w}{\partial v_j} w = \alpha_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial w}{\partial \tau_j} w = \frac{\alpha_j}{2} |w^2(S_{j+1}) - w^2(S_j)| = 0$

Et donc on a

$$\|-\Delta w + w\|_0^2 = \|\Delta w\|_0^2 + \|w\|_0^2 + 2\|\text{grad } w\|_0^2$$

\*  $\| \cdot \|_S$  désignera la norme dans  $H^S(\Omega)$ .

Utilisant une estimation de Cacciopoli [1] on a

$$\|\Delta w\|_0^2 = \|D_X^2 w\|_0^2 + \|D_Y^2 w\|_0^2 + 2\|D_X D_Y w\|_0^2$$

et par conséquent

$$\|w\|_2^2 \leq \|\Delta w - w\|_0^2.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \|u\|_2^2 &\leq \|u-v\|_2^2 + \|v\|_2^2 \leq \|\Delta(u-v) - (u-v)\|_0^2 + \|v\|_2^2 \\ &\leq \|\Delta u - u\|_0^2 + \|\Delta v - v\|_0^2 + \|v\|_2^2 \leq \|\Delta u - u\|_0^2 + 3\|v\|_2^2 \end{aligned}$$

et on a

$$\|u\|_2^2 \leq C(X_1 \dots X_N) (\|\Delta u - u\|_0^2 + \sum_j \|\frac{\partial u}{\partial X_j}\|_{1/2})$$

où  $C(X_1 \dots X_N) = \sup\{1, 3 C_1(X_1 \dots X_N)\}$

c.q.f.d.

## II. HOMOTOPIE.

DEFINITION 2.1. Nous dirons que la famille de vecteurs  $X = (X_1 \dots X_N)$  vérifiant  $H(X_1, \dots, X_N)$  est homotope à  $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$  vérifiant  $H(Y_1, \dots, Y_N)$  si

il existe  $N$  fonctions continues  $\varphi_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  de  $[0, 1]$  dans le cercle unité  $S^1$  telles que :

$$\varphi_j(0) = X_j$$

$$\varphi_j(1) = Y_j$$

et pour tout  $t \in [0, 1]$  la famille  $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t))$  vérifie l'hypothèse  $H(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t))$ .

Associons alors à chaque famille  $X = (X_1, \dots, X_N)$  de vecteurs le problème :

$$\begin{array}{lcl}
 P_X : H^2(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \times \prod_{j=1}^N H^{1/2}(\Gamma_j) = E \\
 u & \longrightarrow & (-\Delta u + u, \frac{\partial u}{\partial X_j} |_{\Gamma_j}, j = 1 \dots N)
 \end{array}$$

Nous avons le

**THEOREME 2.1.** Si les familles de vecteurs  $X_1$  et  $X_2$  sont homotopes, et si l'un des problèmes  $P_{X_1}$  ou  $P_{X_2}$  est à indice, alors l'autre l'est également et leurs indices sont égaux.

Cela découle de l'estimation a priori de la proposition 1.2. qui restera valable mais avec une constante  $C(t)$  qui varie continuellement en  $t$ , et donc bornée pour  $t$  dans  $[0,1]$ . On remarquera d'autre part que  $H_S^2(\Omega)$  est un sous-espace fermé de codimension finie dans  $H^2(\Omega)$ .

Enfin on utilise l'invariance de l'indice, sur les composantes connexes de l'ensemble des opérateurs à indice.

La question qui se pose à présent est de savoir si tout problème à dérivée oblique se ramène par homotopie à un problème de type Neumann, Dirichlet ou Mêlé.

La réponse est positive pour un triangle et certains quadrilatères et négative si le polynôme a cinq côtés ou plus.

Nous avons donc le

**THEOREME 2.2.** Si  $\Omega$  est un triangle tout problème  $P_X$ , où  $X = (X_1, X_2, X_3)$  vérifie  $H(X_1, X_2, X_3)$ , est à indice.

On peut vérifier géométriquement que si  $X = (X_1, X_2, X_3)$  vérifie  $H(X_1, X_2, X_3)$ , il est homotope à un triplet  $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$  où  $y_j = \tau_i$  ou  $v_i$   $i = 1, 2, 3$ , avec possibilité d'éviter  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ .

### III. SOLUTIONS SINGULIÈRES.

Nous pouvons, comme pour les problèmes de Neumann, Dirichlet ou Mêlé, mettre en évidence le type de singularités de la solution  $H^1(\Omega)$  quand elle n'est pas régulière, en ce sens qu'elle n'est pas dans  $H^2(\Omega)$ . Pour cela on se ramène par translation et rotation à la situation de la figure 1 ie. on ramène un sommet  $S_1$  à l'origine avec un côté issu de ce sommet porté par l'axe  $Ox$ . Soit  $\omega$  la mesure de l'angle en  $S$  de  $\Omega$ . Appelons  $v_1$  et  $v_2$  les normales à  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

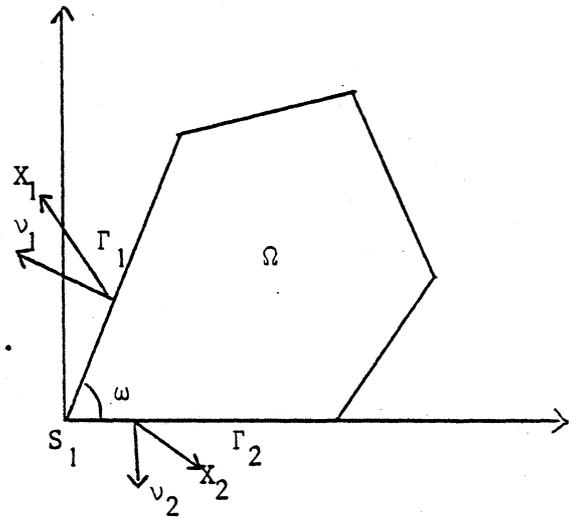


Figure 1

Posons  $\varphi_1 = (\vec{v}_1, \vec{X}_1)$  et  $\varphi_2 = (\vec{v}_2, \vec{X}_2)$  les angles orientés formés respectivement par  $v_1$  et  $X_1$  et  $v_2$  et  $X_2$ .

Alors les fonctions (écrites en coordonnées polaires) introduites par Calderon [ ]

$$u_k(r, \theta) = r^{\alpha_k} \sin \alpha_k \theta - \theta_0 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{où } \alpha_k = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + k\pi}{\omega} \quad \text{et } \theta_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi_2$$

sont harmoniques et vérifient

$$\Delta u_k = 0 \text{ dans le secteur délimité par } \Gamma_1 \text{ et } \Gamma_2.$$

Soit  $\theta(r, \theta)$  une fonction de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  telle que

$$\theta(r, \theta) \equiv 1 \quad r < \varepsilon$$

$$\theta(r, \theta) \equiv 0 \quad r > 2\varepsilon$$

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \theta(r, \omega) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial X_2} \theta(r, 0) = 0 \quad (\text{Il est aisé d'en construire}).$$

La fonction  $v_k = \theta \cdot u_k$  vérifie

$$\Delta v_k \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial X_1} = 0 \text{ sur } \Gamma_1$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial X_2} = 0 \text{ sur } \Gamma_2$$

$v$  est identiquement nulle au voisinage des autres côtés.

En particulier si il existe  $k$  tel que

$$0 < \alpha_k < 1 \text{ alors } v_k \in H^1(\Omega) \text{ mais } v_k \notin H^2(\Omega)$$

et on a donc

$$-\Delta v_k + v_k \in H^1(\Omega)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial X_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Ceci nous permettra d'élucider complètement grâce au théorème 2.2 une famille de problèmes.

Ce sont des problèmes qui sont variationnels et qui, par localisation, donnent des problèmes variationnels. Nous traiterons le cas particulier suivant :

On considère le problème aux limites suivant :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u|_{\Gamma_j} = 0 \quad j \in D \subset [1, 2, \dots, N] \\ \frac{\partial u}{\partial X_j}|_{\Gamma_j} = 0 \quad j \notin D \end{array} \right.$$

avec les conditions supplémentaires suivantes :

si  $X_j \neq v_j$  alors  $j-1$  et  $j+1$  sont dans  $D$

$\Omega$  est convexe.

Il est facile de voir dans ce cas que la forme bilinéaire habituelle associée à (P) est bilinéaire, continue coercitive, ce qui nous assure l'existence et l'unicité de la solution dans  $H^1(\Omega)$ .

Soit S l'ensemble des fonctions singulières,  $v_{kj}$  associée à chaque sommet  $S_j$ , telle que  $v_{kj}$  appartient à  $H^1(\Omega)$  mais non  $H^2(\Omega)$ . Alors on a :

**THEOREME 3.1.**

$$P : H^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \times \prod_{j \in D} H^{3/2}(\Gamma_j) \times \prod_{j \notin D} H^{1/2}(\Gamma_j)$$

est à indice et :

$$\text{Ind } P = - \dim S.$$

Conséquence. La solution variationnelle de (P) est dans  $H^2 \oplus S$  et donc s'écrira :

$$u = u_0 + \sum_{0 < k < \dim S} \lambda_k v_k$$

avec  $u_0$  dans  $H^2(\Omega)$ .

Preuve. Par troncature au voisinage d'un sommet, on se ramène au cas du triangle, puisque  $\Omega$  est convexe.

De plus, dans un triangle  $\Omega'$ , le problème vérifié par la fonction tronquée admet une solution unique dans  $H^1(\Omega')$ . D'autre part, le théorème 2.2 nous donne l'indice et il est aisé de vérifier que  $u$  est de la forme

$$u_0 + \sum_{0 < k < \dim S} \lambda_k v_k$$

ce qui a comme conséquence le théorème 3.2.

Remarque. On peut obtenir le résultat analogue si  $\Omega$  n'est pas convexe. Il sera publié ultérieurement.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CACCIOPOLI - Opere scelte, Ed. Cremonese, 1963.
- [2] GRISVARD - Synspade III, 1975 (Maryland).
- [3] GRISVARD - Arch. for rat. Mec. and Analysis 25, 1967.
- [4] LIONS - Sem. de Math. Supérieures, Montréal, 1962.
- [5] LIONS - Eq. diff. opérationnelles et problèmes aux limites.  
Springer, 1961.