Journées Équations aux dérivées partielles

Louis Boutet de Monvel
Alain Grigis
Bernard Helffer

Paramétrixes d'opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples

Journées Équations aux dérivées partielles (1975), p. 93-121
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1975____93_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 34-35 (1976) p.93-121

PARAMÉTRIXES D'OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS A CARACTÉRISTIQUES MULTIPLES

par Louis Boutet de Monvel
Alain Grigis
Bernard Helffer

Dans cet article , nous nous proposons de montrer comment on peut effectuer la construction de paramétrixes pour certains opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples , du type étudié par V.Grusin [5], [6], J. Sjöstrand [17], L. Hörmander [13], A. Menikoff [15], et les auteurs [1] [2] [3] [5] [10]. Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et P un opérateur pseudo-différentiel sur X , dont le symbole total admet un développement asymptotique :

$$p(x,\xi) \sim \sum_0^\infty p_j(x,\xi)$$

où pour tout entier j , p_j est homogène de degré $m-j$ en ξ . Soit maintenant Σ un cône lisse , de codimension p , dans $T^*X = X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Nous dirons que P est nul d'ordre k sur Σ si pour tout j , p_j est nul d'ordre $\geqslant k-2j$ sur Σ . Nous dirons en outre que P est transversalement elliptique le long de Σ s'il est elliptique en dehors de Σ , et si , au voisinage de chaque point de Σ , le symbole $p_o(x,\xi)$ domine d_Σ^k , où d_Σ est la distance à Σ . Si P est nul d'ordre k sur Σ , il est naturel de lui associer , pour chaque point $(x,\xi)\in\Sigma$, l'opérateur

$$\sigma^k_{x,\xi}(P) = \sum_{|\alpha+\beta|+2j=k} \frac{1}{\alpha!\beta!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta p_j(x,\xi) \quad y^\alpha D_y^\beta$$

qui est un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^n$, à coefficients polynomiaux , de degré total $\leqslant k$.

Nous nous appuierons de façon essentielle sur les résultats et les constructions de [1] . Dans cet article , on introduit , pour tous nombres réels m , k , une classe d'opérateurs $OPS^{m,k}$. Dans la situation ci-dessus il est naturel de se demander si P possède une paramétrixe $Q \in OPS^{-m,-k}$ (c'est le mieux qu'on puisse espérer). La réponse est la suivante : P possède une telle paramétrixe à gauche (ou à droite) si et seulement si , pour tout $(x,\xi) \in \Sigma$, l'opérateur différentiel $\sigma^k_{x,\xi}(P)$ est inversible à gauche (ou à droite) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La question de savoir si P possède une paramétrixe est donc entièrement ramenée à l'étude de l'inversibilité , à gauche ou à droite , de certains opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux. Ces opérateurs sont d'ailleurs d'un type assez particulier : ils sont tous dans l'algèbre engendrée par p opérateurs d'ordre 1 de la forme $\sum_k b_{jk}\, y_k + c_{jk}\, D_{y_k}$ $(j=1,..,p\ ;\ k=1,..,n)$. Naturellement le problème d'inverser de tels opérateurs est loin d'être résolu en général ; il l'est néanmoins assez complètement pour les opérateurs d'ordre 2 (cf. [5], [13]) , et pour certains opérateurs d'ordre 3 (cf. [10]).

L'article est organisé comme suit : dans les quatre premiers paragraphes , on étudie les opérateurs différentiels du type ci-dessus qui interviennent dans notre problème , et on construit une algèbre d'opérateurs pseudo-différentiels qui contient leurs inverses lorsque ceux-ci existent. Le plus délicat est de montrer que si un tel opérateur dépend de façon C^∞ d'un paramètre , et est inversible pour toutes les valeurs du paramètre , l'inverse dépend aussi régulièrement du paramètre (§4) . L'application à la construction de paramétrixes est faite au §5 , où l'énoncé ci-dessus sera précisé.

§1 Notations et préliminaires.

1. Nous utilisons les notations usuelles de la théorie des équations aux dérivées partielles .

Soit E un espace vectoriel réel , de dimension finie (qu'on identifiera au besoin à $\mathbb{R}^n$). On note E^* le dual de E .

On note $\mathcal{S}(E) = S^{-\infty}(E)$ l'espace de Schwartz des fonctions de classe C^∞ , à décroissance rapide (si $E = \mathbb{R}^n$, on a $f \in \mathcal{S}$ si et seulement si $x^\alpha D^\beta f$ est bornée , pour tous multi-indices α , β). On note $O_M(E)$ l'espace des fonctions C^∞ à croissance lente (ie. pour tout α il existe m tel que $(1+|x|)^{-m} D^\alpha f$ soit bornée) . Si m est un nombre réel , on note $S_o^m(E) \subset O_M(E)$ l'espace des fonctions f telles que pour tout α , $(1+|x|)^{-m} D^\alpha f$ soit bornée , et on pose $S_o^\infty = \bigcup S_o^m$. Enfin on note $S^m(E) \subset S_o^m(E)$ l'espace des fonctions f telles que pour tout α , $(1+|x|)^{-m+|\alpha|} D^\alpha f$ soit bornée , et on pose $S^\infty = \bigcup S^m$.

Nous aurons en particulier à utiliser le sous-espace $S^m_{reg} \subset S^m$ des fonctions $a \in S^m$ qui admettent un développement asymptotique :

$$(1.1) \quad a \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

où a_k est homogène de degrè $m-k$ $(a_k(tx) = t^{m-k} a_k(x)$ pour $t > 0)$ de classe C^∞ pour $x \neq 0$ (développement asymptotique signifie ici que pour tout entier N , il existe $b_N \in S^{m-N}$ tel que $a - \sum_0^{N-1} a_k = b_N$ pour $|x| > 1$). Si $a \in S^m_{reg}$, le symbole (ou partie principale) de a est le premier terme a_o du développement (1.1). Enfin si Ω est ouvert de $\mathbb{R}^p$ nous écrirons $f \in S^m(\Omega x E)$ si pour tout compact $K \subset \Omega$ et tous α, β $(1+|y|)^{|\beta|-m} (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha (\frac{\partial}{\partial y})^\beta f(x,y)$ est bornée dans $K \times E$.

Soit $a = a(x,\xi)$ une fonction continue sur $E \times E^*$. Si a est à croissance lente, on note $a(x,D)$ l'opérateur défini par

$$(1.2) \quad a(x,D)f = \int e^{ix.\xi}\, a(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\!\!{}^-\xi$$

où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f , et où pour abréger on a posé $d\!\!{}^-\xi = (2\pi)^{-\dim E} d\xi$ (la définition de $\hat{f}$ suppose le choix d'une mesure de Lebesgue dx sur E , et $d\xi$ désigne la mesure duale ; la mesure $\hat{f}\, d\!\!{}^-\xi$, donc aussi l'opérateur $a(x,D)$, ne dépendent pas de ce choix). Il est clair que $a(x,D)$ est un opérateur linéaire continu $\mathcal{S}(E) \to C(E)$ (espace des fonctions continues sur E)

(1.3) Proposition. - Si $a \in O_M(E \times E^*)$, $a(x,D)$ est continu de $\mathcal{S}(E)$ dans $C^\infty(E)$. Si $a \in S_o^\infty(E \times E^*)$, $a(x,D)$ est continu dans $\mathcal{S}(E)$.

preuve : on peut supposer $E = \mathbb{R}^n$. Remarquons qu'on a $D_j\, a = b(x,D)$ avec $b = \xi_j a + D_{x_j} a$, et $x_j\, a(x,D) = c(x,D)$, avec $c = x_j a$. Par récurrence on voit donc qu'on a pour tous α , β , $x^\alpha D^\beta a(x,D) = b_{\alpha\beta}(x,D)$ avec $b_{\alpha\beta} \in O_M$ (resp. S_o^∞) si $a \in O_M$ (resp. S_o^∞) . Donc si $a \in O_M$, $D^\alpha a(x,D)$ est continu : $\mathcal{S}(E) \longrightarrow C(E)$ pour tout α , donc $a(x,D)$ est continu : $\mathcal{S} \longrightarrow C^\infty$ (il est en fait continu $\mathcal{S} \longrightarrow O_M$) . Pour la seconde assertion , il suffit de prouver que si $a \in S_o^\infty$, $a(x,D)$ est en fait continu : $\mathcal{S} \longrightarrow L^\infty$ (alors $x^\alpha D^\beta a(x,D)$ est aussi continu $\mathcal{S} \longrightarrow L^\infty$ pour tous α, β , donc $a(x,D)$ est continu $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$). Supposons donc $a \in S_o^m(E \times E^*)$. Intégrant par parties dans (1.2) on obtient

$$a(x,D)f = \int e^{ix.\xi}\ (1+|x|^2)^{-N}(1-\Delta_\xi)^N(a(x,\xi)\hat{f}(\xi))\ d\!\!{}^-\!\xi$$

or on a , avec des constantes $c_{\alpha\beta}$ convenables

$$(1-\Delta_\xi)^N(a\hat{f}) = \sum_{|\alpha+\beta| \leqslant 2N} c_{\alpha\beta}\ D_\xi^\alpha a\ D_\xi^\beta \hat{f}$$

et pour tout α , $(1+|x|+|\xi|)^{-m} D^\alpha a$ est bornée . Pour $N \geqslant m/2$, on a $(1+|x|+|\xi|)^m(1+|x|^2)^{-N}(1+|\xi|)^{-m} \leqslant 2^{m/2}$, donc il existe $C > 0$ tel que

$$|a(x,D)f| \leqslant C \sum_{|\beta| < 2N} \int (1+|\xi|)^m\ |D^\beta \hat{f}(\xi)|\ d\!\!{}^-\!\xi$$

Comme le second membre de cette inégalité est une norme continue sur $\mathcal{S}$, ceci achève la démonstration.

Enfin on a le résultat suivant (qui est démontré dans [4]) :

(1.4) Si $a \in S_o^o(E \times E^*)$, $a(x,D)$ se prolonge en un opérateur continu dans $L^2(E)$.

2. Nous noterons $\mathcal{G}$ l'ensemble des opérateurs différentiels ℓ sur E de la forme

(1.5) $\ell = b.x + c.D$, avec $b \in E^*$, $c \in E$

$$(\text{ie.} \quad \ell f = \sum b_j x_j f + \tfrac{1}{i} c_j \tfrac{\partial f}{\partial x_j} \ )$$

L'opérateur $i\ell$ est générateur infinitésimal d'un groupe de transformations unitaires :

(1.6) $\exp ti\ell .f = e^{\frac{1}{2}it^2 b.c}\, e^{itb.x}\, f(x+tc)$

(en fait $i(\mathcal{G} \oplus \mathbb{R})$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de transformations unitaires de $\mathcal{S}$, isomorphe au groupe de Heisenberg).

On note M_p le groupe d'automorphismes linéaires de $\mathcal{S}$ qui préserve $\mathcal{G}$ (groupe métaplectique). Si $M \in M_p$, et $\ell \in \mathcal{G}$, on a

(1.7) $M \ell M^{-1} = s_M \ell$

où s_M est un automorphisme de $\mathcal{G}$, qui préserve la forme symplectique réelle σ définie par $[\ell,\ell'] = i\, \sigma(\ell,\ell')\, \mathrm{Id}$.

On sait (cf. [14], [16], [18]) que M_p est engendré par les constantes ($f \mapsto \lambda f$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$) , les changements de variable linéaires ($f \mapsto f(g^{-1}x)$, avec $g \in GL(E)$) , les multiplications $f \mapsto e^{iQ} f$, où Q est une forme quadratique réelle sur E , et la transformation de Fourier . C'est un groupe de Lie , qui a pour générateurs infinitésimaux les opérateurs du second ordre de la forme

$$i(\lambda + \sum a_{jk} x_j x_k + b_{jk}(x_j D_k + D_k x_j) + c_{jk} D_j D_k)$$

où λ est une constante complexe , et les a_{jk} , b_{jk} , c_{jk} sont réels)

L'application $M \mapsto s_M \in Sp(\mathcal{G})$ est un homomorphisme de groupes , surjectif , de noyau $\mathbb{C}^*$.

§2. Classes d'opérateurs pseudo-différentiels.

1. Définitions.

Soient E , N deux espacesvectoriels réels de dimension finie , et soit L une application linéaire $E \times E^* \to N$. On pose

$$(2.1)\quad L(x,\xi) = Bx + C\xi \qquad \text{si} \quad x \in E \ , \ \xi \in E^*$$

$$A = C\,{}^tB \in L(N^*, N)$$

Si a est une fonction à croissance lente sur N , on notera a_L l'opérateur $a(L(x,D))$: on a donc

$$(2.2)\quad a_L f = \int e^{ix.\xi}\, a(L(x,\xi))\, \hat{f}(\xi)\, d\!\!{}^-\xi$$

Il est clair qu'on a $a \circ L \in O_M$ (resp. S^m_o) si $a \in O_M$ (resp. si $a \in S^m_o$, et si $m \geqslant 0$) . Par suite a_L est continu : $\mathcal{S}(E) \to C^\infty(E)$ si $a \in O_M$, continu $\mathcal{S}(E) \to \mathcal{S}(E)$ si $a \in S^{\infty}_o$, et se prolonge continument : $L^2(E) \to L^2(E)$ si $a \in S^o_o$.

Si $a = e^{iy.\eta}$ (avec $\eta \in N^*$) , on a , d'après la formule d'inversion de Fourier :

$$(2.3)\quad a_L f = \int e^{ix.\xi} e^{ix.{}^tB\eta} e^{i\xi.{}^tC\eta}\, \hat{f}(\xi)\, d\!\!{}^-\xi = e^{ix.{}^tB\eta} f(x + {}^tC\eta) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}iA\eta.\eta} \exp(i\,{}^tL\eta)\, f$$

Donc de façon générale on a , si $a \in O_M$

$$(2.4)\quad a_L = \int \exp(i\,{}^tL\eta)\; e^{-\frac{1}{2}iA\eta.\eta}\, \hat{a}(\eta)\, d\!\!{}^-\eta$$

Dans ces formules , ${}^tL\eta$ désigne l'opérateur différentiel ${}^tB\eta.x + {}^tC\eta.D \in \mathcal{G}$. Il convient d'interprêter la derniére intégrale comme valeur de la distribution $\hat{a}(\eta)d\!\!{}^-\eta$ sur la fonction à valeurs vectorielles $\eta \mapsto e^{-\frac{1}{2}iA\eta.\eta} \exp(i\,{}^tL\eta) \in L(\mathcal{S}, C^\infty)$.

Il est alors naturel d'introduire aussi l'opérateur

$$(2.5)\quad \rho(a,L) = \int \exp(i\,{}^tL\eta)\, \hat{a}(\eta)\, d\!\!{}^-\eta = b_L$$

avec $\hat{b} = e^{\frac{1}{2}iA\eta\cdot\eta}\ \hat{a}$

Remarquons que si Q est une forme quadratique réelle, e^{iQ} est un multiplicateur de $\hat{O}_M$ ($= O'_c$, espace de Schwartz des convoluteurs) donc avec les notations ci-dessus on a $b \in O_M$ si $a \in O_M$. (On peut montrer que $\widehat{S^{\infty}_o}$ est le dual de O_M, donc e^{iQ} est aussi un multiplicateur de $\widehat{S^{\infty}_o}$, et on a $b \in S^{\infty}_o$ si $a \in S^{\infty}_o$.) Enfin si $a \in S^m$ (resp. S^m_{reg}) il est immédiat qu'on a $b \in S^m$ (resp. S^m_{reg}), et b admet le développement asymptotique

$$b \sim \sum \frac{1}{n!} (\tfrac{1}{2}iAD.D)^n\, a = \exp(\tfrac{1}{2}iAD.D)\, a$$

(où on a posé $AD.D = \sum A_{jk} D_j D_k$)

2. Adjoints.

Si $\ell \in \mathcal{G}$, on a $(\exp i\ell)^* = \exp -i\ell$. Comme on a aussi $\hat{\bar{a}}(\eta) = \overline{\hat{a}}(-\eta)$, on déduit aussitôt de la définition (2.5) qu'on a $\rho(a,L)^* = \rho(\bar{a},L)$. De même on voit qu'on a $a^*_L = b_L$, avec $\hat{b} = \exp(iA\eta.\eta)\ \hat{a}$, donc $b \in O_M$ (resp. S_o, S^m, S^m_{reg}) s'il en est de même de a ; dans les deux derniers cas b admet le développement asymptotique

$$(2.6)\quad b \sim \sum \frac{1}{n!} (iAD.D)^n\, \bar{a}$$

On voit aussi que si $a \in S^{\infty}_o$ (et en particulier si $a \in S^m$), $a_L{}^*$ est aussi continu $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$, donc a_L se prolonge continument : $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$.

3. Composés.

Si $a = e^{iy.\eta}$ et $b = e^{iy.\eta'}$, avec $\eta, \eta' \in N^*$, on a d'après (2.3)

$$a_L b_L f = e^{ix.{}^tB\eta}\, e^{i\langle x+{}^tC\eta,\, {}^tB\eta'\rangle}\, f(x+{}^tC\eta+{}^tC\eta') = c_L f$$

avec

$$c = e^{i\,{}^tC\eta.{}^tB\eta'}\, e^{i\langle y,\eta+\eta'\rangle} = a(y+A\eta)\, b = a\, b(y+{}^tA\eta)$$

On en déduit aussitôt, dans le cas général, qu'on a $a_L b_L = c_L$

avec

(2.7) $c = \int e^{iy\cdot\eta}\, a(y+A\eta)\, \hat{b}(\eta)\, d\!\!{}^{-}\eta = \int e^{iy\cdot\eta}\, b(y+{}^tA\eta)\, \hat{a}(\eta)\, d\!\!{}^{-}\eta$

Cette relation est vraie si a, $b \in \mathcal{S}$, donc aussi à la limite si $a \in O_M$, $b \in S_o^{\infty}$ ou $a \in S_o^{\infty}$, $b \in O_M$. En particulier si $a \in S^m$ et $b \in S^{m'}$, on a $c \in S^{m+m'}$, et c admet le développement asymptotique

(2.8) $c \sim \sum \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}\, D^{\alpha} a\, (AD)^{\alpha} b$

(obtenu en intégrant dans (2.7) le développement de Taylor $a(y+A\eta) \sim \sum i^{|\alpha|}/\alpha!\; D^{\alpha}a(y)\, (A\eta)^{\alpha}$.)

Remarquons que la formule (2.7) est un cas particulier de (2.2), avec $E = N$, $B = \mathrm{Id}$, $C = A$. Dans ce cas nous noterons plus simplement a_A l'opérateur correspondant. On a donc

(2.9) $a_L\, b_L = (a_A\, b)_L \quad , \quad a_A\, b_A = (a_A\, b)_A$

La formule (2.7) définit sur $S^{\infty}(N)$ une structure d'algèbre, associative (puisqu'elle correspond à la composition des opérateurs), que nous noterons $\mathcal{L}_A$. La deuxième égalité de (2.7) montre encore que l'algèbre opposée de $\mathcal{L}_A$ est $\mathcal{L}_{{}^tA}$; en particulier $\mathcal{L}_A$ est commutative si (et seulement si) $A = {}^tA$.

4. Transformations métaplectiques.

Si $M \in M_p$, et $\ell \in \mathcal{G}$ (§1.2) on a $M \exp i\ell\, M^{-1} = \exp is_M\ell$. En particulier si $\eta \in N^*$ on a $M \exp i\,{}^tL\eta\, M^{-1} = \exp i\,{}^t(L\,{}^ts_M)\eta$, d'où

(2.10) $M\, \rho(a,L)\, M^{-1} = \rho(a, L_o\,{}^ts_M)$

On peut toujours choisir $M \in M_p$ de sorte que $s_M\,{}^tL.N^*$ soit le sous-espace de $\mathcal{G}$ engendré par $x_1,\dots,x_{p+q}, D_1,\dots,D_p$ (avec $2p+q =$ le rang de L, $2p =$ le rang de la restriction à ${}^tL\,N^*$ de la forme symplectique de $\mathcal{G}$). Lorsqu'il en est ainsi, il sera commode de noter la variable de E (x,y,z), avec $x = (x_1,\dots x_p)$, $y = (x_{p+1},\dots,x_{p+q})$, $z = (x_{p+q+1},\dots,x_n)$. Tout opérateur a_L s'écrit alors, d'une seule façon :

$$(2.11)\quad a_L f = b(x,y,D_x)f = \int e^{ix.\xi}\, b(x,y,\xi)\, \hat{f}(\xi,y,z)\, d\!\!{}^-\xi$$

où $\hat{f}$ désigne ici la transformée de Fourier partielle de f par rapport à x , et où $b \in O_M$ (resp. S^m_o , S^m) si $a \in O_M$ (resp. S^m_o , S^m).Dans la situation ci-dessus , nous dirons que a_L a été mis sous forme réduite .

§3 <u>Paramétrixes et inverses</u>.

On conserve les notations du §2. Soit $a \in S^m_{reg}(N)$: on dit que a est elliptique si son symbole est inversible (cette définition se généralise aussitôt au cas où a est une matrice à coefficients dans S^m_{reg}). Il résulte aussitôt de (2.8) que si a est elliptique, il possède une paramétrixe , ie. il existe $b \in S^{-m}$ tel que $a \circ b - 1 \in S^{-\infty}(N)$ et $b \circ a - 1 \in S^{-\infty}(N)$ (où le produit $\circ$ est celui de l'algèbre $\mathcal{L}_A$, défini par la formule (2.7)).

Nous nous proposons de trouver des critères pour que a_L soit inversible , ou pour que a_A soit inversible (ie. que a soit inversible dans l'algèbre $\mathcal{L}_A$). Remarquons que si L est <u>surjective</u> , l'application $a \mapsto a_L$ est injective , et a_L possède un inverse de la forme b_L (avec $b \in S^{\infty}$) si et seulement si a est inversible dans $\mathcal{L}_A$. Dans toute la suite nous supposerons L surjective (celà suffira pour l'application que nous avons en vue).

1. <u>Cas où</u> L <u>est bijectif</u>.

On se ramène aussitôt au cas où $N = E \times E^*$, $L = Id$. C'est le cas étudié par V.V.Grusin [6] ; on a alors $a_L = a(x,D)$, et le noyau de a_L est la distribution $b(x,x-y)$, où $b(x,z)$ a pour transformée de Fourier partielle par rapport à z la fonction $a(x,\xi)$. En particulier le noyau de a_L est dans $\mathcal{S}(E\times E)$ (ie. a_L est continu de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$) si et seulement si $a \in S^{-\infty}$; a_L est alors en fait un opérateur compact de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$.

Par suite si $a \in S^m$ est elliptique , $\mathrm{Ker}(a_L)$ est de dimension finie , contenu dans $\mathcal{S}$, et $\mathrm{Im}(a_L)$ est fermée de codimension finie (orthogonale à $\mathrm{Ker}(a_L^*)$. Si $\mathrm{Ker}\, a_L = \mathrm{Ker}\, a_L^* = 0$, a_L est inversible , d'inverse b_L avec $b \in S^{-m}$ ($b-b' \in S^{-\infty}$ si b' est une paramétrixe de a).

Terminons par l'observation suivante : si $r \in S^{-\infty}$, et si $(1+r_L)$ est inversible dans $L^2(E)$, l'inverse est de la forme $1+s_L$ avec $s_L = -r_L + r_L{}^2 + r_L s_L r_L$, donc $s \in S^{-\infty}$. L'ensemble U des $r \in S^{-\infty}$ tels que $(1+r_L)$ soit inversible est donc ouvert (en fait ouvert pour la topologie induite par celle de $\mathrm{End}(L^2)$) , et l'application $r \mapsto s = (1+r)^{-1} - 1$ est holomorphe : $U \to \mathrm{End}(L^2)$, donc aussi $U \to U$.

2. Cas général .

Nous supposons désormais que L n'est pas bijectif , mais nous continuons de le supposer surjectif. Quitte à transmuer par un élément $M \in M_p$ convenable , on peut supposer que L est l'application $(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_n) \mapsto (x_1,\ldots,x_{p+q},\xi_1,\ldots,\xi_p) = (x,y,\xi)$ (cas réduit)

(3.1) Théorème.- (On suppose L surjectif) Soit $a \in S^m(N)$, elliptique : les assertions suivantes sont équivalentes

(i) a est inversible dans l'algèbre $\mathcal{L}_A$

(ii) a_L est inversible dans $\mathcal{S}(E)$

(ii)bis a_L est inversible dans $\mathcal{S}'(E)$

(iii) (on suppose a_L mis sous forme réduite : $a(x,y,D_x)$) - pour tout $y \in \mathbb{R}^q$, l'opérateur $a_y = a(x,y,D_x)$ est inversible dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ (ou $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p)$).

Il est clair que l'assertion (i) implique toutes les autres. Si $q = 0$, on est essentiellement dans le cas traité au n°1 : il est clair que dans ce cas (i) et (iii) sont équivalents ; d'autre part si $a(x,D_x)$ n'est pas inversible dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$, a ou a^* n'est pas injectif et il existe $\varphi = \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ telle que $a(x,D)\varphi = 0$ ou $a(x,D)^*\varphi = 0$; alors pour toute $\psi = \psi(z)$ $(z=(x_{p+1},\ldots,x_n))$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-p})$, on a $a_L(\varphi(x)\psi(z)) = 0$ ou $a_L^*(\varphi(x)\psi(z)) = 0$, de sorte que a_L n'est pas inversible dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (ni dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$).

Nous supposons désormais $q > 0$. Prouvons que (iii) implique (i). De toute façon a possède une paramétrixe $b' \in S^{-m}(\mathbb{R}^{2p+q})$. Par hypothèse pour tout $y \in \mathbb{R}^q$, $a_y = a(x,y,D_x)$ est inversible , et d'après le n°1 , l'inverse est de la forme $b_y = b(x,y,D_x)$, avec $b_y - b'_y \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p})$. Nous allons prouver qu'on a en fait $b-b' \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$

ce qui implique bien sûr $b \in S^{-m}(\mathbb{R}^{2p+q})$. Pour celà nous utiliserons les résultats du n°1 , et les observations suivantes :

-si $r \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$, l'application $y \mapsto r_y$ se prolonge en une application de classe C^∞ , nulle d'ordre infini à l'infini , de $\mathbb{S}^q = \mathbb{R}^q \cup \{\infty\}$ dans l'espace de Fréchet $S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p})$. Inversement si U est un ouvert de $\mathbb{S}^q$, et ρ une application de classe C^∞ , nulle d'ordre infini à l'infini : $U \to S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p})$, pour tout compact $K \subset U$ il existe $r \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ telle que $r_y = \rho_y$ pour $y \in K$.

-si $r \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ et $b' \in S^{m}(\mathbb{R}^{2p+q})$, on a $r \circ b' \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ et $b' \circ r \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ (le produit est celui de l'algèbre $\mathcal{L}_A$).

Il s'agit donc de prouver qu'au voisinage de chaque point de $\mathbb{S}^q = \mathbb{R}^q \cup \{\infty\}$, l'application $y \mapsto b_y - b'_y$ est de classe C^∞ (nulle d'ordre infini à l'infini le cas échéant) , à valeurs dans $S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p})$.

Posons $b' \circ a = 1 + r$: pour y assez grand , r_y est petit , donc $1 + r_y$ est inversible , d'inverse $1 + s_y$, où $s_y \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p})$ est fonction holomorphe de r_y d'après le n°1 . En vue de ce qui précède , il existe un voisinage U de l'infini , et $s' \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ tel que $(1+r_y)\circ(1+s'_y) = 1$ pour $y \in U$. On a alors , pour $y \in U$, $b_y = (1+s'_y)\circ b'_y$, donc $b-b' = s \circ b'$, et comme $s \circ b' \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ ceci démontre notre assertion au voisinage de l'infini.

Soit maintenant $y_0 \in \mathbb{R}^q$ (à distance finie). On a $b_{y_0} - b'_{y_0} \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p})$ et il existe $\rho \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ tel que $\rho_{y_0} = b_{y_0} - b'_{y_0}$. On a alors $(b'+\rho)\circ a = 1 + r''$, avec $r'' \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$, $r''_{y_0} = 0$; r''_y est petit au voisinage de y_0 , et comme ci-dessus il existe $s'' \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ et un voisinage U_0 de y_0 tels que $(1+s''_y)\circ(1+r''_y) = 1$ pour $y \in U_0$. Pour $y \in U_0$, on a $b = (1+s'')\circ(b'+\rho)$, donc $b-b' = s''\circ b' + (1+s'')\circ\rho$ et comme $s''\circ b' + (1+s'')\circ\rho \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$, ceci démontre notre assertion au voisinage de y_0 , et achève la démonstration.

Prouvons maintenant que chacune des assertions (ii) implique (iii) Remarquons que a_y est un opérateur d'indice fini , indépendant de y donc nul (puisque a_y est inversible pour y assez grand comme on vient de voir). Supposons qu'il existe un point $y_0 \in \mathbb{R}^q$ tel que a_y ne soit pas inversible : on a donc $\ker a_y \neq 0$ et $\ker a_y^* \neq 0$ et il existe $\varphi = \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ (non nulle) , telle que $a_{y_0}\varphi = 0$. Alors si δ_{y_0} désigne la mesure de Dirac au point y_0 sur $\mathbb{R}^q$, on a pour toute $\psi = \psi(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-p-q})$ $a_L(\varphi(x)\,\delta_{y_0}\,\psi(z)) = 0$, de sorte que a_L n'est pas injectif (donc pas inversible) dans $\mathcal{S}'$. De même

a_L^* n'est pas inversible dans $\mathcal{S}'$, et a_L n'est pas inversible dans $\mathcal{S}$.

Plus généralement soit a une matrice à coefficients dans $S^m(N)$, elliptique à gauche (resp. à droite). En appliquant le théorème à l'opérateur $a_L^* a_L$ (resp. $a_L a_L^*$), on voit que a possède un inverse à gauche (resp. à droite), qui est une matrice à coefficients dans $S^{-m}(N)$, si et seulement si a_L est inversible à gauche (resp. à droite) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (ou $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$). Lorsque a_L est mis sous forme réduite : $a_L = a(x,y,D_x)$, ceci équivaut encore, compte tenu du n°1, à l'assertion suivante : pour tout $y \in \mathbb{R}^q$ l'opérateur a_y est injectif (resp. surjectif) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ (ou dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p)$).

Nous complétons le théorème par le résultat suivant, qui vaut pour les opérateurs de degré positif :

(3.2) <u>Proposition</u>.- <u>Soit</u> a <u>une matrice à coefficients dans</u> $S^m(N)$, <u>elliptique à gauche</u>. <u>On suppose</u> $m \geq 0$ (<u>et</u> L <u>surjectif). Alors</u> a <u>admet un inverse à gauche à coefficients dans</u> $S^{-m}(N)$ <u>si et seulement s'il existe une constante</u> $c > 0$ <u>telle que pour toute</u> $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

(ii)ter $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c \, \|a_L \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

En effet si a admet un inverse à gauche b à coefficients dans $S^{-m}(N)$, b_L est de degré négatif donc continu dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, ce qui implique (ii)ter dès que c est plus grand que la norme de b_L dans $\mathrm{End}(L^2(\mathbb{R}^n))$.

Inversement, supposons que a n'est pas inversible à gauche. Nous pouvons supposer a_L mis sous forme réduite : $a_L = a(x,y,D_x)$, et d'après ce qui précède, il existe $y_0 \in \mathbb{R}^q$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ tels que $a_{y_0} . \varphi = 0$. Soit alors $\psi_k(y,z)$ une suite de fonctions C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}^{n-p}$, telles que le support de ψ_k tende vers (y_0, z_0) (où z_0 est un point arbitraire de $\mathbb{R}^{n-p-q}$), qu'on ait $\psi_1 = 1$ au voisinage de $\operatorname{supp} \psi_k$ pour $k \geq 1$, et qu'on ait, pour tout k $\int |\psi_k(y,z)|^2 \, dy \, dz = 1$. On a alors

$$a_L(\varphi(x)\, \psi_k(y,z)) = \psi_k(y,z)\, a_L(\varphi(x)\, \psi_1(y,z)) .$$

Or $a_L(\varphi\, \psi_1) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est nul pour $y = y_0$, donc $a_L(\varphi \psi_k)$ tend vers 0 en norme quadratique lorsque $k \to \infty$. Comme la norme de $\varphi \psi_k$ est constante (égale à $\int_{\mathbb{R}^p} |\varphi(x)|^2 \, dx \neq 0$), ceci contredit l'inégalité (ii)ter .

Remarquons qu'il peut arriver que a soit elliptique (à droite et à gauche) , et que a_L ait un inverse à gauche sans avoir d'inverse à droite : c'est le cas de l'opérateur $D_x + ix$ (sur $\mathbb{R}$).

Le théorème (3.1) permet de ramener l'étude de l'inversibilité de a_L à la même étude , dans le cas où L est bijectif (n°1) . Dans ce cas l'étude est plus facile (a_L est inversible à gauche (resp. à droite) si et seulement si $\ker a_L = 0$ (resp. $\ker a_L^* = 0$)) mais est loin d'être complète ; elle l'est néanmoins dans le cas où a est un polynôme de degré $\leqslant 2$ (cf. [5] , [13]).

§4 Introduction de paramètres.

1. Position du problème.

Nous nous interessons maintenant à ce qui se passe lorsque L et le symbole a dépendent d'un paramètre $\lambda \in \Sigma$, où Σ est une variété de classe C^∞ . Nous supposons donc $L \in C^\infty(\Sigma, L(E \times E^*, N))$, et comme au §2 nous posons $L(x,\xi) = Bx + C\xi$, $A = C\,{}^tB$ (donc $A \in C^\infty(\Sigma, L(N^*, N))$). Si $a \in S^m(\Sigma \times N)$, a_L désigne la famille d'opérateurs définis par (2.2) . Pour $\lambda \in \Sigma$, on pose $L_\lambda = L(\lambda)$, $a_\lambda(y) = a(\lambda, y)$ (donc $a_\lambda \in S^m(N)$) , et on note a_L^λ l'opérateur correspondant .

Plusieurs des constructions du §2 marchent encore. En particulier si $a \in S^\infty(\Sigma \times N)$, a_L définit un opérateur linéaire continu sur $S^{-\infty}(\Sigma \times E)$, et c'est à cet opérateur que nous nous interessons plus particulièrement. Si $a \in S^m(\Sigma \times N)$, $b \in S^{m'}(\Sigma \times N)$, on a $a_L\, b_L = c_L$ où $c \in S^{m+m'}(\Sigma \times N)$ est encore donné par la formule (2.7) et admet le développement asymptotique (2.8).

La formule (2.7) définit encore une structure d'algèbre sur $S^\infty(\Sigma \times N)$, que nous noterons toujours $\mathcal{L}_A$; $a \mapsto a_L$ est donc une représentation de $\mathcal{L}_A$ dans $S^{-\infty}(\Sigma \times E)$.

Si $a \in S^m_{reg}(\Sigma \times N)$ est elliptique , il possède une paramétrixe, ie. il existe $b \in S^{-m}_{reg}(\Sigma \times N)$ tel que $b \circ a - 1 \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$ et $a \circ b - 1 \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$ (où le produit est celui de $\mathcal{L}_A$).

Nous désirons un critère pour que a_L soit inversible dans $S^{-\infty}(\Sigma \times E)$: ce sera le cas si a est inversible dans l'algèbre $\mathcal{L}_A$.

Le critère ci-dessous est un critère d'inversibilité dans $\mathcal{L}_A$; on y suppose L surjectif (ie. L_λ est surjectif pour tout λ). Il s'applique en particulier à la loi d'algèbre de $\mathcal{L}_A$ elle-même (qui est un cas particulier de (2.7) , avec $E = N$, $L = (Id,A)$, donc L est surjectif)

Si L n'est pas surjectif - ou plutôt si le rang de L n'est pas constant-, le critère ci-dessous ne s'applique plus : il se peut que a_L ait un inverse b_L sans que a soit inversible dans $\mathcal{L}_A$, et aussi que a_L soit inversible pour une valeur du paramètre sans être inversible pour les valeurs voisines . La difficulté pour le critère ci-dessous vient de ce que , même si L est surjectif (ou de rang constant) , le rang de la restriction à ${}^tL(N^*)$ de la forme symplectique de $\mathcal{G}$ peut varier : il n'est en général pas possible de trouver $M \in M_p$, dépendant régulièrement du paramètre , et permettant de se ramener à la forme réduite du §2.4 .

(4.1)<u>Théorème</u>.- <u>Avec les notations ci-dessus , on suppose</u> L <u>surjectif , et</u> $a \in S^m_{reg}(\Sigma \times N)$ <u>elliptique</u>.

(i) <u>Si</u> a_L^λ <u>est inversible en un point</u> λ_0 , <u>il est inversible au voisinage de</u> λ_0 .

(ii) <u>Si</u> a_L^λ <u>est inversible pour tout</u> $\lambda \in \Sigma$, a <u>est inversible dans l'algèbre</u> $\mathcal{L}_A$, <u>d'inverse</u> $b \in S^{-m}_{reg}(\Sigma \times N)$.

Il y a un résultat analogue pour les systèmes (matrices) : si a est une matrice rectangulaire , elliptique à gauche (resp. à droite) et si a est inversible à gauche (resp. à droite) en un point , il l'est au voisinage de ce point ; si a est inversible à gauche (resp. à droite) en tout point de Σ , a admet un inverse à gauche (resp. à droite) , qui est une matrice à coefficients dans $S^{-m}(\Sigma \times N)$.

Pour démontrer le théorème , remarquons que comme a est elliptique , il possède une paramétrixe $b' \in S^{-m}(\Sigma \times N)$: on a donc $b' \circ a - 1 \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$. Si en outre a_L est inversible en un point λ_0 , l'inverse est de la forme $(b_{\lambda_0})_{L\lambda_0}$, avec $b_{\lambda_0} \in S^{-m}(N)$, et on a $b_{\lambda_0} - b'_{\lambda_0} \in S^{-\infty}(N)$; si alors on pose $b'' = b' + b_{\lambda_0} - b'_{\lambda_0}$, on a $b'' \circ a = 1 + r$, avec $r \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$, $r_{\lambda_0} = 0$. Comme L est surjectif et $r_{\lambda_0} = 0$, r_λ est petit au voisinage de λ_0 , donc $(1+r_L^\lambda)$ est inversible dans L^2 , et $(1+r_\lambda)$ inversible au voisinage de λ_0 , ce qui démontre l'assertion (i).

Supposons maintenant a_L inversible pour tout $\lambda \in \Sigma$: l'inverse est alors de la forme b_L^λ, où b est une fonction sur $\Sigma \times N$, et $b_\lambda \in S^{-m}(N)$ pour tout λ. Il s'agit de prouver qu'on a $b \in S^{-m}(\Sigma \times N)$ (autrement dit b_λ dépend de façon C^∞ de λ). Remarquons qu'avec les notations ci-dessus, si $(1+r_\lambda)$ est inversible pour $\lambda \in U \subset \Sigma$, on a, pour $\lambda \in U$, $b_\lambda = (1+r_\lambda)^{-1} \circ b''_\lambda$, donc $b_\lambda - b''_\lambda = s_\lambda \circ b''$ si $(1+r_\lambda)^{-1} = (1+s_\lambda)$. La deuxième assertion du théorème résultera donc du lemme suivant :

(4.2) Lemme.- Avec les notations ci-dessus, soit $r \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$. Si $(1+r_\lambda)$ est inversible pour tout $\lambda \in \Sigma$, l'inverse est de la forme $(1+s_\lambda)$, avec $s \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$.

Le reste du § est consacré à la démonstration de ce lemme.

2. Preuve du lemme 4.2.

Nous travaillerons uniquement avec l'algèbre $\mathcal{L}_A$. Nous supposerons $\Sigma = \mathbb{R}^p$, $N = \mathbb{R}^q$, et noterons (A_{jk}) la matrice de A. On a les formules suivantes :

$$(4.3)\quad D_{y_j}(a \circ b) = (D_{y_j} a) \circ b + a \circ (D_{y_j} b)$$

$$y_j (a \circ b) = (y_j a) \circ b - \sum_k a \circ (A_{jk} D_{y_k} b)$$

$$D_{\lambda_i}(a \circ b) = (D_{\lambda_i} a) \circ b + a \circ (D_{\lambda_i} b) + \sum_{j,k} \frac{\partial A_{jk}}{\partial \lambda_i} (D_{y_j} a \circ D_{y_k} b)$$

Ces formules résultent aussitôt de (2.7), en remarquant que $\eta_j \hat{b}(\eta)$ est la transformée de Fourier de $D_{y_j} b$. Elles sont valables pour $a, b \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$ (donc aussi, à la limite, pour $a, b \in S^\infty$).

Pour la suite, nous aurons besoin d'une suite particulière de normes sur $\mathcal{S}(N) = S^{-\infty}(N)$: on pose $H = (|y|^2 + |D_y|^2)^{\frac{1}{2}}$ (H admet pour fonctions propres les fonctions de Hermite :

$$h_\alpha(y) = \prod_{j=1}^{q} (\pi^{\frac{1}{2}} 2^{\alpha_j} \alpha_j!)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} - y_j\right)^{\alpha_j} e^{-\frac{1}{2}|y|^2}$$

la valeur propre correspondante est $(2|\alpha| + 1)^{\frac{1}{2}}$). Pour tout $z \in \mathbb{C}$

l'opérateur H^z est défini par $H^z(h_\alpha) = (2|\alpha|+1)^{\frac{1}{2}z} h_\alpha$; c'est un opérateur continu sur $\mathcal{S}$, qui dépend de façon holomorphe de z. On note E_s le domaine de H^s dans L^2, et on pose

(4.3) $$\|f\|_{E_s} = \|H^s f\|_{L^2}$$

(c'est une norme, qui ne dépend que de $\mathrm{Re}\ s$).

Dans les assertions qui suivent, on oublie (provisoirement) le paramètre.

(4.5) <u>Lemme</u>.- <u>Pour tout</u> $k > \frac{1}{2}\dim N$, <u>il existe</u> $C > 0$ <u>tel que</u>

$$\|a \circ b\|_{L^2} \leqslant C \|a\|_{L^2} \|b\|_{E_k}$$

En effet on a $a \circ b = \int e^{iy\cdot\eta}\, a(y+A\eta)\, \hat{b}(\eta)\, d\eta$

Or pour tout $\eta \in N^*$, on a $\|e^{iy\cdot\eta} a(y+A\eta)\|_{L^2} = \|a\|_{L^2}$, d'où $\|a \circ b\|_{L^2} \leqslant \|a\|_{L^2} \int |\hat{b}(\eta)|\, d\eta$. Mais pour $k > \frac{1}{2}\dim N$, on a, avec une constante C convenable, $\int |\hat{b}(\eta)|\, d\eta \leqslant C \|b\|_{E_k}$.

Utilisant l'autre égalité de (2.7), on obtient, avec la même constante C :

$$\|a \circ b\|_{L^2} \leqslant C \|a\|_{E_k} \|b\|_{L^2} .$$

(4.6) <u>Corollaire</u>.- <u>On a</u> $\|a \circ b\|_{L^2} \leqslant C \|a\|_{E_j} \|b\|_{E_{k-j}}$ <u>si</u> $0 \leqslant j \leqslant k$.

Soient en effet $a, b \in S^{-\infty}(N)$, et considérons la fonction holomorphe $F(z) = (H^{j-kz}a) \circ (H^{kz-j}b)$. C'est une fonction holomorphe de z, bornée (dans L^2 et même dans $\mathcal{S}$) pour $0 \leqslant \mathrm{Re}\ z \leqslant 1$.

Pour $\mathrm{Re}\ z = 0$, on a

$$\|F(z)\|_{L^2} \leqslant C \|H^j a\|_{L^2} \|H^{-j} b\|_{E_k} = \|a\|_{E_j} \|b\|_{E_{k-j}}$$

et pour $\mathrm{Re}\ z = 1$, on a

$$\|F(z)\|_{L^2} \leqslant C \|H^{k-j} a\|_{E_k} \|H^{j-k} b\|_{L^2} = C \|a\|_{E_j} \|b\|_{E_{k-j}}$$

En vertu du théorème des trois droites de Hadamard, on a donc aussi

$$\|F(z)\|_{L^2} \leqslant C \|a\|_{E_j} \|b\|_{E_{k-j}} \quad \text{si } 0 \leqslant \mathrm{Re}\ z \leqslant 1$$

et pour $z = j/k$ on obtient l'assertion du corollaire.

(4.7)Corollaire.- Pour tout entier $k > \frac{1}{2}$ dim N , il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend que de k , dim N , et pas de A) telle que $\|a_\circ b\|_{E_k} \leqslant C\,(1+\|A\|)^k\,\|a\|_{E_k}\|b\|_{E_k}$.

En effet si k est entier $\geqslant 0$, la norme $\|a\|_{E_k}$ est équivalente à la norme $\sum_{|\alpha+\beta|\leqslant k}\|x^\alpha D^\beta a\|_{L^2}$. Or il résulte de (4.3) qu'on a

$$x^\alpha D^\beta(a_\circ b) = \sum_{\substack{\alpha'\leqslant\alpha\\ \beta'\leqslant\beta}}(-1)^{|\alpha'|}\binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'}(x^{\alpha-\alpha'}D^{\beta-\beta'}a)_\circ((AD)^{\alpha'}D^{\beta'}b)$$

d'où , avec des constantes C , C' convenables :

$$\|a_\circ b\|_{E_k} \leqslant C'\sum_{|\alpha'+\alpha''+\beta'+\beta''|\leqslant k}\|A\|^{|\alpha''|}\|x^{\alpha'}D^{\beta'}a\|_{E_{k-|\alpha'+\beta'|}}\|D^{\alpha''+\beta''}b\|_{E_{k-|\alpha''+\beta''|}}\leqslant$$

$$\leqslant C\,(1+\|A\|)^k\,\|a\|_{E_k}\,\|b\|_{E_k} .$$

Nous choissons maintenant un entier $k_0 > \frac{1}{2}$ dim N , et pour tout entier M et tout compact $K\subset\Sigma$, nous définissons une semi-norme sur $S^{-\infty}(\Sigma\times N)$ par

$$(4.8)\qquad \|a\|_M^K = \sum_{2|\alpha|+j=M}\ \sup_{\lambda\in K}\|D_\lambda^\alpha a\|_{E_{k_0+j}}$$

Comme les normes $\|a\|_{E_k}$, $k\in\mathbb{N}$, forment une suite fondamentale de semi-normes de $\mathcal{S}$, les semi-normes $\|a\|_M^K$, lorsque M parcourt $\mathbb{N}$, et K l'ensemble des compacts de Σ , forment une famille fondamentale de seminormes de $S^{-\infty}(\Sigma\times N)$.

(4.9)Proposition.- Pour tout M , et pour tout compact $K\subset\Sigma$, il existe une constante C_M telle que

$$\|a_\circ b\|_M^K \leqslant C_M\sum_0^M\|a\|_j^K\,\|b\|_{M-j}^K$$

En effet , c'est vrai pour M = 0 (puisque $(1+\|A\|)^k$ est borné dans K). On démontre alors aisément l'assertion , par récurrence sur M , en remarquant que la semi-norme $\|a\|_M^K$ est équivalente à la semi-norme

$$\|a\|_{M-1}^K + \sum_j\|y_j a\|_{M-1}^K + \|D_{y_j}a\|_{M-1}^K + \sum_i\|D_{\lambda_i}a\|_{M-2}^K$$

et en utilisant les formules (4.3) pour majorer les normes des fonctions $D_{y_j}(a_\circ b)$, $y_j(a_\circ b)$, $D_{\lambda_i}(a_\circ b)$. Nous laissons les détails au lecteur.

Pour tout entier M , et pour tout compact $K \subset \Sigma$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que $C_j \leqslant \alpha^j C_o$ pour $0 \leqslant j \leqslant M$ (où les C_j sont les constantes de la proposition (4.9)). Si alors on pose

$$N_M(a) = \sum_0^M C_o \alpha^{-j} \|a\|_j^K T^j$$

la proposition (4.9) implique qu'on a

$$N_M(a_\circ b) \ll N_M(a)\, N_M(b)$$

(où le signe $\ll$ signifie que pour tout j , le coefficient de T^j dans le membre de gauche est plus petit que le coefficient de T^j dans le membre de droite).

(4.10)<u>Corollaire</u>.- <u>Soit</u> $a \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$, <u>soit</u> U <u>un ouvert relativement compact de</u> Σ , <u>et supposons</u> $C_o \|a\|_o^U < 1$. <u>Alors la série géométrique</u> $\sum_1^\infty a^j$ <u>converge dans</u> $S^{-\infty}(U \times N)$

(a^j désigne la puissance j-ième de a dans l'algèbre $\mathcal{L}_A$).
En effet pour tout M on a

$$N_M(\sum_1^\infty a^j) \ll \sum_1^\infty N_M(a)^j = N_M(a)\,(1-N_M(a))^{-1}$$

(la deuxième série est convergente , puisque son terme constant est de valeur absolue < 1). Ainsi la série $\sum_{j=1}^\infty \|a^j\|_k^U$ converge pour tout $k \leqslant M$, donc pour tout k puisque M est arbitraire , ce qui achève la démonstration.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du lemme(4.2) : soit $r \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$, et supposons que pour tout $\lambda \in \Sigma$, $(1+r_\lambda)$ est inversible. Soit $\lambda_o \in \Sigma$: il existe $s \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$ tel que $(1+s_{\lambda_o})_\circ(1+r_{\lambda_o}) = 1$. On a donc $(1+s)_\circ(1+r) = 1+\rho$, avec $\rho \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$ $\rho_{\lambda_o} = 0$. Comme ρ_λ est petit au voisinage de λ_o , il existe un voisinage U de λ_o tel qu'on ait $C_o \|\rho\|_o^U < 1$. Alors $(1+\rho_\lambda)$ est inversible dans U , d'inverse $1+\sigma_\lambda$, avec $\sigma = \sum(-\rho)^j \in S^{-\infty}(U \times N)$. On a donc $(1+r)^{-1}|_U - 1 = (1+\sigma)_\circ(1+s) - 1 \in S^{-\infty}(U \times N)$. Ceci peut être répété au voisinage de chaque point de Σ , et achève la démonstration.

§5 Constructions de paramétrixes d'opérateurs à caractéristiques multiples.

1. Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (le résultat de ce paragraphe se généralise aisément au cas où X est une variété de classe C^∞, mais pour les calcls qui suivent il est commode de fixer une fois pour toutes le système de coordonnées). Soit $P = p(x,D)$ un opérateur pseudo-différentiel sur X, de degré m. Nous supposons que le symbole total p admet un développement asymptotique :

$$(5.1) \qquad p(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi)$$

où p_j est homogène de degré $m-j$ (autrement dit $p \in S^m_{reg}$) (pour les calculs qui suivent, j pourrait aussi bien parcourir l'ensemble des demi-entiers positifs : $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$)

Il est commode d'introduire l'opérateur différentiel à coefficients séries formelles de T :

$$(5.2) \qquad \sigma^\infty_{x,\xi}(P) = \sum_{j,\alpha,\beta} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta p_j(x,\xi)\, T^{|\alpha+\beta|+2j}\, y^\alpha D_y^\beta$$

Il est clair qu'on a $\sigma^\infty(P+Q) = \sigma^\infty(P) + \sigma^\infty(Q)$ si P et Q sont de même degré, et il est classique qu'on a $\sigma^\infty(P_\circ Q) = \sigma^\infty(P)_\circ \sigma^\infty(Q)$ ($P_\circ Q$ étant considéré comme opérateur de degré $\deg P + \deg Q$).

2. Soit $\Sigma \subset T^*X \setminus \{0\} = X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ un cône lisse, de codimension p. Nous dirons (comme dans [1]) que P est nul d'ordre k sur Σ (k entier positif), et écrirons $P \in \mathcal{N}^{m,k}$ (ou $p \in \mathcal{N}^{m,k}$) si pour tout j, p_j est nul d'ordre $\geqslant k-2j$ sur Σ (il n'y a pas de condition pour $j \geqslant k/2$) ; de façon équivalente : $\sigma^\infty_{x,\xi}(P)$ est divisible par T^k pour tout point $(x,\xi) \in \Sigma$. Il est commode d'introduire

$$(5.3) \qquad \sigma^k_{x,\xi}(P) = \sum_{|\alpha+\beta|+2j=k} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta p_j(x,\xi)\, y^\alpha D_y^\beta$$

de sorte qu'on a $\sigma^\infty_{x,\xi}(P) = \sigma^k_{x,\xi}(P)\, T^k \mod. T^{k+1}$ si $(x,\xi) \in \Sigma$; donc si $P \in \mathcal{N}^{m,k}$ et $Q \in \mathcal{N}^{m',k'}$, on a $\sigma^{k+k'}_{x,\xi}(P_\circ Q) = \sigma^k_{x,\xi}(P)_\circ \sigma^{k'}_{x,\xi}(Q)$.

3. Le développement de Taylor $T_k(P)$

Pour les propriétés locales des symboles et des opérateurs , il sera commode d'introduire , dans un voisinage conique d'un point $(x,\xi) \in \Sigma$, un système de coordonnées

$$(5.4) \quad u = (u_1,\ldots,u_p) \quad , \quad v = (v_1,\ldots,v_{2n-p})$$

où les u_i (resp. v_j) sont C^∞, homogènes de degré 0 (resp. 1 , et non toutes nulles) , de sorte que , au voisinage de (x,ξ) , Σ soit défini par le système d'équations $u = 0$. Dans toute la suite les lettres u , v représentent un tel système de coordonnées.

Si $P = p(x,D) \in \mathcal{N}^{m,k}$, il existe un polynôme unique

$$(5.5) \quad T_k(P) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(v)\, u^\alpha \quad , \text{ avec } a_\alpha(v) \text{ homogène de degré } m-\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2}|\alpha|$$

tel que $p-T_k(P)$ soit nul d'ordre $k+1$ sur Σ , au voisinage de x,ξ .On obtient ce polynôme en ne retenant dans le développement de Taylor de $p \sim \sum p_j$ le long de Σ que les termes dominants , c'est à dire semi-homogènes de poids $m-\frac{1}{2}k$ lorsqu'on attribue à v le poids 1 et à u le poids $-\frac{1}{2}$ (cf.[1]).

4. L'opérateur P_Σ .

Soit $P \in \mathcal{N}^{m,k}$ .On sait d'après [1] qu'il existe (au voisinage de chaque point $(x,\xi) \in \Sigma$) un opèrateur différentiel unique

$$(5.6) \quad P_\Sigma = \sum a_{\alpha\beta}(v)\ u^\alpha\, D_u^\beta$$

où $a_{\alpha\beta}$ ne dépend que de v , et est homogène de degré $m-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}|\alpha|-\frac{1}{2}|\beta|$, tel que pour tout $Q \in \mathcal{N}^{m',k'}$ on ait

$$(5.7) \quad T_{k+k'}(P_\circ Q) = P_\Sigma\, T_{k'}(Q)$$

(l'unicité d'un tel opérateur est immédiate; l'éxistence et la construction de P seront repris et précisés ci-dessous)

Il est clair que P_Σ et $\sigma^k(P)$ ne dépendent que de $T_k(P)$. Pour $k = 0$, P_Σ et $\sigma^k(P)$ sont simplement l'opérateur de multiplication par la constante $p_o(x,\xi)$.

5. Lien entre $T_k(P)$, $\sigma^k(P)$, et P_Σ .

Décomposons les champs de vecteurs $\partial/\partial x_s$, $\partial/\partial \xi_s$ en partie transverse et partie tangente à Σ au voisinage d'un point $(x,\xi) \in \Sigma$:

$$(5.8)\quad \partial/\partial x_s = \sum_j B_{js}(v)\ \partial/\partial u_j + r_s$$

$$\partial/\partial \xi_s = \sum_j C_{js}(v)\ \partial/\partial u_j + \rho_s$$

où les B_{js} , C_{js} sont des fonctions qui ne dépendent que de v , et pas de u , et les r_s , ρ_s sont tangents à Σ , donc

$$(5.9)\quad B_{js} = \partial u_j/\partial x_s \,|_\Sigma \qquad \text{(homogène de degré } 0)$$

$$C_{js} = \partial u_j/\partial \xi_s \,|_\Sigma \qquad \text{(homogène de degré } -1)$$

Nous noterons encore $E = \mathbb{R}^n$ (variable y) , et $N = \mathbb{R}^p$ (variable u ; on peut identifier canoniquement N au fibré tangent normal de Σ). Nous noterons aussi

(5.10) $B : E \to N$ l'opérateur de matrice (B_{js})

$C : E^* \to N$ l'opérateur de matrice (C_{js})

$L = (B + C) : E \times E^* \to N$

$A = C\ {}^tB : N^* \to N$

On a donc

$$(5.11)\quad A_{jk} = \sum_s C_{js}\ B_{ks}$$

Soit U_j l'opérateur $u_j(x,D) \in \mathcal{N}^{0,1}$ (la fonction u_j est seulement définie au voisinage de (x,ξ) , et il convient plutôt de considérer U_j comme opérateur pseudo-différentiel opérant sur les micro-fonctions définies au voisinage de (x,ξ)). On a

$$(5.12)\quad \sigma^1(U_j) = \sum_s \partial u_j/\partial x_s\ y_s + \partial u_j/\partial \xi_s\ D_{y_s} = \sum_S B_{js}\ y_s + C_{js}\ D_{y_s}$$

$$= (u_j)_L$$

D'autre part soit $Q \in \mathcal{N}^{m,k}$, de symbole total $q(x,\xi)$. Le symbole total de $U_j \circ Q$ a pour développement asymptotique :

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\alpha} u_j \; D_x^{\alpha} q$$

Pour le calcul de $T_{k+1}(U_j Q)$ on peut bien sûr remplacer q par $T_k(Q) = b$, et on constate aussitôt que seuls les termes avec $|\alpha| \leq 1$ ont une contribution non nulle. Enfin on peut remplacer D_{x_s} par sa partie transverse à Σ (formule (5.8)), et on obtient en fin de compte

$$T_{k+1}(U_j Q) = T_{k+1}(u_j b + \sum_s \partial u_j / \partial \xi_s \; D_{x_s} b) = u_j b + \sum_{k,s} C_{js} B_{ks} \; D_{u_k} b$$

Finalement, puisque $A_{jk} = \sum_s C_{js} B_{ks}$, on a

(5.13) $$(U_j)_{\Sigma} = u_j + \sum_k A_{jk} \, D_{u_k} = (u_j)_A$$

Nous pouvons maintenant énoncer le lien qui existe entre P_{Σ}, $\sigma^k(P)$, et le développement de Taylor $T_k(P)$:

(5.14) <u>Proposition</u>.- <u>Soit</u> $P \in \mathcal{N}^{m,k}$, <u>et</u> $a = T_k(P)$. <u>On a</u>

$$P_{\Sigma} = a_A \quad , \quad \sigma^k(P) = a_L \qquad (\S 2 \text{ , formules } (2.2),(2.9)).$$

preuve: nous venons de démontrer cette assertion lorsque P est l'un des U_j, et bien sûr elle est vraie pour $k = 0$. Soient maintenant $P \in \mathcal{N}^{m,k}$, $Q \in \mathcal{N}^{m',k'}$. Posons $a = T_k(P)$, $b = T_{k'}(Q)$, $c = T_{k+k'}(PQ)$, et supposons $P = a_A$, $Q = b_A$, $\sigma^k(P) = a_L$ et $\sigma^{k'}(Q) = b_L$. On a alors

$$c = P_{\Sigma} \, b = a_A \, b$$

$$(PQ)_{\Sigma} = P_{\Sigma} \, Q_{\Sigma} = a_A \, b_A = (a_A \, b)_A = c_A \quad \text{(d'après (2.9))}$$

$$\sigma^{k+k'}(PQ) = \sigma^k(P) \, \sigma^{k'}(Q) = a_L \, b_L = (a_A \, b)_L = c_L \quad \text{(d'après (2.9))}$$

Dans le cas général, si $P \in \mathcal{N}^{m,k}$, on peut toujours écrire P sous la forme

$$P = \sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha \; U_1^{\alpha_1} \ldots U_p^{\alpha_p}$$

où A_α est de degré $\leqslant m-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}|\alpha|$ (donc $A_\alpha \in \mathcal{N}^{m-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}|\alpha|,0} \subset \mathcal{N}^{m,k-|\alpha|}$)
Comme l'assertion est vraie pour les U_j, et pour les A_α $(k=0)$, elle l'est aussi pour P.

6. Dans [1] on a introduit les classes de symboles $S^{m,k}$ et $\mathcal{H}^m = \bigcap S^{m-j,-2j}$, et les opérateurs pseudo-différentiels correspondants ($OPS^{m,k}$, $OP\mathcal{H}^m$). D'après [1], on a $a \in S^{m,k}$ si $a \in S^m$ en dehors de Σ, et si tout point de Σ possède un voisinage conique dans lequel on ait, pour tous α, β, et pour $|v| \geqslant 1$, avec des constantes $c_{\alpha\beta}$ convenables :

$$(5.15) \qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^\beta a\right| \leqslant c_{\alpha\beta} \; |v|^{m-|\beta|}\left(|u| + |v|^{-\frac{1}{2}}\right)^{k-|\alpha|}$$

Aussi d'après [1] (5.2), on a $h \in \mathcal{H}^m$ si et seulement si $h \in S^{-\infty}$ en dehors de Σ, et si tout point de Σ possède un voisinage conique dans lequel on ait, pour tous α, β, γ, et pour $|v| \geqslant 1$, avec des constantes $c_{\alpha\beta\gamma}$ convenables :

$$(5.16) \qquad \left|u^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^\gamma h\right| \leqslant c_{\alpha\beta\gamma} \; |v|^{m-|\gamma|+\frac{1}{2}|\beta|-\frac{1}{2}|\alpha|}$$

Comme $h \in S^{-\infty}$ hors de Σ, on peut, quitte à le tronquer, supposer qu'il est nul pour $|u| > 1$. On a alors $h \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$ (au voisinage d'un point de Σ, on identifie Σ à $\mathbb{R}^{2n-p}$ (variable v), et N à $\mathbb{R}^p$ (variable u) ; et on attribue aux variables u et v de nouveaux poids : respectivement 1 et 0, comme au §4). La condition (5.16) se réécrit alors comme suit :

(5.17) <u>Soit</u> $h \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$, <u>nulle pour</u> u <u>assez grand . On pose</u> $h_\lambda(v,u) = h(\lambda v, \lambda^{-\frac{1}{2}}u)$. <u>Alors</u> $h \in \mathcal{H}^m$ <u>si et seulement si l'ensemble des</u> $\lambda^{-m} h_\lambda$, $\lambda \geqslant 1$, <u>est borné dans</u> $S^{-\infty}(\Sigma \times N)$.

Soit maintenant $P \in \mathcal{N}^{m,k}$, et $Q \in OPS^{m',k'}$ (resp. $OP\mathcal{H}^{m'}$), de symboles totaux $p(x,\xi)$, $q(x,\xi)$. On a $PQ \in OPS^{m+m',k+k'}$ (resp. $OP\mathcal{H}^{m+m'-\frac{1}{2}k}$), et le symbole total r de PQ admet encore le développement asymptotique :

$$r \sim \sum \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\alpha} p \quad D_x^{\alpha} q \quad .$$

Utilisant le fait qu'on a $u^{\alpha}(\frac{\partial}{\partial u})^{\beta}(\frac{\partial}{\partial v})^{\gamma} q \in S^{m'-|\gamma|, k+|\alpha|-|\beta|}$ (resp. $\mathcal{H}^{m'-|\gamma|+\frac{1}{2}|\beta|-\frac{1}{2}|\alpha|}$) on constate aisément qu'on a

(5.18) $r - P_{\Sigma}\, q \in S^{m+m', k+k'+1}$ (resp. $\mathcal{H}^{m+m'-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}}$)

et P_{Σ} est bien sûr le seul opérateur différentiel de la forme (5.6) qui ait cette propriété .

(5.19) Remarque.- Les mêmes constructions que ci-dessus peuvent aussi être effectuées pour étudier la multiplication à droite par P : il existe un opérateur P'_{Σ} unique , de la forme (5.6) , tel que pour tout $Q \in OPS^{m',k'}$ (resp. $OP\mathcal{H}^{m'}$) on ait ,

(5.18)bis $r - P'_{\Sigma}\, q \in S^{m+m', k+k'}$ (resp. $\mathcal{H}^{m+m'-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}}$)

q désignant le symbole total de Q , et r celui de QP .

Si $Q \in \mathcal{N}^{m',k'}$, la classe de $Q_{\circ}P$ mod. $OPS^{m+m',k+k'+1}$ est complètement déterminée par le développement de Taylor $T_{k+k'}(QP)$, et si $T_k(P) = a$, $T_{k'}(Q) = b$, on a d'après ce qui précède

$$T_{k+k'}(Q_{\circ}P) = Q_{\Sigma}\, a = b_A\, a = a\, t_A\, b \quad \text{(d'après (2.7))}$$

On a donc de façon générale $P'_{\Sigma} = a\, t_A$. Il est alors clair que P'_{Σ} est inversible à gauche (resp. à droite) si et seulement si P_{Σ} est inversible à droite (resp. à gauche) , puisque c'est la multiplication à droite par $a = T_k(P)$ dans l'algèbre $\mathcal{L}_A$.

7. Constructions de paramétrixes.

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le théorème que nous avons en vue : soit $P \in \mathcal{N}^{m,k}$. Nous supposons P transversalement elliptique le long de Σ , ie. P est elliptique (de degré m) en dehors de Σ , et tout point de Σ possède un voisinage conique dans lequel on ait (avec $c > 0$ convenable)

(5.20) $\quad |p_o(x,\xi)| \geqslant c \; |\xi|^m \; |u|^k \quad .$

De façon équivalente : P est elliptique de degré m hors de Σ, et $a = T_k(P)$ est elliptique de degré k en chaque point de Σ.

Cette définition se généralise aussitôt au cas des systèmes (ie. P est une matrice à coefficients dans $\mathcal{N}^{m,k}$) : nous dirons que P est transversalement elliptique à gauche (resp. à droite) s'il est elliptique à gauche (resp. à droite) en dehors de Σ, et si $a = T_k(P)$ est elliptique à gauche (resp. à droite) en chaque point de Σ.

(5.21) Théorème.- Soit P un système d'opérateurs pseudo-différentiels, de degré m, nul d'ordre k sur Σ, transversalement elliptique à gauche (resp. à droite) le long de Σ. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) P possède une paramétrixe à gauche (resp. à droite) $Q \in OPS^{-m,-k}$.

(ii) P_Σ est inversible à gauche (resp. à droite) en tout point de Σ.

(iii) $\sigma^k(P)$ est inversible à gauche (resp. à droite) en tout point de Σ.

(iv) Pour tout point $(x,\xi) \in \Sigma$, il existe $C > 0$ tel qu'on ait, pour $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$: $\|\psi\|_{L^2} \leqslant C\,\|\sigma^k(P).\psi\|_{L^2}$ (resp. la même assertion pour l'adjoint $\sigma^k(P)^*$).

(v) Pour toute distribution f, $Pf \in H^s_{loc}$ implique $f \in H^{s+m-\frac{1}{2}k}_{loc}$ (resp. la même assertion pour P^*)

(pour la dernière assertion, nous supposons P propre, de sorte que Pf est bien définie, sans restriction sur le support de f).

Il est clair que l'assertion (i) implique toutes les autres (en particulier la dernière, parceque la paramétrixe $Q \in OPS^{-m,-k}$, qu'on peut toujours choisir propre, est continue $H^s_{loc} \to H^{s+m-\frac{1}{2}k}_{loc}$). Par ailleurs, si $a = T_k(P)$, on a, avec les notations ci-dessus, $P_\Sigma = a_A$, $\sigma^k(P) = a_L$. Or a est elliptique à gauche (resp. à droite), et L est surjectif (car les différentielles $du_j = \sum_s B_{js}\, dx_s + C_{js}\, d\xi_s$ sont linéairement indépendantes) ; l'équivalence de (ii), (iii), (iv) résulte donc du théorème 3.1 et de la proposition 3.2. Reste à prouver que (ii) implique (i), et que (v) implique (iv).

Nous commençons par prouver l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) pour une paramétrixe à droite (l'éxistence d'une paramétrixe à gauche se traite de façon complètement analogue grâce à la remarque (5.19)). Nous nous appuyons sur les résultats de [1] , en particulier la proposition(6.1) et les résultats d'éxistence de symboles ayant un développement asymptotique donné ([1], §1). Remarquons pour commencer que le problème est local , car si P possède une paramétrixe à droite , de classe $OPS^{-m,-k}$, au voisinage de chaque point de $T^*X \setminus 0$, elle en possède une globalement , comme on voit aussitôt par partition de l'unité.

Remarquons maintenant qu'il éxiste $Q_1 \in OPS^{-m,-k}$ tel que $P\,Q_1 = Id - R_1$, avec $R_1 \in OPS^{-\frac{1}{2},-1}$ (par exemple : puisque p_o est transversalement elliptique à droite , on a

$$(p_o\, p_o^* + |\xi|^{2m-k}\, Id)^{-1} \in S^{-2m,-2k}$$

d'après [1], §1 , et on peut prendre $Q_1 = q_1(x,D)$, avec $q_1(x,\xi) = p_o^*\,(p_o\, p_o^* + |\xi|^{2m-k} Id)^{-1}$)).

D'après [1] , §1 , il existe Q_2 tel qu'on ait , pour tout entier N , $Q_2 - \sum_{j<N} (R_1)^j \in OPS^{-\frac{1}{2}N,-N}$. On a alors $PQ_1Q_2 = Id - R_2$, avec $R_2 \in OP\mathcal{H}^o = \bigcap OPS^{-\frac{1}{2}N,-N}$.

Notons r_2 le symbole total de R_2 , tronqué de façon qu'il soit nul pour $|u| < 1$ comme plus haut. Comme $P_\Sigma = a_A$ est inversible à droite en tout point de Σ , le théorème(4.1) affirme que P_Σ possède un inverse à droite de la forme b_A , avec $b \in S^{-k}(\Sigma \times N)$, b_A est continu sur $S^{-\infty}(\Sigma \times N)$, et par raison d'homogénéité on a $b_A(h_\lambda) = \lambda^{\frac{1}{2}k-m}(b_A(h))_\lambda$ pour tout $\lambda > 0$, et tout $h \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$. En particulier il résulte de (5.17) qu'il existe un opérateur de Hermite $Q_3 \in OP\mathcal{H}^{\frac{1}{2}k-m}$ tel que le symbole total q_3 de Q_3 coïncide avec $b_A r_2$ pour $|u| < 1$; on a alors $P\,Q_3 - R_2 \in OP\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}$ (puisque $P_\Sigma\, q_3 = r_2$ pour $|u| < 1$, et d'après (5.18)). On a donc

$$P\,(Q_1Q_2 + Q_3) = Id - R_3$$

avec $R_3 \in OP\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}$. Finalement R_3 est de degré < 0 , et il éxiste un opérateur $Q_4 \sim \sum_0^\infty (R_3)^j$ (on a $Q_4 - Id \in OP\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}$) . Si on pose $Q = (Q_1Q_2 + Q_3)\, Q_4$, on a bien $Q \in OPS^{-m,-k}$, et $PQ \sim Id$.

Montrons enfin l'implication (v) $\Rightarrow$(iv) (cf. aussi [13]). D'après L. Hörmander [12] , l'assertion (v) a la conséquence suivante : pour tout compact $K \subset X$, il existe $C > 0$ tel que pour $x \in K$ et $|\xi| > 1$ on ait , pour toute $\psi \in C_o(\mathbb{R}^n)$:

$$|\xi|^{-k}\|\psi\|^2_{L^2} \leqslant C\left(\|P_{N,x,\xi}\psi\|^2_{L^2} + |\xi|^{-N}\sum_{|\alpha+\beta|\leqslant N}\int |y^\alpha D_y^\beta \psi(y)|^2\,dy\right)$$

où on a posé

$$P_{N,x,\xi} = \sum_{|\alpha+\beta|<N} \frac{1}{\alpha!\beta!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\beta p(x,\xi)\,|\xi|^{-m-\frac{1}{2}|\alpha|+\frac{1}{2}|\beta|}\,y^\alpha D_y^\beta$$

Appliquons ceci au point $(x,\lambda\xi)$, avec $(x,\xi)\in\Sigma$, $|\xi|=1$, $\lambda\to\infty$, en choisissant $N = k+1$. On voit aussitôt que $\lambda^{\frac{1}{2}k}P_{N,x,\lambda\xi}$ tend vers $\sigma^k_{x,\xi}(P)$ pour $\lambda\to\infty$, et on obtient donc à la limite (puisque λ^{k-N} tend vers 0)

$$\|\psi\|^2_{L^2} \leqslant C\,\|\sigma^k_{x,\xi}(P).\psi\|^2_{L^2}$$

ce qui implique (iv) d'après la proposition3.2 .

Comme on a dit , le théorème3.1 facilite l'étude de l'inversibilité d'un opérateur différentiel de la forme a_L , mais celle-ci est loin d'être complète en général. Elle l'est néanmoins lorsque a est un polynôme elliptique du second degré (cf. [5], [13]) , et le critère de [5] ou [13] se traduit en le résultat suivant (qui généralise le résultat de [5] parceque la restriction à Σ de la forme symplectique canonique de T^*X n'a plus besoin d'être de rang constant , et qui précise le résultat de [13] en affirmant l'éxistence d'une paramétrixe d'un type particulier) :

Soit $P\in\mathcal{N}^{m,2}$ (ie. nul d'ordre 2 sur Σ) , transversalement elliptique le long de Σ . On suppose que le symbole principal p_o prend (localement) ses valeurs dans un angle (strictement convexe) $\Gamma\subset\mathbb{C}$. Notons Q la matrice hessienne de p_o (identifiée à une forme bilinéaire symétrique) , et A la matrice fondamentale de p_o (définie par $Q(u,v) = \sigma(u,Av)$, où σ est la forme symplectique canonique de T^*X) : en tout point de Σ , les valeurs propres de A sont de la forme $\pm 2i\lambda_k$ $(k=1,\dots,n)$, avec $\lambda_k\in\Gamma$. Soit d'autre part $V = \ker A^{2n}$ le sous-espace spectral de A relatif à la valeur propre 0 , et $I_2(P) = p_1 - (1/2i)\sum_1^n \partial^2 p_o/\partial x_j\partial\xi_j$ le symbole sous principal (p_o , p_1 sont les deux premiers termes dans le développement asymptotique $p\sim p_o + p_1 + \dots$ du symbole total de P) . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) P possède une paramétrixe bilatère $Q \in OPS^{-m,-2}$

(ii) Pour tout $(x,\xi) \in \Sigma$, tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, et tout vecteur complexe $v \in V$, on a

$$\sum_1^n (2\alpha_j+1)\lambda_j + Q(v,\bar{v}) + I_2(P) \neq 0$$

(iii) $Pf \in H^s_{loc}$ implique $f \in H^{s+m-1}_{loc}$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOUTET DE MONVEL L. : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators. Comm. Pure Appl. Math. 27, 585-639 (1974).

[2] BOUTET DE MONVEL L. et TRÈVES F. : On a class of pseudodifferential operators with double characteristics. Inventiones Math. 24, 1-34,(1974).

[3] BOUTET DE MONVEL L. et TRÈVES F. : On a class of systems of pseudodifferential equations with double characteristics. Comm. Pure Appl. Math. 27, 59-89 (1974).

[4] CALDERON A.P. et VAILLANCOURT R. : On the boundedness of pseudodifferential operators. J. Math. Soc. Japan 23, 374-378 (1971).

[5] GRIGIS A. : Hypoellipticité et paramétrixes pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles. Astérisque, ce vol.

[6] GRUSIN V.V. : On a class of hypoelliptic operators. Mat. Sbornik 83, 456-473 (1970) et Math. USSR Sbornik 12, 458-476 (1970).

[7] GRUSIN V.V. : Pseudodifferential operators in R^n with bounded symbols. Funkt. Anal. i evo pril. 43, 37-50 (1970), et Funct. Anal. Appl.4, 202-212 (1970).

[8] GUILLEMIN V. : Symplectic spinors and partial differential equations. C.R. Colloque sur la géométrie symplectique, Aix en Provence,1974.

[9] GUILLEMIN V. : A symbol calculus for Hermite operators, à paraître.

[10] HELFFER B. : Sur une classe d'opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques multiples. A paraître dans J. Math. Pures Appl.

[11] HELFFER B. : Invariants associés à une classe d'opérateurs pseudodifférentiels. A paraître dans Ann. Inst. Fourier.

[12] HÖRMANDER L. : Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations. A.M.S. Proc. Symp. Pure Math. 10, 138-183 (1967).

[13] HÖRMANDER L. : A class of pseudodifferential operators with double characteristics. Math. Ann. 217, 165-188 (1975).

[14] LERAY J. : Solutions asymptotiques et groupe symplectique. Fourier Integral Operators. Lecture Notes in Math. 459, Springer Verlag.

[15] MENIKOFF A. : Subelliptic estimates for pseudodifferential operators with double characteristics. Preprint.

[16] SEGAL I.E. : Transforms for operators and symplectic automorphics over a locally compact abelian group. Math. Scand. 13, 31-43 (1963).

[17] SJÖSTRAND J.:Parametrices for pseudodifferential operators with multiple characteristics. Ark. för Mat. 12, 85-130 (1974).

[18] WEIL A. : Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. Acta Math. 111, 143-211 (1964).

L.BOUTET DE MONVEL
Université de Grenoble
B.P.116
38402 Saint Martin d'Hères

A.GRIGIS
Mathématiques - Bâtiment 425
Université de Paris XI
91405 Orsay

B.HELFFER
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91120 Palaiseau