JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN-MICHEL BONY

Propagation des singularités différentiables pour une classe d'opérateurs différentiels à coefficients analytiques

Journées Équations aux dérivées partielles (1975), p. 43-91

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1975____43_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 34-35 (1976) p.43-91

PROPAGATION DES SINGULARITÉS DIFFÉRENTIABLES POUR UNE CLASSE D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS A COEFFICIENTS ANALYTIQUES.

Par Jean-Michel BONY

Cet article est consacré à l'étude des opérateurs (pseudo-) différentiels analytiques P dont la variété caractéristique est régulière, involutive, de codimension $n \geq 1$, et qui satisfont à une condition de Levi ([7], [20]). Pour les hypothèses précises, voir le n° 1.1.

Nous démontrons que si une distribution u vérifie $Pu \in \mathcal{C}^\infty$, le spectre singulier différentiable (wave front) de u se propage le long des n-feuilles bicaractéristiques. Nous démontrons également la résolubilité microlocale de P dans les distributions et dans les fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

Dans [B.S.], nous avons démontré des résultats du même type, sans condition de Levi, pour le spectre singulier analytique des hyperfonctions. Il est ici indispensable de faire une telle hypothèse, le comportement des singularités différentiables étant fort différent en l'absence de condition de Levi. (Voir [4], [5], [13]).

Dans [20], J. Sjöstrand a démontré les mêmes résultats que nous, lorsque l'opérateur P est à coefficients $\mathcal{C}^\infty$, mais avec des restrictions sur la multiplicité des caractéristiques complexes de P. Il s'agit là d'un phénomène qui n'a rien de technique. Si $P(x,D_x)$ est un opérateur elliptique que nous faisons opérer dans $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$ sur les distributions $u(x,t)$, il satisfait à nos hypothèses sur la variété caractéristique et à la condition de Levi. La propagation des singularités appliquée à $u(x)\delta(t)$, où u vérifie $Pu = 0$, entraîne que u s'annule identiquement si u est nulle au voisinage d'un point. Ce travail (coefficients analytiques) et celui de Sjöstrand (caractéristiques complexes au plus doubles), correspondent aux deux cas les plus typiques d'unicité du problème de Cauchy.

Cette remarque justifie également l'emploi de nos techniques : utilisation des valeurs au bord de fonctions holomorphes à croissance lente pour traiter de singularités différentiables. La transformation de Fourier prendrait plus difficilement en compte l'hypothèse d'analycité des coefficients. En quelque sorte, notre méthode consiste à démontrer "avec paramètres", que les solutions d'équations elliptiques à coefficients analytiques sont restrictions de fonctions holomorphes.

Nous suivrons de très près la démonstration de [B.S.] : se ramener par transformation canonique au cas d'un opérateur $P(x,t,D_x,D_t)$ partiellement elliptique en x ; démontrer un théorème de Cauchy-Kowalewski pseudo-différentiel dans le domaine complexe ; en déduire des théorèmes d'existence et de prolongement pour les solutions holomorphes de $P(z,w,D_z,D_w)\, f(z,w) = 0$; en passant aux valeurs au bord, démontrer qu'une solution $u(x,t)$ de $P(x,t,D_x D_t)u(x,t)=0$ est restriction au réel de $u(z,t)$ holomorphe en z ; enfin utiliser la propagation des singularités pour les distributions partiellement holomorphes. Les points nouveaux qui apparaissent sont les suivants.

Depuis les travaux de Martineau ([15], [16], [17]), bien peu a été écrit sur les relations entre distributions et hyperfonctions, alors que de nombreux développements sont apparus. Nous consacrons un appendice à ce sujet, en n'énonçant au n° 1.2. que ce qui est indispensable pour la lecture de notre article. Ainsi, sous des hypothèses convenables sur les spectres singuliers, on peut définir $\int K(x,y)\, u(y)dy$ comme distribution [F.I.O.I] et comme hyperfonction [S.K.K.]. Il nous faut démontrer que les deux définitions coïncident, ce qui contient le cas des opérateurs pseudo-différentiels, et des transformations de contact quantifiées / opérateurs intégraux de Fourier. Il nous faut également démontrer que les trois notions de spectre singulier analytique de Sato [S.K.K.] de Hörmander [11] et de Bros-Iagolnitzer [1], [2] sont les mêmes pour les distributions.

En second lieu, nous devons démontrer un théorème de Cauchy-Kowalewski pseudo-differentiel, en contrôlant non seulement comme dans [B.S.] la forme géométrique des domaines d'existence, mais encore la croissance des solutions (c'est là qu'intervient de façon décisive la condition de Levi). C'est l'objet du paragraphe 2, où la nécessité de tenir compte des commutateurs complique encore le calcul pseudo-différentiel.

La transformation du théorème de Cauchy-Kowalewski en théorèmes d'existence et de prolongement suit de très près [B.S.] et nous nous permettons d'être un peu plus rapide sur ces points. La différence essentielle est qu'il faut contrôler la croissance des fonctions holomorphes dont on prend la valeur au bord, et que tous les arguments de cohomologie doivent être remplacés par des arguments de cohomologie à croissance.

On obtient ainsi la résolubilité microlocale, le caractère partiellement holomorphe des solutions, et, en étendant les résultats de [F.I.O.II.] sur la propagation des singularités des distributions partiellement holomorphes, le résultat final.

§ 1. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS ET RÉDUCTION AU CAS PARTIELLEMENT ELLIPTIQUE.

1.1. Notations et énoncé du théorème principal.

Soit $P(x,D_x)$ un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre μ, défini au voisinage d'un point (x_o,ξ_o) de $\mathbb{R}^\nu \times (\mathbb{R}^\nu \setminus \{0\})$. Soit P_μ son symbole principal et $V = \{(x,\xi) | P_\mu(x,\xi) = 0\}$ sa variété caractéristique. Nous ferons les hypothèses suivantes sur P.

(1.1.1) V est une variété analytique réelle non singulière, de codimension n.

(1.1.2) $P_\mu(x,\xi)$ s'annule sur V exactement à l'ordre m, c'est-à-dire que pour tout point (x,ξ) de V et tout vecteur $(\Delta x, \Delta\xi)$ transverse en (x,ξ) à V, il existe $a \neq 0$ tel que l'on ait

$$P_\mu(x + \varepsilon\Delta x, \xi + \varepsilon\Delta\xi) = a\varepsilon^m + o(\varepsilon).$$

(1.1.3) V est involutive, et la restriction de la 1-forme canonique $\sum\limits_1^\nu \xi_i dx_i$ à V est partout non nulle.

Si $q_1(x,\xi),\ldots, q_n(x,\xi)$ sont des fonctions homogènes de degré 1, s'annulant sur V, et dont les différentielles sont linéairement indépendantes sur V, la condition (1.1.3) signifie que

$$\{q_i,q_j\} = 0 \quad \text{sur} \quad V, \text{ et}$$

$dq_1,\ldots, dq_n, \Sigma\, \xi_i dx_i$ sont linéairement indépendantes sur V. Il résulte de la condition (1.1.2) que l'on peut écrire

$$P_\mu(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,\xi)\, q^\alpha(x,\xi)$$

avec $\alpha = (\alpha_1,\ldots, \alpha_n)$ et $q^\alpha = q_1^{\alpha_1} \ldots q_n^{\alpha_n}$, où les a_α sont homogènes de degré $\mu-m$ et vérifient

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,\xi)\, u^\alpha \neq 0, \text{ pour } (x,\xi) \in V \text{ et } u = (u_1,\ldots, u_n) \neq 0.$$

La condition suivante est le condition de Levi ([7], [20])

(1.1.4) Soient $Q_i(x,D_x)$, $i = 1,\ldots, n$ des opérateurs pseudo-différentiels de symboles principaux respectifs $q_i(x,\xi)$, il existe alors des opérateurs pseudo-différentiels $A_\alpha(x,D_x)$, $0 \leq |\alpha| \leq m$, d'ordre $\mu-m$, tels que

$$P(x,D_x) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} A_\alpha(x,D_x)\, Q(x,D_x)^\alpha.$$

Cette condition, indépendante du choix des Q_i, est en fait une condition sur les termes d'ordre $\mu, \mu-1, \ldots, \mu-m+1$ du symbole de P.

Nous aurons à utiliser les deux notions suivantes pour décrire les singularités d'une distribution u sur un ouvert ω. Nous montrerons en appendice que le spectre singulier analytique de [S.K.K.] coïncide pour les distributions avec le support essentiel de Bros-Iagolnitzer [1], [2] et avec le front d'onde analytique de Hörmander [11].

<u>Spectre singulier analytique</u> $SSA(u)$. C'est un sous-ensemble fermé de $\omega \times \mathbb{S}^{\nu-1}$ caractérisé par la propriété suivante. Un point (x_o,ξ_o) n'appartient pas à $SSA(u)$ si et seulement si il existe un nombre fini de cônes Γ_α de $\mathbb{R}^\nu$, tels que $\xi_o \notin \Gamma_\alpha^o$, et des fonctions holomorphes f_α définies dans l'intersection de $\mathbb{R}^\nu + i\Gamma_\alpha$ et d'un voisinage de x_o, telles que l'on ait $u = \Sigma\, b(f_\alpha)$ au voisinage de x. [On a noté ici Γ^o le polaire de Γ, et $b(.)$ la valeur au bord].

<u>Spectre singulier différentiable</u> $SSD(u)$ [ou wave front]. C'est un sous-ensemble fermé de $\omega \times \mathbb{S}^{n-1}$ caractérisé par la propriété suivante. Un point (x_o,ξ_o) n'appartient pas à $SSD(u)$ si on peut trouver une fonction $\varphi \in \mathcal{E}_o^\infty$, égale à 1 au voisinage de x_o, telle que $\widehat{\varphi u}(\xi)$ soit à décroissance rapide dans un voisinage conique de la direction ξ_o.

Rappelons enfin que, sous les hypothèses (1.1.1) et (1.1.3), les champs hamiltoniens H_{q_i} forment un système de Frobenius sur V et définissent localement un feuilletage de V par des feuilles de dimension n dites feuilles bicaractéristiques.

<u>THÉORÈME 1.1.1</u>.- <u>Supposons que</u> P <u>vérifie</u> (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3), (1.1.4) <u>au voisinage de</u> (x_o,ξ_o). <u>On a alors</u>

a) (Existence $\mathcal{D}'$). Soit v une distribution définie au voisinage de x_0. Il existe alors une distribution u, définie au voisinage de x_0, telle que

$$(x_0,\xi_0) \notin SSA(Pu-v)$$

b) (Existence C^∞). Soit ψ une distribution définie au voisinage de x_0, telle que $(x_0,\xi_0) \notin SSD(\psi)$. Il existe alors une distribution φ, définie au voisinage de x_0, telle que $(x_0,\xi_0) \notin SSD(\varphi)$ et $(x_0,\xi_0) \notin SSA(P\varphi - \psi)$.

c) (Propagation des singularités). Soit u une distribution définie au voisinage de x, telle que $(x_0,\xi_0) \notin SSD(Pu)$. Alors, au voisinage de (x_0,ξ_0), l'ensemble $SSD(u)$ est réunion de feuilles bicaractéristiques.

Remarque. Pris à la lettre, l'énoncé précédent n'a de sens que si P est un opérateur différentiel. Si P est un opérateur pseudo-différentiel (au sens de ([S.K.K.]) qui n'est défini qu'au voisinage de (x_0,ξ_0), nous verrons en (1.2.5) et (1.2.6) que Pu désigne une distribution définie modulo des distributions dont le spectre singulier analytique ne contient pas (x_0,ξ_0). Le sens du théorème 1.1.1. est alors clair.

1.2. Distributions, hyperfonctions et microfonctions.

Nous énonçons ici sans démonstration un certain nombre de propriétés qui seront utilisées de manière courante dans la suite du texte. Certaines figurent dans [S.K.K.], [15], [19] et [B.S.], d'autres seront démontrées en appendice.

1.2.1. Les faisceaux des fonctions analytiques, des fonctions $\mathcal{E}^\infty$, des distributions, des hyperfonctions s'identifient à des sous-faisceaux les uns des autres : $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}^\infty \subset \mathcal{D}' \subset \mathcal{B}$ [dans $\mathbb{R}^n$ muni de son orientation et de sa mesure de Lebesgue]. On peut voir cette identification de la façon suivante.

Si Γ est un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, si ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et si f est holomorphe dans l'intersection de $\omega + i\Gamma$ et d'un voisinage complexe de ω dans $\mathbb{C}^n$ (nous noterons $f \in \tilde{\mathcal{O}}(\omega + i\Gamma)$, on peut définir la valeur au bord $b(f) \in \mathcal{B}(\omega)$.

Si f est à croissance lente (c'est-à-dire $|f(x+iy)| \leq C|y|^N$ pour N convenable), alors $b(f) = \lim\limits_{y\to 0,\, y\in\Gamma} f(x+iy) \in \mathcal{D}'$, la limite existant au sens des distributions dans ω.

Si f est bornée ainsi que toutes ses dérivées (ou ce qui revient au même, s'il existe N tel que pour tout α on ait $|D_z^\alpha f(z)| \leq C_\alpha |y|^{-N}$), la limite est de classe $\mathcal{E}^\infty$.

1.2.2. Soit u une distribution, et Γ_α une famille finie de cônes ouverts convexes de $\mathbb{R}^n$, tels que les intérieurs de leurs polaires ($\operatorname{int} \Gamma_\alpha^\circ$) recouvrent $\mathbb{S}^{n-1}$. Il existe alors des $f_\alpha \in \tilde{\mathcal{O}}(\omega + i\Gamma_\alpha)$ à croissance lente, telles que $u = \Sigma\, b(f_\alpha)$ dans ω (cela peut se démontrer facilement, voir par exemple le nº 4.1.).

La même conclusion est valable (avec la convention habituelle si $SSA(u) = \emptyset$) si $\omega \times \cup(\operatorname{int} \Gamma_\alpha^\circ)$ recouvre $SSA(u)$. Cela résulte de l'identification de $SSA(u)$ avec le support essentiel de Bros-Iagolnitzer (voir A 2.5. et le nº A 9).

1.2.3. De même, si u est de classe $\mathcal{E}^\infty$, et si les $\operatorname{int} \Gamma_\alpha^\circ$ recouvrent $SSA(u)$, il existe des $f_\alpha \in \tilde{\mathcal{O}}(\omega + i\Gamma_\alpha)$ bornées ainsi que toutes leurs dérivées, telles que $u = \Sigma\, b(f_\alpha)$.

Si u est une distribution, et si les $\operatorname{int} \Gamma_\alpha^\circ$ recouvrent $SSD(u)$, il existe φ de classe $\mathcal{E}^\infty$, et des $f_\alpha \in \tilde{\mathcal{O}}(\omega + i\Gamma_\alpha)$ tels que

$$u = \varphi + \Sigma\, b(f_\alpha).$$

1.2.4. Le faisceau $\mathcal{C}$ des microfonctions sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$ peut être défini par

$$\mathcal{C}(U) = \frac{\mathcal{B}(\omega)}{\{u \in \mathcal{B}(\omega) \mid SSA(u) \subset \complement U\}} \quad \text{pour} \quad U \subset \omega \times \mathbb{S}^{n-1}.$$

Si $u \in \mathcal{B}(\omega)$, on lui associe ainsi canoniquement un élément, fréquemment (et abusivement) noté encore u, de $\mathcal{C}(\omega \times \mathbb{S}^{n-1})$. Ce dernier est nul si et seulement si u est analytique.

Nous définissons les sous-faisceaux $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{E}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$ (faisceaux des microdistributions et des microfonctions différentiables) comme étant les faisceaux associés aux préfaisceaux :

$$U \rightsquigarrow \frac{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)}{\{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid SSA(u) \subset \complement U\}} \quad \text{et} \quad U \rightsquigarrow \frac{\mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^n)}{\{u \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid SSA(u) \subset \complement U\}} .$$

Une microfonction $u \in \mathcal{C}(U)$ appartient à $\mathcal{D}'(U)$ [resp. $\mathcal{E}^\infty(U)$], si pour tout compact K de U, on peut trouver une distribution [resp. une fonction $\mathcal{E}^\infty$] θ telle que, en notant encore θ l'élément de $\mathcal{C}(\omega \times \mathbb{S}^{n-1})$ canoniquement associé, on ait $u = \theta$ au voisinage de K.

Pour $u \in \mathcal{C}(U)$, nous noterons $SSA(u)$ le support de u, et $SSD(u)$ le complémentaire du plus grand ouvert V tel que $u|_V \in \mathcal{E}^\infty(V)$.

<u>Remarque</u>. Ces notations sont un peu abusives, mais sans grand danger. Nous manipulerons en fait le plus souvent des représentants (de vraies distributions) d'éléments de $\mathcal{D}'(U)$, mais il faudra toujours lire les égalités comme des égalités dans $\mathcal{D}'(U)$ [c'est-à-dire modulo les distributions qui sont micro-analytiques dans U]. De même, comme nous allons le voir, un opérateur pseudo-différentiel défini dans U, appliqué à une distribution, ne définit qu'un élément de $\mathcal{D}'(U)$.

1.2.5. Les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre fini constituant un faisceau d'anneau $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$. Il résulte de 1.2.6. ou de A 10 que P opère également de $\mathcal{D}'(U)$ dans lui-même et de $\mathcal{E}^\infty(U)$ dans lui-même. Les faisceaux $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}^\infty$ sont ainsi munis d'une structure de $\mathcal{P}$-module à gauche.

1.2.6. Supposons que U contienne $\omega \times \{\xi \mid |\xi'| \leq k\,\xi_1\}$ où ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $f \in \tilde{\mathcal{O}}(\omega + iG)$ où G est le cône de révolution défini par $x_1 > k|x'|$. La valeur au bord $b(f)$ est canoniquement identifiée à une microfonction sur $\omega \times \mathbb{S}^{n-1}$, à support dans $\omega \times G^o$. La microfonction $Pb(f)$ est alors une microfonction sur U, à support dans $\omega \times G^o$, et on peut en la prolongeant par 0 en dehors de $\bar{U}$ la considérer comme une microfonction sur $\omega \times \mathbb{S}^{n-1}$.

Il existe alors $g \in \tilde{\mathcal{O}}(\omega + iG)$ telle que l'on ait $Pb(f) = b(g)$.

Rappelons comment dans [B.S.], en nous inspirant de [12], nous donnions une construction de g. Soit Σ l'hyperplan de $\mathbb{C}^n$ d'équation $z_1 = i\varepsilon$. On sait alors définir l'opérateur P_Σ (voir n° 2.1. plus loin). Pour ε assez petit, $P_\Sigma f \in \tilde{\mathcal{O}}(\omega + iG)$, et on peut prendre $g = P_\Sigma f$, la microfonction $b(g)$ ne dépendant pas du choix de ε. Les majorations du n° 2.3. montrent que si f est à croissance lente [resp. bornée ainsi que toutes ses dérivées], il en est de même de $P_\Sigma f$.

1.2.7. <u>Transformations de contact quantifiées</u> (opérateurs intégraux de Fourier)

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$, et T un difféomorphisme analytique de U sur V qui conserve la structure de contact (ou, ce qui revient au même, une transformation canonique homogène de degré 1, entre les ouverts coniques $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ associés).

Il existe alors, de manière non unique, un isomorphisme $\tilde{T}$ de $\mathcal{P}_{|U}$ sur $\mathcal{P}_{|V}$, de $\mathcal{E}_{|U}$ sur $\mathcal{E}_{|V}$, compatible avec les structures de faisceau d'anneau pour $\mathcal{P}$, et de faisceau de $\mathcal{P}$-module pour $\mathcal{E}$, qui respecte les sous-faisceaux $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{E}^\infty$, et compatible avec l'action de T sur le symbole principal (voir A 11.).

1.3. <u>Forme réduite de P et nouvelles notations</u>.

D'après les hypothèses (1.1.1) et (1.1.3) faites sur l'opérateur P, il est possible de trouver une transformation canonique T, telle que en nommant $(x_1 \dots x_n, t_1 \dots t_{\nu-n})$ les nouvelles coordonnées, l'image de (x_0, ξ_0) soit le point $x = 0$, $t = 0$, $\xi = 0$, $\tau = \tau_0 = (1,0\dots0)$, et l'image de la variété caractéristique V soit définie par $\xi = 0$.

Soit $\tilde{T}$ une "transformation de contact quantifiée" associée à T, et transformant les microfonctions appartenant à $\mathcal{D}'$ ou $\mathcal{E}^\infty$ en microfonctions de même nature (1.2.7). En appelant encore P le produit de $\tilde{T}(P)$ par un opérateur elliptique d'ordre $-\mu + m$, on est ramené à démontrer le théorème 1.1.1. dans le cas suivant :

$$\mathbb{R}^\nu = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \; ; \; x \in \mathbb{R}^n, \; t \in \mathbb{R}^p, \; (\xi,\tau) \in \mathbb{S}^{n+p-1}$$

$P(x,t,D_x,D_t)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m, défini dans un voisinage U du point $x = 0$, $t = 0$, $\xi = 0$, $\tau = \tau_0 = (1,0\ldots0)$. On a

$$P(x,t,D_x,D_t) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} A_\alpha(x,t,D_x,D_t) D_x^\alpha$$

où les A_α sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 dans U, de symbole principal a_α, vérifiant

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \; \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x,t,0,\tau)\xi^\alpha \neq 0, \text{ pour } (x,t,0,\tau) \in U.$$

Le théorème 1.1.1. résultera alors du théorème suivant, plus précis sur deux points. D'une part la propagation des singularités apparaît comme conséquence d'un théorème de régularité (les solutions de $Pu = 0$ sont partiellement holomorphes en x). D'autre part, dans le théorème d'existence, on a un contrôle du support de la solution.

THÉORÈME 1.3.1.-

a) *Existence microlocale. Soit v appartenant à $\mathcal{D}'(U)$ [resp. $\mathcal{E}^\infty(U)$]. Il existe alors u appartenant à $\mathcal{D}'(U)$ [resp. $\mathcal{E}^\infty(U)$] solution de*

$$\mathrm{SSA}(Pu - v) \not\ni (0,0,0,\tau_0).$$

b) *Existence précisée. Soit Ω un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n+p}$, et K un compact de $\mathbb{S}^{n+p-1}$ avec $\Omega \times K \subset U$. Pour tout voisinage K' de K, et pour tout v appartenant à $\mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{S}^{n+p-1})$, avec $\mathrm{SSA}(v) \subset \Omega \times K$, il existe Ω' voisinage de 0, et $u \in \mathcal{D}'(\Omega' \times \mathbb{S}^{n+p-1})$ avec $\mathrm{SSA}(u) \subset \Omega' \times K'$, solution de $Pu = v$.*

c) *Régularité. Soit u appartenant à $\mathcal{D}'(U)$, solution de $Pu = 0$. Il existe alors un voisinage $\tilde{U}$ de $(0,0,0,\tau_0)$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{S}^{2n+p-1}$, et il existe $\tilde{u} \in \mathcal{D}'(\tilde{U})$, solution de $\partial/\partial\bar{z}_j \, \tilde{u} = 0$ $(j = 1,\ldots, n)$ telle que la trace de $\tilde{u}$ sur $\mathbb{R}^{n+p}$ soit égale à u.*

d) Propagation. Soit u appartenant à $\mathcal{D}'(U)$, telle que l'on ait $SSD(Pu) = \emptyset$ et $(0,0,0,\tau_0) \in SSD(u)$. Soit F la composante connexe de $(0,0,0,\tau_0)$ dans $\{(x,t,\xi,\tau) \in U | t = 0,\ \xi = 0,\ \tau = \tau_0\}$. Alors on a $F \subset SSD(u)$.

L'utilisation du théorème 2.2.2 de [S.K.K. ch. II] (théorème de préparation de Weierstrass) permet de se ramener à une forme de P polynomiale par rapport à D_{x_n}.

PROPOSITION 1.3.2. Il existe des opérateurs E et $\tilde{P}$ définis au voisinage de $(0,0,0,\tau_0)$ tels que l'on ait $P = E\tilde{P}$, et que E soit elliptique, et que $\tilde{P}$ soit de la forme

$$\tilde{P}(x,t,D_x,D_t) = D_{x_n}^m + \sum_{\substack{0 \leq |\alpha| \leq m \\ \alpha_n < m}} \tilde{A}_\alpha(x,t,D_x,D_t) D_x^\alpha$$

où les $\tilde{A}_\alpha$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0, ne dépendent pas de D_{x_n}.

§ 2. ESTIMATIONS A CROISSANCE POUR LES SOLUTIONS DU PROBLÈME DE CAUCHY PSEUDO-DIFFÉRENTIEL DANS LE DOMAINE COMPLEXE.

Il nous faut complèter, et compliquer, les résultats de [B.S.] (§ 2 et 3), pour faire intervenir la croissance des solutions (d'où la fonction $\lambda(z_1)$). De plus, les commutateurs font apparaître des opérateurs de simple couche le long de Σ qu'il nous faut également estimer.

2.1. Rappels et compléments sur les opérateurs pseudo-différentiels dans le domaine complexe.

Nous nous plaçons dans l'espace complexe $\mathbb{C}^\nu$ de point courant $z = (z_1, z')$ et reprenons les notations de [B.S.] § 2. Soit $P(z,D_z)$ un opérateur pseudo-différentiel, dont le symbole $P(z,\zeta)$ est défini pour z voisin de 0, et pour ζ vérifiant $|\zeta_j| \leq k_0 |\zeta_1|$.

Rappelons qu'un ouvert convexe Ω est dit $k-\Sigma$-plat, où k est un réel > 0, et Σ un hyperplan d'équation $z_1 = \sigma$, si on a :

$(z \in \Omega\ ;\ \tilde{z} \in \Sigma\ ;\ |z_1 - \tilde{z}_1| \geq k|z_j - \tilde{z}_j| \quad j = 2,\ldots,\nu)$ implique $(\tilde{z} \in \Omega \cap \Sigma)$.

Si Ω est un ouvert $k-\Sigma$-plat suffisamment voisin de 0, avec $k \leq k_0$, on sait alors [B.S., prop. 2.3.3.] défini l'opérateur P_Σ de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans lui-même, et on a

$$P_\Sigma f(z) = \int_{\Sigma\gamma\Sigma} K(z,z-\tilde{z})\, f(\tilde{z})\, d\tilde{z}$$

où K est le noyau de l'opérateur $P(z,D_z)$, et où γ est un ν-cycle s'appuyant sur Σ convenable.

Si P est d'ordre ≤ 0, le noyau $K(z,w)$ est du type suivant :

$$K(z,w) = \frac{m(z)}{w_1\ldots w_\nu} + N(z,w)\log w_1,$$

avec [B.S., n° 2.2.]

$$(2.1.1) \qquad N(z,w) = \frac{1}{w_1\ldots w_\nu} \sum_{\substack{\alpha'\geq 0,\alpha_1<0\\ |\alpha|\leq 0}} \frac{\alpha'!\,a_\alpha(z)}{(-\alpha_1)!} \left(\frac{w_1}{w'}\right)^{\alpha'} w_1^{-|\alpha|}\ .$$

la série convergeant normalement pour $\left|\frac{w_1}{w_j}\right| \leq k_0$ et $|w_1|$ assez petit.

Pour énoncer la proposition suivante,nous posons, comme dans [B.S.] n° 2.4, pour z appartenant à Ω, et pour $I \subset \{2,\ldots,\nu\}$

$$d_I(z) = \inf\{\sup_{i\in I} |z_i - \tilde{z}_i|\ |\ \tilde{z} \in \Omega \text{ et } \tilde{z}_j = z_j \text{ pour } j \notin I\}.$$

Pour toute fonction λ positive, définie sur Ω et ne dépendant que de z_1, nous poserons

$$\hat{\lambda}(z_1) = \sup_{t\in[0,1]} \lambda[tz_1 + (1-t)\sigma].$$

<u>PROPOSITION 2.1.1</u>. <u>Supposons</u> P <u>d'ordre</u> ≤ 0, <u>soit</u> (I,J) <u>une partition de</u> $\{2,\ldots,\nu\}$, <u>et soit</u> Ω <u>un ouvert</u> $k_1-\Sigma-$ <u>plat assez voisin de</u> 0, <u>avec</u> $k_1 < k_0$. <u>Il existe alors une constante</u> C <u>telle que, si</u> $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ <u>vérifie une majoration</u> :

$$|f(z)| \leq \lambda(z_1) d_I(z)^{-1} d_J(z)^{-1}\ , \ \underline{\text{on ait}}$$

$$|P_\Sigma f(z)| \leq C\,\hat{\lambda}(z_1) d_I(z)^{-1} d_J(z)^{-1}.$$

La constante C ne dépend que de k_1, d'une borne du diamètre de Ω, et des majorations vérifiées par le symbole de P. En particulier, si P dépend continument d'un paramètre, on peut choisir C (localement) indépendante de ce paramètre.

Le résultat étant évident pour la multiplication par $m(z)$, on peut se ramener au cas où le noyau K de P est de la forme $K(z,w) = N(z,w)\log w_1$.

On a alors ([B.S.] n° 2.4)

$$P_\Sigma f(z) = 2i\pi \int_\gamma N(z,z-\tilde{z})\, f(\tilde{z})\, d\tilde{z} \quad \text{où } \gamma \text{ est la } \nu\text{-chaine :}$$

$$\gamma : [0,1] \times \mathbb{T}^{\nu-1} \to \Omega \quad [\mathbb{T} = \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}]$$

$$\gamma_1(t) = z_1 + t_1(\sigma - z_1)$$

$$\gamma_j(t) = z_j + [a_j + \frac{t_1}{k} |\sigma - z_1|]e^{2i\pi t_j},$$

où les $a_j > 0$ sont convenablement choisis, et $k_1 < k < k_0$. On a alors

$$|P_\Sigma f(z)| \leq 2i\pi \int_\gamma \lambda(\tilde{z}_1)\, d_I(\tilde{z})^{-1}\, d_J(\tilde{z})^{-1}\, |N(z,z-\tilde{z})|\,|d\tilde{z}|.$$

Il est facile de voir que $\lambda(\tilde{z}_1) \leq \hat{\lambda}(z_1)$, tandis que la proposition 2.4.2. de [B.S.] prouve que l'on a

$$2i\pi \int_\gamma |N(z,z-\tilde{z})|\, d_I(\tilde{z})^{-1}\, d_J(\tilde{z})^{-1} |d\tilde{z}| \leq C\, d_I(z)^{-1}\, d_J(z)^{-1}$$

d'où le résultat (avec la dépendance précise de C).

2.2. Opérateurs de simple couche.

DÉFINITION 2.2.1. *Si Ω est un ouvert $k_0 - \Sigma$ -plat voisin de 0, nous appellerons opérateur de simple couche, un opérateur du type*

$$T_\Sigma f(z) = \int_{\gamma'} L(z,z-\tilde{z}')\, f(\tilde{z}')d\tilde{z}'$$

où γ' est la frontière distinguée d'un $(\nu-1)$-polydisque de l'hyperplan Σ, centré au point (σ,z'), de rayon au moins égal à $\frac{1}{k_0}|\sigma - z_1|$, et où le noyau L est du type suivant :

$$L(z,w) = \frac{1}{w_2 \cdots w_\nu} \sum_{\alpha' \geq 0, p \geq 0} \ell_{p\alpha'}(z) \left(\frac{w_1}{w'}\right)^{\alpha'} w_1^p \tag{2.2.1}$$

la série convergeant normalement pour $|\frac{w_1}{w'}| \leq k_0$, $|w_1| < r_0$ et z voisin de 0.

PROPOSITION 2.2.2. *Soit* T *un opérateur de simple couche, et soit* Ω *un ouvert* k_o - Σ*-plat assez voisin de* 0. *Il existe alors une constante* C *telle que, pour* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *vérifiant* $|f(z)| \leq \lambda(z_1)\, d_I(z)^{-1} d_J(z)^{-1}$, *on ait* $T_\Sigma f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *et*

$$|T_\Sigma f(z)| \leq C\, \hat{\lambda}(z_1)\, d_I(z)^{-1}\, d_J(z)^{-1}.$$

La constante C *étant indépendante de* Ω *(assez petit) et ne dépendant que d'une borne de la somme (en norme) de la série intervenant dans* (2.2.1).

On voit facilement en effet que, si $\tilde{z}'$ vérifie $\tilde{z}'_1 = \sigma$ et $|\tilde{z}'_j - z_j| = \frac{1}{k_o}|\sigma - z_1|$, on a $d_I(\tilde{z}) \leq \frac{d_I(z)}{2}$. On a donc

$$|T_\Sigma f(z)| \leq 4(2\pi)^{\nu-1}\, \lambda(\sigma) d_I(z)^{-1}\, \Sigma\, \ell_{p\alpha'}(z)\, k_o^{|\alpha'|}\, |\sigma - z_1|^p$$

d'où le résultat.

PROPOSITION 2.2.3. *Si* T *est un opérateur de simple couche, et si* $j = 2,\ldots,\nu$, *on a, pour* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$

$$\frac{\partial}{\partial z_j} T_\Sigma f = T_\Sigma \frac{\partial f}{\partial z_j} + S_\Sigma f$$

où S *est un opérateur de simple couche.*

On a en effet $\frac{\partial}{\partial z_j} T_\Sigma f = \int_{\gamma'} \frac{\partial L}{\partial z_j}(z, z-\tilde{z}) f(\tilde{z}) d\tilde{z} + \int_{\gamma'} \frac{\partial L}{\partial w_j}(z, z-\tilde{z})\, f(\tilde{z})\, d\tilde{z}$

et, par intégration par parties,

$$\int \frac{\partial L}{\partial w_j}(z, z-\tilde{z}) f(\tilde{z}) d\tilde{z} = \int L(z, z-\tilde{z})\, \frac{\partial f}{\partial z_j}(\tilde{z}) d\tilde{z}$$

d'où le résultat, le noyau de S étant $\frac{\partial L}{\partial z_j}$.

PROPOSITION 2.2.4. *Si* T *est un opérateur de simple couche, on a*

$$\frac{\partial}{\partial z_1} T_\Sigma f = S_{o\Sigma} f + \sum_{j=2}^{\nu} S_{j\Sigma} \frac{\partial f}{\partial z_j},$$

où S_o *et les* S_j *sont des opérateurs de simple couche.*

En dérivant (2.2.1) par rapport à w_1, il apparaît des termes en $(\frac{w_1}{w'})^{\alpha'} w_1^{p-1}$ et des termes en $\frac{1}{w_j} (\frac{w_1}{w'})^{\alpha'-\varepsilon_j} w_1^p$, et on peut donc écrire

$$\frac{\partial}{\partial w_1} L(z,w) = L_o(z,w) + \sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{w_j} L_j(z,w),$$

où L_o et les L_j sont des noyaux d'opérateurs de simple couche.

Mais la série de Laurent en w_j de $\frac{1}{w_j} L_j(z,w)$, ne possède pas de termes en $\frac{1}{w_j}$. On a donc

$$\frac{1}{w_j} L_j(z,w) = \frac{\partial}{\partial w_j} M_j(z,w)$$

où les M_j sont des noyaux d'opérateurs de simple couche.

On a
$$\frac{\partial}{\partial z_1} T_\Sigma f = \int_{\gamma'} \frac{\partial L}{\partial z_1} (z,z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z} + \int_{\gamma'} L_o(z,z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z}$$
$$+ \sum_{j=2}^{\nu} \int_{\gamma'} \frac{\partial M_j}{\partial w_j} (z,z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z}$$

ce qui démontre la proposition, à l'aide d'une intégration par parties.

Remarque 2.2.5. Si P est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, de noyau $K(z,w) = \frac{m(z)}{w_1 \dots w_\nu} + N(z,w)\log w_1$ l'expression (2.1.1) de N montre que l'on peut écrire

$$N(z,w) = L_o(z,w) + \sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{w_j} L_j(z,w)$$

où L_o et les L_j sont des noyaux d'opérateurs de simple couche. Par l'argument ci-dessus, on peut également écrire

$$N(z,w) = L_o(z,w) + \sum_{2}^{\nu} \frac{\partial}{\partial w_j} M_j(z,w)$$

où L_o et les M_j sont des noyaux d'opérateurs de simple couche.

2.3. Estimation des commutateurs.

Si P et Q sont des opérateurs pseudo-différentiels, on sait définir leur composé PQ et on a, lorsque Q est d'ordre ≤ 0 ([B.S.] n° 2.1.)

$$(PQ)_\Sigma = P_\Sigma \circ Q_\Sigma .$$

Cette formule n'est pas valable lorsque Q est d'ordre quelconque, il apparaît en outre des opérateurs du type de ceux que nous venons d'étudier.

PROPOSITION 2.3.1. Soit P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, et soit $\beta' = (0, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Il existe alors des opérateurs $Q_{\alpha'}$, pseudo-différentiels d'ordre 0, avec $\alpha' = (0, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ tels que l'on ait

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\beta'} P_\Sigma f = P_\Sigma \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\beta'} f + \sum_{|\alpha'|<|\beta'|} Q_{\alpha'\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha'} f .$$

Pour $j = 2,\ldots, \nu$, on a

$$\frac{\partial}{\partial z_j} P_\Sigma f = \int_{\Sigma\gamma\Sigma} \frac{\partial K}{\partial z_j}(z,z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z} + \int_{\Sigma\gamma\Sigma} \frac{\partial K}{\partial w_j}(z,z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z}$$

mais, $\displaystyle\int_{\Sigma\gamma\Sigma} \frac{\partial K}{\partial w_j}(z,z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z} = \int_{\Sigma\gamma\Sigma} K(z,z-\tilde{z}) \frac{\partial f}{\partial z_j}(\tilde{z})d\tilde{z}$ par intégration par parties, et $\dfrac{\partial K}{\partial z_j}$ est le noyau de l'opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 $[\frac{\partial}{\partial z_j}, P]$.

On obtient donc $\dfrac{\partial}{\partial z_j} P_\Sigma f = P_\Sigma \dfrac{\partial f}{\partial z_j} + [\dfrac{\partial}{\partial z_j}, P]_\Sigma f$.

La proposition en résulte par une récurrence évidente.

<u>PROPOSITION 2.3.2</u>. <u>Soit</u> P <u>d'ordre</u> 0, <u>on a alors</u>

$$\frac{\partial}{\partial z_1} P_\Sigma f = P_\Sigma \frac{\partial f}{\partial z_1} + [\frac{\partial}{\partial z_1}, P]_\Sigma f + T_{o\Sigma} f + \sum_{j=2}^{\nu} T_{j\Sigma} \frac{\partial f}{\partial z_j}$$

<u>où</u> T_o <u>et les</u> T_j <u>sont des opérateurs de simple couche</u>.

On a en effet, le ν-cycle γ s'appuyant sur Σ le long du $(\nu-1)$-cycle γ',

$$\frac{\partial}{\partial z_1} P_\Sigma f = \int_{\Sigma\gamma\Sigma} \frac{\partial K}{\partial z_1} (z,z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z} + \int_{\Sigma\gamma\Sigma} \frac{\partial K}{\partial w_1} (z,z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z}.$$

Mais, dans l'intégration par parties, il apparaît la différence des déterminations de $N(z,w)\log w_1$ le long de γ' :

$$\int_{\Sigma\gamma\Sigma} \frac{\partial K}{\partial w_1} (z,z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z} = 2i\pi \int_{\gamma'} N(z,z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z} + \int_{\Sigma\gamma\Sigma} K(z,z-\tilde{z})\frac{\partial f}{\partial z_1}(\tilde{z})d\tilde{z}.$$

$\dfrac{\partial K}{\partial z_1}$ est le noyau de l'opérateur $[\frac{\partial}{\partial z_1},P]$. D'autre part, d'après la remarque 2.2.5, on a $N(z,w) = L_o(z,w) + \sum_2^\nu \frac{\partial}{\partial w_j} M_j(z,w)$ où L_o et les M_j sont les noyaux d'opérateurs de simple couche T_o et T_j. Cela établit la proposition.

<u>COROLLAIRE 2.3.3</u>. <u>Soit</u> P <u>d'ordre</u> 0, <u>et</u> $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_n) = (\alpha_1,\alpha')$. <u>On a</u>

$$(\frac{\partial}{\partial z})^\alpha P_\Sigma f = P_\Sigma (\frac{\partial}{\partial z})^\alpha f + \sum_\beta Q_{\beta\Sigma} (\frac{\partial}{\partial z})^\beta f + \sum_\beta T_{\beta\Sigma} R_{\beta\Sigma} (\frac{\partial}{\partial z})^\beta f$$

<u>où les</u> Q_β <u>et</u> R_β <u>sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre</u> 0, <u>les</u> T_β <u>des opérateurs de simple couche, et où les multi-indices</u> β <u>vérifient</u>

<u>soit</u> $\beta_1 = \alpha_1$ <u>et</u> $|\beta| < |\alpha|$

<u>soit</u> $\beta_1 < \alpha_1$ <u>et</u> $|\beta| \leq \alpha$.

Cela résulte par récurrence des propositions 2.2.4, 2.3.1. et 2.3.2..

2.4. Problème de Cauchy.

Nous changeons maintenant de notations, $M = (z,w)$ sera le point courant de $\mathbb{C}^\nu = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$, (ζ,θ) étant les variables duales, et nous poserons $z = (z',z_n)$ et $w = (w_1,w')$. Nous noterons Σ et H des hyperplans d'équations respectives $w_1 = \sigma$ et $z_n = h$.

L'opérateur pseudo-**différentiel** P **d'ordre** $m \geq 0$, défini au voisinage du point de coordonnées $z = w = \zeta = 0$; $\theta = (1, 0,\ldots, 0)$ sera de la forme suivante :

$$P(z,w,D_z,D_w) = D_{z_n}^m + \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \alpha_n<m}} A_\alpha(z,w,D_{z'},D_w)D_z^\alpha$$

où les A_α sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0, ne dépendant pas de z_n .

On voit facilement que l'on peut également mettre P sous la forme suivante qui nous sera utile :

$$P(z,w,D_z,D_w) = D_{z_n}^m - \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \alpha_n<m}} D_{z_n}^{\alpha_n} D_{z'}^{\alpha'} B_\alpha(z,w,D_{z'},D_w)$$

où les B_α sont également d'ordre 0 et indépendants de D_{z_n}.

Rappelons les définitions suivantes ([B.S.] § 3).

DÉFINITION 2.4.1. Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}^{n+p}$

a) On dit que Ω est z_n-k-Σ-plat si les tranches z_n = constante de Ω sont k-Σ-plates, c'est-à-dire si :

$$\left.\begin{array}{l} M \in \Omega,\ \tilde{M} \in \Sigma,\ z_n = \tilde{z}_n \\ |w_1 - \tilde{w}_1| \geq k|w_i - \tilde{w}_i| \quad i = 2,\ldots, p \\ |w_1 - \tilde{w}_1| \geq k|z_j - \tilde{z}_j| \quad j = 1,\ldots,n-1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \tilde{M} \in \Sigma \cap \Omega .$$

b) On dit que Ω est w-δ-H-plat si les tranches w = constante de Ω sont δ-H-plates, c'est-à-dire si :

$$\left.\begin{array}{l} M \in \Omega,\ \tilde{M} \in H,\ w = \tilde{w} \\ |z_n - \tilde{z}_n| \geq \delta|z_j - \tilde{z}_j| \quad j = 1,\ldots, n-1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \tilde{M} \in H\cap\Omega .$$

DÉFINITION 2.4.2. Pour $M = (z,w) \in \Omega$, nous poserons

$$d_{z'}(M) = \inf\{ \sup_{j\in\{1,\dots,n-1\}} |z'_j - \tilde{z}'_j| \mid (\tilde{z}', z_n ; w) \in \complement\Omega\}$$

$$d_{w'}(M) = \inf\{ \inf_{i=\{2,\dots,p\}} | w'_i - \tilde{w}'_i| \mid (z ; w_1, w') \in \complement\Omega\}.$$

Nous poserons en outre, pour f appartenant à $\mathcal{O}(\Omega)$ [ou à $\mathcal{O}(\Omega\cap H)$]

$$\|f\|_\lambda = \sup \frac{|f(M)|}{d_{z'}(M)^{-1} d_{w'}(M)^{-1} \hat{\lambda}(w_1)}$$

lorsque λ est une fonction positive, définie sur Ω, ne dépendant que de w_1, et où on a posé $\hat{\lambda}(w_1) = \sup_{t\in[0,1]} \lambda(tw_1 + (1-t)\sigma)$.

Nous pouvons alors énoncer le résultat essentiel de ce paragraphe.

THÉORÈME 2.4.3. Il existe un voisinage Ω_0 de 0, des constantes $k > 0$ et $\delta > 0$ telles que, quels que soient h et σ définissant H et Σ, quel que soit l'ouvert convexe Ω contenu dans Ω_0, z_n-k-Σ-plat et w-δ-H-plat, et quelle que soit la fonction positive $\lambda(w_1)$, on ait

a) Pour toute fonction $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, pour tout m-uple $(h_i)_{i=0,\dots,m-1}$ de fonctions holomorphes sur $\Omega\cap H$, il existe une et une seule fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} P_\Sigma f = g \\ D^i_{z_n} f|_H = h_i, \qquad i = 0, \dots, m-1. \end{cases}$$

b) Si on a $\|g\|_\lambda < \infty$ et $\|h_i\|_\lambda < \infty$, on a alors $\|f\|_\lambda < \infty$.

c) Si on a $\|D^\beta_z D^\gamma_w g\|_\lambda < \infty$ et $\|D^{\beta'}_{z'} D^\gamma_w h_i\|_\lambda < \infty$ pour tous les ordres de dérivation, on a alors

$$\|D^\beta_z D^\gamma_w f\|_\lambda < \infty \quad \text{quels que soient } \beta \text{ et } \gamma.$$

Nous pouvons choisir dès maintenant k et Ω_0 de telle manière que les $B_{\alpha\Sigma}$ opèrent dans $\mathcal{O}(\Omega)$. En effet, les B_α qui ne dépendent pas de D_{z_n}, peuvent être considérés comme des opérateurs B_{α,z_n} dans $\mathbb{C}^{\nu-1}$, dépendant du paramètre z_n. Ils opèrent sur les fonctions holomorphes dans $\Omega_{z_n} = \{(z',w) | (z',z_n ; w) \in \Omega\}$ si ces ouverts sont assez plats et assez petits, et cela uniformément en z_n, d'où le choix de k et Ω_0.

D'après la proposition 2.1.1., on a

$$\|B_{\alpha,z_n,\Sigma}\, f(z',w)\|_\lambda \leq C\|f(z',w)\|_\lambda \ , \text{ pour } f \in \mathcal{O}(\Omega_{z_n})$$

et la constante C peut être choisie indépendamment de z_n. On a donc

$$\|B_{\alpha\Sigma}\, f\|_\lambda \leq C\|f\|_\lambda \quad \text{pour } f \in \mathcal{O}(\Omega).$$

Ce type de majorations est valable, non seulement pour les opérateurs B_α, mais aussi pour les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0, et les opérateurs de simple couche (prop. 2.2.2.) intervenant dans les commutateurs des $B_{\alpha\Sigma}$ avec les dérivations (voir corollaire 2.3.3.).

Enfin les valeurs de k et des constantes précédentes peuvent être choisies uniformes en h et σ pour les opérateurs $P(z',z_n-h,w_1-\sigma, w',D_z,D_w)$ lorsque h et σ sont assez petits. En restreignant au besoin Ω_o, cela nous autorise à supposer dans la suite que Σ et H sont les hyperplans d'équations respectives $w_1 = 0$ et $z_n = 0$.

Nous allons déterminer la solution f par approximations successives en construisant par récurrence une suite de fonctions f_ν dans Ω par :

$$f_o = 0$$

$$(2.4.1.) \qquad \begin{cases} D_{z_n}^m f_{\nu+1} = g + \Sigma\, D_{z'}^{\alpha'} D_{z_n}^{\alpha_n} B_{\alpha\Sigma} f_\nu & |\alpha| \leq m, \quad \alpha_n < m \\ D_{z_n}^j f_{\nu+1}|_H = h_j & j = 0,\dots, m-1 \end{cases}$$

En posant $v_\nu = f_{\nu+1} - f_\nu$, on a $f_\nu = \sum_0^{\nu-1} v_\nu$ et :

$$\begin{cases} D_{z_n}^m v_o = g \\ D_{z_n}^j v_o|_H = h_j & j = 0,\dots, m-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{z_n}^m v_{\nu+1} = \Sigma\, D_{z'}^{\alpha'} D_{z_n}^{\alpha_n} B_{\alpha\Sigma} v_\nu & |\alpha| \leq m, \quad \alpha_n < m \\ D_{z_n}^j v_{\nu+1}|_H = 0 & j = 0,\dots, m-1 . \end{cases}$$

Nous aurons à utiliser les deux lemmes suivants, où il est important que les constantes soient indépendantes de δ et de λ .

<u>LEMME 2.4.4.</u> <u>Soit</u> $w \in \mathcal{O}(\Omega)$, <u>et soit</u> v <u>la solution de</u>

$$\begin{cases} D^m_{z_n} v = D^{\alpha'}_{z'} D^{\alpha_n}_{z_n} w & \underline{\text{avec}} \quad |\alpha| \leq m \quad \underline{\text{et}} \quad \alpha_n < m \\ D^j_{z_n} v|_H = 0 & j = 0,\dots, m-1. \end{cases}$$

<u>Il existe alors une constante</u> C, <u>ne dépendant que de</u> m, <u>et des choix de</u> k <u>et</u> Ω_o <u>telle que l'on ait</u>

$$\|v\|_\lambda \leq C\,\delta \|w\|_\lambda \,.$$

La fonction v est également la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} D^{m-\alpha_n}_{z_n} v = D^{\alpha'}_{z'} w & \text{avec} \quad |\alpha'| \leq m - \alpha_n \quad \text{et} \quad 1 \leq m-\alpha_n \\ D^j_{z_n} v|_H = 0 & j = 0,\dots, m - \alpha_n - 1\,. \end{cases}$$

On a $|w(M)| \leq \|w\|_\lambda \hat{\lambda}(w_1)\, d_{w'}(M)^{-1}\, d_{z'}(M)^{-1}$. On en déduit, par application répétée de la formule intégrale de Cauchy

$$|D^{\alpha'}_{z'} w(M)| \leq \|w\|_\lambda \hat{\lambda}(w_1)\, d_{w'}(M)^{-1}\, e^{|\alpha'|}\, (|\alpha'|+1)!\, d_{z'}(M)^{-|\alpha'|-1} \,.$$

Comme on a $|\alpha'| \leq m - \alpha_n$, on en déduit, en supposant pour simplifier que le diamètre de Ω_o est inférieur à 1

$$|D^{\alpha'}_{z'} w(M)| \leq \|w\|_\lambda \hat{\lambda}(w_1) d_{w'}(M)^{-1}\, e^{|\alpha'|}(|\alpha'| + 1)!\, d_{z'}(M)^{-m+\alpha_n-1} \,.$$

Soit maintenant $M_t = (z', tz_n\,;\, w)$. L'ouvert Ω étant z_n-δ-H-plat, on a $d_{z'}(M_t) \geq d_{z'}(M) + \frac{(1-t)z_n}{\delta}$, et par intégration :

$$\left|\int_0^1 D^{\alpha'}_{z'} w(M) z_n dt\right| \leq \|w\|_\lambda \hat{\lambda}(w_1) d_{w'}(M)^{-1} e^{|\alpha'|}(|\alpha'|+1)!\, \frac{\delta}{m-\alpha_n}\, d_{z'}(M)^{-m+\alpha_n} \,.$$

En itérant $m-\alpha_n$ fois ce calcul, on obtient :

$$\|v\|_\lambda \leq \|w\|_\lambda \quad e^{|\alpha'|}\, \frac{(|\alpha'|+1)!}{(m-\alpha_n)!}\, \delta^{m-\alpha_n} \,.$$

En supposant, ce qui est loisible, $\delta \leq 1$ par exemple, et compte tenu de l'inégalité $\alpha_n < m$, on a donc

$$\|v\|_\lambda \leq C\,\delta \|w\|_\lambda \,.$$

<u>LEMME 2.4.5.</u> <u>Soit</u> $w \in \mathcal{O}(\Omega)$, <u>et soit</u> v <u>la solution de</u>

$$\begin{cases} D^m_{z_n} v = \Sigma\, D^{\alpha'}_{z'} D^{\alpha_n}_{z_n} \mathbf{B}_{\alpha\Sigma}\, w. \\ D^j_{z_n} v|_H = 0 & j = 0,\dots, m-1\,. \end{cases}$$

<u>Il existe alors une constante</u> K, <u>ne dépendant que de</u> P <u>et des choix de</u> k <u>et</u> Ω_o, <u>telle que</u>

$$\|v\|_\lambda \leq K\,\delta\,\|w\|_\lambda \;.$$

D'après la proposition 2.1.1., il existe des constantes C_α, indépendantes de w telles que $\|B_{\alpha\Sigma}\, w\|_\lambda \leq C_\alpha \|w\|_\lambda$. D'autre part, on a $v = \Sigma\, v_\alpha$ où v_α est la solution de $D^m_{z_n} v_\alpha = D^{\alpha'}_{z'}\, D^{\alpha_m}_{z_n}(B_{\alpha\Sigma} w)$ avec données de Cauchy nulles. On a donc

$\|v\|_\lambda \leq C(\Sigma\, C_\alpha)\, \|w\|_\lambda$ d'après le lemme 2.4.4.

2.5. <u>Récurrences</u>.

Les choix de k et Ω_o sont déjà effectués, la constante K (indépendante de δ et λ) est celle intervenant dans le lemme 2.4.5. Soit alors Ω un ouvert z_n-k-Σ-plat et w-δ-H-plat. Les fonctions f_ν, v_ν sont construites à partir de g et des (h_i) selon le procédé du n° 2.4. Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante.

<u>PROPOSITION 2.5.1</u>.

a) <u>Supposons</u> $\|g\|_\lambda < \infty$ <u>et</u> $\|h_j\|_\lambda < \infty$, <u>il existe alors une constante</u> K_o <u>indépendante de</u> ν <u>telle que l'on ait</u>

(2.5.1) $$\|v_\nu\|_\lambda \leq K_o (K\,\delta)^\nu \;;$$

b) <u>Supposons que l'on ait</u> $\|D^\beta_z\, D^\gamma_w\, g\|_\lambda < \infty$ <u>et</u> $\|D^{\beta'}_{z'}\, D^\gamma_w\, h_j\|_\lambda < \infty$ <u>quels que soient</u> β <u>et</u> ν. <u>Il existe alors des constantes</u> $K_{\beta\gamma}$ <u>indépendantes de</u> ν <u>telles que l'on ait</u>

(2.5.2) $$\|D^\beta_z\, D^\gamma_w\, v_\nu\|_\lambda \leq K_{\beta\gamma}\, (K\delta)^\nu\, \nu^{|\beta|+|\gamma'|+2\gamma_1} \;.$$

On a $v_o = G + \Sigma\, h_j(z',w)\, \dfrac{z_n^j}{j!}$ où G est la m^e primitive de g, m-plate sur H. On en déduit facilement que $\|v_o\|_\lambda < \infty$. Posons $K_o = \|v_o\|_\lambda$, et supposons que l'on ait $\|v_\nu\|_\lambda \leq K_o\,(K\delta)^\nu$. L'application du lemme 2.4.5. à $D^m_{z_n} v_{\nu+1} = \Sigma\, D^\alpha_z\, B_{\alpha\Sigma}\, v_\nu$; $D^j_{z_n} v_\nu |_H = 0$, $j = 0,\dots, m-1$, montre que l'on a $\|v_{\nu+1}\| \leq K_o (K\delta)^{\nu+1}$, ce qui établit la première partie de la proposition.

Nous nous plaçons désormais sous les hypothèses b).

LEMME 2.5.2. On a $\|D_z^\beta D_w^\gamma v_\nu\|_\lambda < \infty$.

Sur l'expression explicite de $v_o = G + \Sigma h_j(z',w) \frac{z_n^j}{j!}$, on voit facilement que $\|D_z^\beta D_w^\gamma v_o\|_\lambda < \infty$. Démontrons le lemme par récurrence sur ν.

La fonction $v_{\nu+1}$ est la m^e-primitive de $\varphi = \Sigma D_z^\alpha B_{\alpha\Sigma} v_\nu$, m-plate sur H, et il suffit de même de montrer que l'on a :

$$\|D_z^\beta D_w^\gamma \varphi\| < \infty .$$

Or
$$D_z^\beta D_w^\gamma \varphi = \Sigma D_z^{\alpha+\beta} D_w^\gamma B_{\alpha\Sigma} v_\nu$$
$$= \Sigma Q_\Sigma Dv_\nu + \Sigma T_\Sigma R_\Sigma D v_\nu ,$$

d'après le corollaire 2.3.3, où les Q et R sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0, les T des opérateurs de simple couche, et les D des symboles de dérivation en z et w. D'après les propositions 2.1.1. et 2.2.2., et l'hypothèse de récurrence, on a donc $\|D_z^\beta D_w^\gamma \varphi\| < \infty$ ce qui achève la démonstration du lemme.

LEMME 2.5.3. Pour $\nu > 0$, on a $D_{z_n}^j v_\nu|_H = 0$ pour $j = 0,\dots, m+\nu-2$.

La propriété est vraie pour $\nu = 1$. Démontrons la par récurrence sur ν.

On a
$$D_{z_n}^{m+p} v_{\nu+1} = \Sigma D_{z_n}^{p+\alpha_n} D_{z'}^{\alpha'} B_{\alpha\Sigma} v_\nu = \Sigma Q_{k\alpha'\Sigma} D_{z_n}^k D_{z'}^{\alpha'} v_\nu$$

d'après la proposition 2.3.1., où les $Q_{k\alpha'}(z,w,D_z',D_w)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0, et où $k \leq p + \alpha_n \leq p + m - 1$.

Si $p \leq \nu-1$, la restriction du membre de droite à H est nulle d'après l'hypothèse de récurrence, et cela établit le lemme au rang $\nu + 1$.

Démonstration de la proposition 2.5.1. b.

L'estimation (2.5.2) est déjà établie pour $|\beta| = |\gamma| = 0$, et nous allons la démontrer par récurrence sur $|\beta| + |\gamma'| + 2\gamma_1$. Nous allons donc nous fixer un indice (β,γ) et supposer que (2.5.2.) est valide, avec des constantes $K_{\overline{\beta}\overline{\gamma}}$ convenables pour tous les indices $(\overline{\beta},\overline{\gamma})$ tels que $|\overline{\beta}|+|\overline{\gamma}'|+2\overline{\gamma}_1 < |\beta|+|\gamma'| + 2\gamma_1$.

D'après le lemme 2.5.2., on peut toujours trouver un nombre $K_{\beta\gamma}$ tel que l'on ait (2.5.2.) pour $0 \leq \nu \leq \beta_n + 1$. Nous allons montrer, par récurrence à partir du rang $\beta_n + 1$ que, si $K_{\beta\gamma}$ a été choisi assez grand, la majoration est valable quel que soit ν. On a

(2.5.3.) $\qquad D^j_{z_n} D^\beta_z D^\gamma_w v_{\nu+1} = 0 \qquad j = 0,\ldots, m-1$

d'après le lemme 2.5.3.

D'autre part $D^m_{z_n} D^\beta_z D^\gamma_w v_{\nu+1} = \sum_\alpha D^\alpha_z (D^\beta_z D^\gamma_w B_{\alpha\Sigma} v_\nu)$ et

$$D^\beta_z D^\gamma_w B_{\alpha\Sigma} = B_{\alpha\Sigma} D^\beta_z D^\gamma_w + \sum_{\overline{\beta},\overline{\gamma}} Q_{\overline{\beta}\overline{\gamma}\Sigma} D^{\overline{\beta}}_z D^{\overline{\gamma}}_w + \sum_{\overline{\beta},\overline{\gamma}} T_{\overline{\beta}\overline{\gamma}\Sigma} R_{\overline{\beta}\overline{\gamma}\Sigma} D^{\overline{\beta}}_z D^{\overline{\gamma}}_w$$

d'après le corollaire 2.3.3., où les Q et R sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0, les T des opérateurs de simple couche, et où on a :

soit $\overline{\gamma}_1 = \gamma_1$ et $|\overline{\beta}| + |\overline{\gamma}'| < |\beta| + |\gamma'|$

soit $\overline{\gamma}_1 < \gamma_1$ et $|\overline{\beta}| + |\overline{\gamma}| \leq |\beta| + |\gamma|$.

Dans les deux cas, on a $|\overline{\beta}| + |\overline{\gamma}'| + 2\overline{\gamma}_1 < |\beta| + |\gamma'| + 2\gamma_1$.

On a donc $D^m_{z_n} (D^\beta_z D^\gamma_w v_{\nu+1}) = \Sigma D^\alpha_z B_{\alpha\Sigma} (D^\beta_z D^\gamma_w v_\nu) + h$ avec

$\|h\|_\lambda \leq C\,(K\delta)^\nu\, \nu^{|\beta|+|\gamma'|+2\gamma_1-1}$ en utilisant l'hypothèse de récurrence, et les propositions 2.1.1. et 2.2.2.

Compte tenu de (2.5.3.) nous pouvons déduire des lemmes 2.4.4. et 2.4.5.

$$\|D^\beta_z D^\gamma_w v_{\nu+1}\|_\lambda \leq K_{\beta\gamma} (K\delta)^{\nu+1}\, \nu^{|\beta|+|\gamma|+2\gamma_1} + C'\delta(K\delta)^\nu \nu^{|\beta|+|\gamma'|+2\gamma_1-1}$$

où C' dépend de P, des constantes $K_{\overline{\beta}\overline{\gamma}}$ antérieures, mais ni de ν, ni de $K_{\beta\gamma}$.

Si on a en outre $K_{\beta\gamma} \geq \frac{C'}{K}$, on en déduit

$$\|D^\beta_z D^\gamma_w v_{\nu+1}\|_\lambda \leq K_{\beta\gamma}(K\delta)^{\nu+1}\, (\nu+1)^{|\beta|+|\gamma'|+2\gamma_1}$$

ce qui achève de démontrer la proposition 2.5.1.

Fin de la démonstration du théorème 2.4.3.

La constante k et Ω_0 étant déjà fixés, nous fixons maintenant $\delta < {}^1/_K$. Cette constante ne dépend que de l'opérateur P et est en particulier indépendante de λ .

Soient $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $h_j \in \mathcal{O}(\Omega \cap H)$ avec $\|g\|_\lambda + \Sigma\, \|h_j\|_\lambda < \infty$.

D'après la proposition 2.5.1., la série $\Sigma\, v_\nu$ est convergente, et sa somme $f = \lim f_\nu$ vérifie $\|f\|_\lambda \leq K_o\, \Sigma(K\delta)^\nu < \infty$. D'autre part, on a $P_\Sigma f = g$ et $D^j_{z_n} f_{|H} = h_j$ $(j = 0,\dots, m-1)$, par passage à la limite dans (2.4.1.).

Pour montrer l'unicité, supposons qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, avec $\|f\|_\lambda < \infty$; $P_\Sigma f = 0$; $D^j_{z_n} f_{|H} = 0$. On a alors $D^m_{z_n} f = \Sigma\, D^\alpha\, D_{\alpha\Sigma} f$, et il résulte du lemme 2.4.5. que $\|f\|_\lambda \leq (K\delta)\|f\|_\lambda$ et donc $f = 0$.

Pour démontrer la partie a) du théorème 2.4.3. où il n'y a aucune condition de croissance, on se ramène au cas précédent en considérant les ouverts Ω_t, $t > 1$, homothétiques de Ω dans le rapport t. Les fonctions f, g, (h_i) y ont alors des normes d'indice λ bornées, et l'existence et l'unicité dans chaque Ω_t implique l'existence et l'unicité dans Ω. Cette partie a) a en fait déjà été démontrée dans [B.S.] sous des hypothèses plus faibles sur P (pas de condition sur les termes d'ordre $< m$).

Enfin la partie c) du théorème résulte simplement de (2.5.2.) on a

$$\|D^\beta_z\, D^\gamma_w\, f\|_\lambda \leq K_{\beta\gamma}\; \Sigma\, (K\delta)^\nu\, \nu^{|\beta|+|\gamma'|+2\gamma_1} < \infty .$$

<u>Remarque</u>. On pourrait montrer que la constante δ peut être choisie indépendamment des termes d'ordre $\leq m$ de P. Il faudrait par exemple remplacer (2.5.1.) par $$\|v_\nu\|_\lambda \leq K_o \sum_{p=0}^{\nu} (K'\delta)^{\nu-p} \frac{(Cz_n)^p}{p!}$$ avec K' ne dépendent que de la partie principale (voir la démonstration du théorème 3.1.2. de [B.S.] pour des majorations analogues). Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer, et de démontrer, les majorations qui doivent se substituer à (2.5.2.).

§ 3. <u>EXISTENCE ET PROLONGEMENT DANS LE DOMAINE COMPLEXE.</u>

3.1. <u>Existence et prolongement "à croissance" pour des opérateurs "de type Weierstrass"</u>.

Nous conservons provisoirement les notations des n° 2.4. et 2.5. L'opérateur P : $$P(z,w,D_z, D_w) = D^m_{z_n} + \Sigma\, A_\alpha(z,w,D_z,D_w)D^\alpha_z$$

est défini au voisinage du point de coordonnées $z = 0$, $w = 0$, $\zeta = 0$, $\theta = (1,0,\dots,0)$ et possède les propriétés énoncées au n° 2.4.

Si G est un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^{n+p}$, nous noterons TG (le tube de base G) l'ouvert $\mathbb{R}^{n+p} + iG$. De même, si Γ est un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ (fréquemment identifié à son image dans $\mathbb{R}^{n+p}$), nous poserons $T\Gamma = \mathbb{R}^n + i\Gamma$ (fréquemment identifié à $\{(z,w) \in \mathbb{C}^{n+p} | z \in T\Gamma \text{ et } w = 0\}$). On a ainsi $T(G+\Gamma) = TG + T\Gamma$.

(3.1.1) Nous noterons $\tilde{\mathcal{O}}(TG)$ l'espace des germes de fonctions holomorphes dans TG au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+p}$: $\tilde{\mathcal{O}}(TG) = \varinjlim_{V \ni 0} \mathcal{O}(TG \cap V)$.

(3.1.2) Nous noterons $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}'}(TG)$ le sous-espace de $\tilde{\mathcal{O}}(TG)$ constitué des fonctions $f(z,w)$ vérifiant une majoration : $|f(z,w)| \leq C(\operatorname{Im} w_1)^{-N}$ pour C et N assez grands.

(3.1.3) Nous noterons $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{E}}(TG)$ le sous-espace de $\tilde{\mathcal{O}}(TG)$ constitué des fonctions $f(z,w)$ telles qu'il existe un entier N, et des constantes $K_{\alpha\beta}$ telles que :

$$|D_z^\alpha D_w^\beta f(z,w)| \leq K_{\alpha\beta}(\operatorname{Im} w_1)^{-N} .$$

Rappelons (1.2.6) que nous notons (abusivement) $b(f)$, pour $f \in \tilde{\mathcal{O}}(TG)$, la microfonction associée à la valeur au bord de f, définie au voisinage de $(0,0) \times S^{n+p-1}$ et à support dans $\{(z,w,\zeta,\theta) | (\zeta,\theta) \in G^o\}$ et que, les égalités $Pb(f) = b(g)$ sont des égalités en tant que microfonctions.

Nous noterons pour simplifier :

(3.1.4) $B(k) = \{(\xi,\zeta) \mid |\xi|^2 + |\zeta'|^2 \leq k^2\zeta_1^2\}$

(3.1.5) $G' \subset\subset G$ si l'intérieur de G'^o contient G^o.

<u>THÉORÈME 3.1.1</u>. <u>Il existe des constantes</u> k_o <u>et</u> δ_o <u>telles que les propriétés</u> a) <u>et</u> b) <u>ci-dessous soient vérifiées pour tout cône ouvert convexe saillant</u> G <u>de</u> $\mathbb{R}^{n+p}$ <u>contenu dans le demi-espace</u> $t_1 > 0$ <u>dont le polaire</u> G^o <u>est contenu dans</u> $B(k_o)$, <u>et pour tout cône ouvert convexe</u> Γ <u>de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>tel que</u>

$\Gamma^o \subset \{\xi \mid |\xi'| \leq \delta_o \xi_n\}$.

a) <u>Pour toute fonction</u> g <u>appartenant à</u> $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG + T\Gamma)$ [<u>resp.</u> $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{E}}(TG + T\Gamma)$], <u>il existe une fonction</u> f <u>appartenant à</u> $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + T\Gamma)$ [<u>resp.</u> $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{E}}(TG' + T\Gamma)$] <u>pour tout cône</u> $G' \subset\subset G$, <u>telle que</u>

$$Pb(f) = b(g).$$

b) <u>Soit</u> $f \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG + T\Gamma)$ [<u>resp.</u> $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{E}}(TG + T\Gamma)$] <u>telle que l'on ait</u> $Pb(f) = b(g)$ <u>avec</u> $g \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG + \mathbb{C}^n)$ [<u>resp.</u> $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{E}}(TG + \mathbb{C}^n)$]. <u>Alors on a</u> $f \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + \mathbb{C}^n)$ [<u>resp.</u> $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{E}}(TG' + \mathbb{C}^n)$] <u>pour tout cône</u> $G' \subset\subset G$.

Les constantes k et δ étant celles du théorème 2.4.3., nous choisirons $k_o < \frac{k}{\sqrt{n+p}}$ et $\delta_o < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$. Il résulte alors de [B.S.] proposition 4.4.1. qu'il existe un système fondamental $(\Omega_{\sigma,h})_{\substack{\sigma>0 \\ h>0}}$ de voisinages de 0 dans $\mathbb{C}^{n+p}$ à chacun desquels on associe les hyperplans Σ et H d'équations $w_1 = i\sigma$ et $z_n = ih$ tels que les ouverts $\Omega_{\sigma h}$, $\Omega_{\sigma h} \cap (TG + T\Gamma)$ et $\Omega_{\sigma h} \cap (TG + \mathbb{C}^n)$ sont z_n-k-Σ-plats et w-δ-H-plats avec $\Omega_{\sigma h} \cap H \cap (TG + \mathbb{C}^n) \subset (TG + T\Gamma)$ et $\Omega_{\sigma h} \cap \Sigma \subset (TG + T\Gamma)$.

Si g vérifie les hypothèses du a), en choisissant σ et h assez petits, on a dans l'ouvert $\Omega_{\sigma h} \cap (TG + T\Gamma)$:

$$|g(z,w)| \leq C(\operatorname{Im} w_1)^{-N}$$

[resp. $$|D_z^\beta D_w^\gamma g(z,w)| \leq C_{\beta\gamma}].$$

Soit alors f la solution du problème de Cauchy : $P_\Sigma f = g$; $D_{z_n}^j f|_H = 0$ $(j = 0,\dots, m-1)$. On a d'après le théorème 2.4.3.

$$|f(z,w)| \leq C'[\inf w_1, \sigma)]^{-N} d_{z'}(z,w)^{-1} d_{w'}(z,w)^{-1}$$

[resp. $$|D_z^\beta D_w^\gamma f(z,w)| \leq C'_{\beta\gamma} d_{z'}(z,w)^{-1} d_{w'}(z,w)^{-1}]$$

en notant (Définition 2.4.2.) $d_{z'}$ et $d_{w'}$ les distances ("en z' " ou "en w' ") au complémentaire de $\Omega_{\sigma h} \cap (TG + T\Gamma)$.

Pour $(z,w) \in (TG' + T\Gamma)$, on voit facilement que l'on a

$$d_{z'}(z,w) \geq C'' \operatorname{Im} w_1 \quad \text{et} \quad d_{w'}(z,w) \geq C'' \operatorname{Im} w_1 .$$

On a donc $f \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + T\Gamma)$ [resp. $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{E}}(TG' + T\Gamma)$]. D'autre part, on a $b(Pf) = b(g)$ (voir (1.2.6.)) ce qui démontre la première partie du théorème.

Plaçons nous maintenant sous les hypothèses b). Soient σ_1 et h_1 tels que f et g soient définies respectivement dans $\Omega_{\sigma_1 h_1} \cap (TG + T\Gamma)$ et $\Omega_{\sigma_1 h_1} \cap (TG + \mathbb{C}^n)$. La fonction $P_{\Sigma_1} f - g$, dont la valeur au bord est nulle en tant que microfonction, est holomorphe dans un voisinage V de l'origine. Soient σ_2 et h_2 assez petits pour que $\Omega_{\sigma_2 h_2} \subset V$ et $\Omega_{\sigma_2 h_2} \cap \Sigma_2 \subset \Omega_{\sigma_1 h_1} \cap (TG + T\Gamma)$. On sait alors [B.S., Théorème 2.5.1.] que $P_{\Sigma_2} f - P_{\Sigma_1} f \in \mathcal{O}(\Omega_{\sigma_2 h_2})$. On a donc finalement $f \in \mathcal{O}(\Omega_{\sigma_2 h_2} \cap (TG + T\Gamma))$; $|f(z,w)| \leq C(\operatorname{Im} w_1)^{-N}$ [resp. $|D_z^\beta D_w^\gamma f(z,w)| \leq C_{\alpha\beta}$]

$$P_{\Sigma_2} f \in \mathcal{O}(\Omega_{\sigma_2 h_2} \cap (TG + \mathbb{C}^n)); \ |P_{\Sigma_2} f(z,w)| \leq C'(\operatorname{Im} w_1)^{-N'} [\text{resp.} \ |D_z^\beta D_w^\gamma f(z,w)| \leq C'_{\alpha\beta}].$$

Mais f est la solution du problème de Cauchy

$$P_{\Sigma_2} f = P_{\Sigma_2} f \quad ; \quad D_{z_n}^j f|_H = D_{z_n}^j f|_H \ .$$

Compte tenu de $\Omega_{\sigma_2 h_2} \cap H \cap (TG + \mathbb{C}^n) = \Omega_{\sigma_2 h_2} \cap H \cap (TG + T\Gamma)$, il s'agit d'un problème de Cauchy dans l'ouvert $\Omega_{\sigma_2 h_2} \cap (TG + \mathbb{C}^n)$. On en déduit que f est définie dans $\Omega_{\sigma_2 h_2} \cap (TG + \mathbb{C}^n)$ et qu'elle y vérifie les estimations assurant que l'on a $f \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + \mathbb{C}^n)$ [resp. $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{E}}(TG' + \mathbb{C}^n)$].

3.2. Existence et prolongement pour les opérateurs partiellement elliptiques.

Nous revenons aux notations et hypothèses du théorème 1.3.1.. L'opérateur P est défini dans un voisinage U de $x = 0$, $t = 0$, $\zeta = 0$, $\tau = \tau_0$, et est de la forme

$$P(x,t,D_x,D_t) = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x,t,D_x,D_t) D_x^\alpha$$

avec $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,t,0,\tau)\xi^\alpha \neq 0$ pour $\xi \neq 0$ et $(x,t,0,\tau) \in U$.

Nous allons montrer dans les deux théorèmes suivants que les propriétés d'existence et de prolongement dans $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG + T\Gamma)$ [resp. $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{E}}(TG + T\Gamma)$] sont valables pour G assez plat et Γ quelconque [resp. Γ assez plat].

THÉORÈME 3.2.1. *Il existe des constantes* k_0 *et* δ_0 *telles que les* propriétés a) et b) du théorème 3.1.1. soient vérifiées pour tout cône ouvert convexe G de $\mathbb{R}^{n+p}$, contenu dans le demi-espace $t_1 > 0$ dont le polaire G^o est contenu dans $B(k_o)$, et pour tout cône ouvert convexe Γ de $\mathbb{R}^n$ tel que le diamètre de Γ^o soit inférieur à δ.

Pour chaque base $\varepsilon^\lambda = (e_1^\lambda, \dots, e_n^\lambda)$ de $\mathbb{R}^n$, nous pouvons en utilisant la proposition 1.3.2. écrire $P = E_\lambda P_\lambda$ où l'opérateur E_λ est défini et inversible au voisinage de $(0,0,0,\tau_o)$ tandis que P_λ est "de type Weierstrass" dans la direction e_n^λ. Le théorème 3.1.1. s'applique donc à P_λ, pourvu que G^o soit contenu dans $B(k_\lambda)$ et que Γ^o soit contenu dans un voisinage d'ordre δ_λ de e_n^λ.

L'équation $Pb(f) = b(g)$ équivaut alors à $P_\lambda f = E_\lambda^{-1} b(g) = b(h)$ où h possède les mêmes propriétés que g (type de croissance et tube de définition), ce qui établit a) et b) pour l'opérateur P lui-même. Un argument de compacité permet de se ramener à un nombre fini d'indices λ, et donc de conclure.

THÉORÈME 3.2.2. Il existe une constante k_o telle que, pour tout cône ouvert convexe G de $\mathbb{R}^{n+p}$, contenu dans le demi-espace $t_1 > 0$ avec $G^o \subset B(k_o)$, et pour tout cône ouvert convexe Γ de $\mathbb{R}^n$, on ait

a) pour toute fonction g appartenant à $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG + T\Gamma)$, il existe f appartenant à $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + T\Gamma)$ pour tout cône $G' \subset\subset G$ telle que $Pb(f) = b(g)$

b) Soit f appartenant à $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG + T\Gamma)$ telle que l'on ait $Pb(f) = b(g)$ avec $g \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG + \mathbb{C}^n)$. Alors on a $f \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + \mathbb{C}^n)$ pour tout cône $G' \subset\subset G$.

a) Nous allons d'abord montrer que l'on a $g = \Sigma g_\alpha$ avec $g_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG + T\Gamma_\alpha)$ avec $\Gamma = \cap \Gamma_\alpha$, où les Γ_α sont assez plats pour que l'on puisse appliquer le théorème 3.2.1.

Soit δ une droite passant par l'origine de $\mathbb{R}^n$, et ne coupant pas Γ, et soient δ^+ et δ^- ses deux demi-droites. Désignons par Γ^+ [resp. Γ^-] l'enveloppe convexe de $\Gamma \cup \delta^+$ [resp. $\Gamma \cup \delta^-$]. Il existe un voisinage ouvert convexe V de l'origine tel que l'on ait $g \in \mathcal{O}((TG + T\Gamma) \cap V)$ avec une majoration $|g| \leq C(\operatorname{Im} w_1)^{-N}$.

La fonction $C(\operatorname{Im} w_1)^{-N}$ est pluri-sous-harmonique dans l'ouvert convexe $\Omega = (TG + T\Gamma + \delta) \cap V$. Les ouverts convexes $\Omega^{\pm} = (TG + T\Gamma^{\pm}) \cap V$ forment un recouvrement de Ω, et on peut d'après [10] résoudre le problème de Cousin à croissance c'est-à-dire qu'il existe g^+ et g^-, avec $g^+ \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG + T\Gamma^{\pm})$ telles que l'on ait
$$g = g^+ + g^- .$$

Si les cônes $\Gamma^{\pm}$ ne sont pas assez plats, on recommence l'opération avec $g^{\pm}$, et il est clair qu'au bout d'un nombre fini d'étapes, on obtient $g = \Sigma\, g_\alpha$, avec $g_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG + T\Gamma_\alpha)$ le diamètre des Γ^o_α étant aussi petit qu'on le veut.

On résout alors, d'après le théorème 3.1.1. $Pb(f_\alpha) = b(g_\alpha)$ avec $f_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + T\Gamma_\alpha)$, d'où le résultat en posant $f = \Sigma\, f_\alpha$.

b) Soit donc $f \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG + T\Gamma)$ vérifiant $Pb(f) = g \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG + \mathbb{C}^n)$. On se ramène au cas ou $g = 0$ en remplaçant f par $f-h$ où h est solution dans $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + \mathbb{C}^n)$ de $Pb(h) = b(g)$.

Nous allons montrer, en utilisant la même décomposition que dans la partie a) que l'on a $f = \Sigma\, f_\alpha$ avec $f_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + T\Gamma_\alpha)$ et $Pb(f_\alpha) = 0$, pour tout $G' \subset\subset G$.

Soit donc comme ci-dessus $\Gamma^{\pm} = \Gamma + \delta^{\pm}$. On peut décomposer f en $f = f^+ + f^-$ avec $f^{\pm} \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + T\Gamma^{\pm})$. Soient $g^{\pm} \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + T\Gamma^{\pm})$ telles que l'on ait $Pb(f^{\pm}) = b(g^{\pm})$. On a alors $b(g^+) + b(g^-) = Pb(f) = 0$. La fonction $g^+ + g^-$, qui n'était définie que dans $TG' + T\Gamma$ est donc holomorphe au voisinage de l'origine et on a donc en fait $g^+ \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + T\Gamma + \delta)$.

On sait alors, d'après a), résoudre $b(Ph) = b(g^+)$ avec $h \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + T\Gamma + \delta)$ et $f = (f^+ - h) + (f^- + h)$ est la décomposition voulue. En itérant l'opération, on obtient $f = \Sigma f_\alpha$ avec $f_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + T\Gamma_\alpha)$ et $Pb(f_\alpha) = 0$. En appliquant maintenant la partie prolongement du théorème 3.2.1., on obtient $f_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG'+\mathbb{C}^n)$, et donc $f \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + \mathbb{C}^n)$.

Remarque. Comme dans [B.S.], nous aurions pu démontrer le résultat précédent en supposant seulement P "partiellement non caractéristique" dans les directions de Γ^o.

Il est vraisemblable que le théorème 3.2.2. est également vrai avec $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{E}}$ au lieu de $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'$, mais ce type de démonstration nécessiterait des résultats sur la cohomologie "à croissance du type $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{E}}$".

§ 4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL.

(Les hypothèses sur P sont celles du n° 1.3., les notations TG, $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'$, $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{E}}$, $B(k)$ sont définies au n° 3.1.)

4.1. Existence microlocale (démonstration du théorème 1.3.1. a).

Il s'agit donc de démontrer que étant donné $v \in \mathcal{D}'$ [resp. $\mathcal{E}^\infty$] au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^{n+p}$, on peut trouver u appartenant à $\mathcal{D}'$ [resp. $\mathcal{E}^\infty$] tel que $SSA(Pu - v) \not\ni (0, 0 ; 0,\tau_0)$.

Sans restreindre la généralité, on peut supposer v à support compact. On a

$$v(x,t) = (2\pi)^{-\nu} \int_{\mathbb{S}^{n+p-1}} \int_0^\infty e^{i\rho(x.\xi'+t.\tau')}\, \hat{v}(\rho\xi',\rho\tau')\rho^{n-1}d\rho\, d\sigma$$

où $\hat{v}$ est à croissance lente [resp. à décroissance rapide], et où l'intégrale converge en un sens convenable, en particulier au sens suivant :

$$(4.1.1) \qquad v(x,t) = \sum_\alpha \lim_{\substack{(y,s)\to 0\\ (y,s)\in G_\alpha}} g_\alpha(x+iy,\ t+is)$$

où on a posé

$$(4.1.2) \qquad g_\alpha(z,w) = (2\pi)^{-\nu} \int_{G_\alpha^o} \int_0^\infty e^{i\rho(z.\xi'+w.\tau')}\hat{v}(\rho\xi',\rho\tau')\rho^{n-1}d\rho\, d\sigma$$

lorsque les cônes ouverts convexes G_α ont des polaires vérifiant

$$(4.1.3) \qquad \bigcup_\alpha G^o_\alpha = S^{n+p-1} \quad \text{et} \quad \int_{G^o_\alpha \cap G^o_\beta} d\sigma = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \neq \beta \,.$$

Dans ce qui suit, nous appellerons G le cône polaire de $B(k)$ (3.1.4), et nous désignerons par (Γ_α) une famille finie de cônes ouverts convexes de $\mathbb{R}^n$ dont les polaires Γ^o_α recouvrent $\mathbb{S}^{n-1}$, ont deux à deux une intersection de mesure nulle, et ont un diamètre aussi petit qu'on le voudra.

Nous poserons $G_\alpha = G + \Gamma_\alpha$. On a donc $G^o_\alpha = \{(\xi,\tau) \in G^o \,|\, \xi = 0 \text{ ou } \xi \in \Gamma^o_\alpha\}$. On a d'après (4.1.1), en désignant par v_1 le résultat de l'intégration sur $S^{n+p-1} \setminus G^o$,

$$v(x,t) = \sum_\alpha b(g_\alpha(z,w)) + v_1(x,t)$$

où les g_α sont définies par (4.1.2), et où v_1 vérifie $SSA(v_1) \not\ni (0,0;\ 0,\tau_0)$.

D'autre part, il résulte facilement de l'intégrale (4.1.2) que, la fonction $\hat{v}$ était à croissance lente [resp. à décroissance rapide], on a

$$|g_\alpha(z,w)| \leq C|\operatorname{Im} w_1|^N$$

$$[\text{resp.} \qquad |D^\beta_z D^\gamma_w g_\alpha(z,w)| \leq C_{\beta\gamma}] \,.$$

On a donc, avec les notations 3.1.2 et 3.1.3, $g_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG + T\Gamma_\alpha)$, [resp. $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{E}}(TG + T\Gamma_\alpha)$]. Les cônes Γ_α ayant été choisis aussi plats qu'on le désirait, on peut appliquer le théorème 3.2.1 et résoudre $Pb(f_\alpha) = b(g_\alpha)$ avec,

$$f_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + T\Gamma_\alpha) \quad [\text{resp.} \quad \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{E}}(TG' + T\Gamma_\alpha)].$$

Soit $u = \Sigma\, b(f_\alpha)$, on a $u \in \mathcal{D}'$ [resp. $\mathcal{E}^\infty$], et $Pu - v = v_1$ ce qui démontre la partie a) du théorème 1.3.1.

4.2. <u>Existence avec contrôle du spectre singulier</u> (démonstration de 1.3.1. b).

Nous allons d'abord énoncer une version "à croissance" du lemme de décomposition de [B.S. n° 6.2.]. Rappelons les notations servant à indexer les "quadrants" et les "dièdres" de $\mathbb{R}^n$.

$$A_n = \{+1,\ -1\}^n \ ; \ B_n = \{\beta \in \{+1,0,-1\}^n \mid \beta_i \neq 0 \text{ sauf pour un indice } i\}.$$

A tout $i \in \{1,\dots,n\}$ correspond l'application $\hat{\imath}: A_n \to B_n$ définie par

$$\hat{\imath}(\alpha_1,\ldots,\ \alpha_i,\ldots,\ \alpha_n) = (\alpha_1,\ldots,\ 0,\ldots,\ \alpha_n).$$

A tout $\alpha \in A_n$ on associe le "quadrant" de $\mathbb{R}^n$:

$$Q_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, i,\ \alpha_i x_i > 0\}$$

et à tout $\beta \in B_n$, on associe le "dièdre" de $\mathbb{R}^n$:

$$D_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, i,\ \beta_i \neq 0 \Longrightarrow \beta_i\, x_i > 0\}\ .$$

LEMME 4.2.1. *Soit* G *un cône ouvert convexe de* $\mathbb{R}^{n+p}$, *contenu dans le demi-espace* $t_1 > 0$. *On a alors*

a) *Pour tout* $f \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG)$, *il existe* $(f_\alpha)_{\alpha\in A_n}$ *avec* $f_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG + TQ_\alpha)$ *et* $f = \sum_\alpha f_\alpha$.

b) *Pour toute famille* $(f_\alpha)_{\alpha\in A_n}$ *vérifiant* $f_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG + TQ_\alpha)$ *et* $\sum_\alpha f_\alpha = 0$ *dans* TG, *il existe une famille* $(h_\beta)_{\beta\in B_n}$ *avec* $h_\beta \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG + TD_\beta)$ *et, pour tout* α, $f_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, h_{\hat{\imath}(\alpha)}$.

Il suffit de recopier la démonstration du lemme 6.2.1. de [B.S.] avec la seule modification suivante. La démonstration de [B.S.] utilise à plusieurs reprises la résolubilité du problème de Cousin sous sa forme la plus simple : Ω, Ω^+, Ω^-, étant des ouverts (pseudo)-convexes de $\mathbb{C}^n$ avec $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$, si $f \in \mathcal{O}(\Omega^+ \cap \Omega^-)$, on a $f = f^+ + f^-$ avec $f^\pm \in \mathcal{O}(\Omega^\pm)$. Nous aurons ici à remarquer de plus que ces ouverts sont contenus dans le demi-espace $\operatorname{Im} w_1 > 0$, et à démontrer que, si f est majorée par $C|\operatorname{Im} w_1|^{-N}$, il en est de même de f^+ et f^-. La fonction $(\operatorname{Im} w_1)^{-N}$ étant pluri-sous-harmonique, cela résulte immédiatement de [10].

Démonstration de 1.3.1. b.

Supposons dans un premier temps que l'on ait $SSA(v) \subset \{(x,t,\xi,\tau) \mid (\xi,\tau) \in B(k)\}$, avec k assez petit. Si G est le cône polaire de $B(k)$, on a $v = b(g)$ avec $g \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG')$ pour $G' \subset\subset G$. D'après le lemme 4.1.2, on a $g = \sum_\alpha g_\alpha$ avec $g_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + TQ_\alpha)$, et d'après le théorème 3.2.2., on sait résoudre $Pb(f_\alpha) = b(g_\alpha)$

avec $f_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + TQ_\alpha)$ pour tout cône $G' \subset\subset G$. En posant $u = \Sigma\, b(f_\alpha)$, on a bien $SSA(u) \subset \{(x,t,\xi,\tau) | (\xi,\tau) \in B(k)\}$.

Dans le cas général où $SSA(v) \subset \{(x,t,\xi,\tau) | (\xi,\tau) \in K\}$, on recouvre le compact K par un nombre fini de boules B_i de telle manière que l'on ait pour chaque i :

- ou bien B_i ne coupe pas $\{(\xi,\tau) | \xi = 0\}$
- ou bien B_i est centrée en un point $(0,\tau_i)$, et son rayon k_i est assez petit pour que l'on puisse y appliquer le résultat que nous venons de démontrer.

On peut décomposer (voir 1.2.2) la distribution v en une somme de distributions v_i telles que $SSA(v_i) \subset \{(x,t,\xi,\tau) | (\xi,\tau) \in B_i\}$. Dans le premier cas, l'opérateur P est inversible et on pose $u_i = P^{-1} v_i$. Dans le second cas, on sait que l'on peut résoudre $Pu_i = v_i$ avec $SSA(v_i)$ dans B_i. Il reste à poser $u = \Sigma\, u_i$. On a

$$Pu = v \quad \text{et} \quad SSA(u) \subset \{(x,t,\xi,\tau) | (\xi,\tau) \in \cup B_i\}.$$

La réunion des B_i est un voisinage aussi petit que l'on veut de K, et cela termine la démonstration de 1.3.1.b.

4.3. Régularité (démonstration de 1.3.1.c).

Soit donc u définie au voisinage de l'origine avec $SSA(Pu) \not\ni (0,0,0,\tau_0)$. Soient ω un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^{n+p}$, et k assez petits pour que $\omega \times B(k) \cap SSA(Pu) = \emptyset$. Soit w une distribution telle que l'on ait $SSA(w) \subset \omega \times B(k/2)$ et $SSA(u - w) \not\ni (0,0,0,\tau_0)$. En se restreignant à un ouvert ω' plus petit et en posant $Pw = v$, on a $SSA(v) \subset \omega' \times K$, ou K est un compact contenu dans $B(k/2)$ et disjoint de $(0,\tau_0)$. D'après le n° 4.2 on peut résoudre l'équation $Pu_0 = v$ avec $SSA(u_0)$ aussi voisin que l'on veut, en particulier ne contenant pas $(0,0,0,\tau_0)$. On peut alors remplacer u par $w - u_0 = u_1$. On a $u = u_1$ en tant que microfonction au voisinage de $(0,0,0,\tau_0)$, mais de plus, u_1 a un SSA contenu dans $\omega_1 \times B(k)$ et vérifie partout $Pu_1 = 0$.

Si G est le cône polaire de $B(k)$, il existe donc $f_1 \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG)$ telle que l'on ait $b(f_1) = u_1$, et donc $Pb(f_1) = 0$. D'après le lemme 4.2.1., on a $f_1 = \sum_\alpha f_\alpha$ avec $f_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG + TQ_\alpha)$.

Soient d'autre part des $g_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG + TQ_\alpha)$ telles que $Pb(f_\alpha) = b(g_\alpha)$. On a donc $\sum_\alpha g_\alpha = g_o$, avec g_o holomorphe au voisinage de l'origine. En remplaçant l'une des fonctions g_α par $g_\alpha - g_o$, on peut donc supposer $\sum g_\alpha = 0$. Une nouvelle application du lemme 4.2.1. nous montre l'existence de fonctions $h_\beta \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG + TD_\beta)$ telles que l'on ait

$$g_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_{\hat{i}(\alpha)} \,.$$

D'après le théorème 3.2.2, on sait résoudre $Pb(s_\beta) = b(h_\beta)$ avec $s_\beta \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + TD_\beta)$ pour tout $G' \subset\subset G$. Si on pose maintenant $\tilde{f}_\alpha = f_\alpha - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_{\hat{i}(\alpha)}$, on a $\tilde{f}_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + TQ_\alpha)$,

$$f_1 = \sum_\alpha \tilde{f}_\alpha, \quad \text{et} \quad Pb(\tilde{f}_\alpha) = 0.$$

Une application de la partie prolongement du théorème 3.2.2. montre que les $\tilde{f}_\alpha$, et donc f_1 appartiennent à $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(TG' + \mathbb{C}^n)$.

La fonction $f_1(x+iy,\ t+is)$, qui vérifie une majoration en module par $C|s_1|^{-N}$ admet une limite $\tilde{u}_1(x+iy,\ t)$ au sens des distributions lorsque s tend vers 0. La limite vérifie les équations de Cauchy Riemann $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \tilde{u}_1 = 0$. La trace $\tilde{u}_1(x,t)$ sur $y = 0$ est alors bien définie et on a bien

$$\tilde{u}_1(x,t) = \lim_{(y,s)\to 0} f_1(x+iy,\ t+is) = u_1(x,t).$$

4.4. <u>Propagation des singularités pour les distributions partiellement holomorphes.</u>

(Démonstration de 1.3.1. d).

Pour les solutions u de $\partial/_{\partial \bar{z}_i}\, u(z,t) = 0$, on sait [F.I.O.II] que $SSD(u)$ se propage le long des feuilles $\zeta = 0$; (t,τ) = constante. Nous étendons ici ce résultat au cas où l'on connait seulement le spectre singulier de la trace $u(x,t)$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

THÉORÈME 4.4.1. *Soit $u(z,t)$ une distribution solution de $\partial/\partial\bar{z}_i\, u = 0$, définie dans un ouvert ω de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^p$ dont les tranches t = constante sont connexes et rencontrent $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. On suppose que le point $(x_o,t_o\ ;\ 0,\tau_o)$ n'appartient pas au spectre singulier différentiable de la trace $u(x,t)$. Alors, si $(x,t_o) \in \omega$, on a*

$$(x,t_o\ ;\ 0,\tau_o) \notin \mathrm{SSD}[u(z,t)].$$

Nous utiliserons d'abord un lemme élémentaire sur les fonctions analytiques d'une variable complexe.

LEMME 4.4.2. *Soit $f(z)$ holomorphe dans le disque unité et vérifiant $\sup_{|z|\leq 1} |f(z)| \leq A$. Supposons de plus que $\sup_{-1<x<1} |f(x)| \leq b$. Alors on a*

$$\sup_{|z|\leq 1/4} |f(z)| \leq \sqrt{Ab}.$$

La transformation conforme $z = Z(w) = 2/5[w + 1/w]$ applique la couronne $1 < w < 2$ sur l'intérieur de l'ellipse de demi-axes 1 et $3/5$, amputé du segment $[-4/5, 4/5]$. En posant $F(w) = f(Z(w))$, on a $\limsup_{|w|\to 2} |F(w)| \leq A$ et $\limsup_{|w|\to 1} |F(w)| \leq b$, et donc, d'après le théorème des trois cercles $|F(w)| \leq \sqrt{Ab}$ pour $1 < |w| < \sqrt{2}$. On a donc $|f(z)| \leq \sqrt{Ab}$ à l'intérieur de l'ellipse de demi-axes $2/5\,(\sqrt{2} \pm 1/\sqrt{2})$ qui contient le disque de rayon $1/4$.

Démonstration du théorème 4.4.1.

Il suffit de démontrer le théorème dans le cas $n = 1$, ce que nous supposerons désormais. On s'y ramène en effet en considérant les plongements successifs

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^p \to \dots \to \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^p.$$

On a $\mathrm{SSD}(u) \subset \{(z,t,\zeta,\tau) \mid \zeta = 0\}$. On peut donc definir les traces de u sur les sous-variétés x = constante ou z = constante, et définir, pour $\chi(t) \in \mathcal{E}_o^\infty$, la transformée de Fourier partielle :

$$f(z,\tau) = \int e^{-it\tau}\, u(z,t)\, \chi(t)\, dt.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{E}^\infty$, holomorphe en z, et vérifie une majoration

$$|f(z,\tau)| \leq A(1+|\tau|^2)^M \quad \text{pour} \quad |z-z_0| \leq r \quad .$$

Pour x réel, $f(x,\tau)$ est le transformée de Fourier partielle de la trace $\chi(t)\, u(x,t)$. On a par hypothèse $(x_0,t_0,0,\tau_0) \notin SSD(u(x,t))$, et de plus (cf. A.6) aucun point du type (x_0,t_0,ξ,τ_0) n'appartient à $SSD(u(x,t))$. On a donc, pour $|x-x_0| \leq r$ et τ dans un voisinage conique Γ de τ_0

$$\forall N \; \exists C_N \qquad |f(x,\tau)| \leq C_N(1+|\tau|^2)^{-N}$$

pourvu que r, Γ et le support de χ soient assez petits.

D'après le lemme 4.4.2, on a donc pour $|z-z_0| \leq r/4$, $\tau \in \Gamma$

$$|f(z,\tau)| \leq \sqrt{AC_N}\,(1+|\tau|^2)^{\frac{M-N}{2}} \quad .$$

Il en resulte que $(z,t_0,0,\tau_0) \notin SSD(u(z,t))$ pour $|z-x_0| < r/4$, et par propagation des singularites, pour $(z,t_0) \in \omega$.

<u>Démonstration de 1.3.1.d</u>.

Il suffit de démontrer le théorème localement, c'est-à-dire de démontrer que, sous l'hypothèse $SSD(u) \ni (0,0,0,\tau_0)$ et $SSD(Pu) \not\ni (0,0,0,\tau_0)$, il existe un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{R}^{n+p}$ avec $(x,0,0,\tau_0) \in SSD(u)$ pour $x \in \Omega$.

Il existe donc ψ de classe $\mathcal{E}^\infty$ telle que $SSA(Pu-\psi) \not\ni (0,0,0,\tau_0)$. D'après les resultats du n° 4.1., on sait resoudre $SSA(P\varphi-\psi) \not\ni (0,0,0,\tau_0)$, avec φ de classe $\mathcal{E}^\infty$. En remplaçant u par $u-\varphi$, ce qui ne modifie ni $SSD(u)$ ni $SSD(Pu)$, on peut donc supposer $SSA(Pu) \not\ni (0,0,0,\tau_0)$.

D'après les résultats du n° 4.3., il existe donc un ouvert $\tilde{U}$, voisinage de $(0,0,0,\tau_0)$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^p \times S^{2n+p-1}$ et $\tilde{u}(z,t) \in \mathcal{D}'(\tilde{U})$, solution de $\partial/\partial \bar{z}_j\, \tilde{u} = 0$, telle que la trace de $\tilde{u}$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ soit égale à $u(x,t)$. On peut supposer $\tilde{U}$ de la forme $\tilde{\Omega} \times \tilde{\omega}$, où $\tilde{\Omega}$ est un voisinage convexe de 0 dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^p$, et $\tilde{\omega}$ un voisinage de $(0,\tau_0)$ dans S^{2n+p-1}. D'après le théorème 4.4.1, si on avait $(x,0,0,\tau_0) \notin SSD(u(x,t))$, avec $(x,0) \in \tilde{\Omega} \cap \mathbb{R}^{n+p} = \Omega$, on aurait $(z,0,0,\tau_0) \notin SSD(u(z,t))$ pour $(z,0) \in \tilde{\Omega}$, et donc $(0,0,0,\tau_0) \notin SSD(u(x,t))$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Cela achève la démonstration du theorème 1.3.1.

APPENDICE

A.1. Plaçons-nous pour simplifier dans $\mathbb{R}^n$ muni de son orientation et de sa mesure de Lebesgue. Le faisceau $\mathcal{D}'$ s'identifie alors à un sous-faisceau du faisceau $\mathcal{B}$. Cette identification peut être décrite de deux façons :

a) Une distribution u est somme localement finie de distributions u_i à support compact. Chaque u_i définit une fonctionnelle analytique, et donc une hyperfonction à support compact $\tilde{u}_i$. L'application qui à u associe $\tilde{u} = \Sigma\, \tilde{u}_i$ ne dépend pas de la décomposition $u = \Sigma\, u_i$ choisie, et définit un homomorphisme injectif de faisceaux (voir [19], théorème 1.2.2.).

b) Une distribution u peut toujours s'écrire sous la forme

$$u = \sum_\alpha \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in \Gamma_\alpha}} f_\alpha(x+iy)$$

où les f_α sont holomorphes à croissance lente, et la limite est au sens des distributions. L'hyperfonction associée à u sera

$$\tilde{u} = \sum_\alpha b(f_\alpha)$$

où la valeur au bord est prise au sens des hyperfonctions (voir [15] [16] [17]).

A.2. Diverses notions de spectre singulier analytique.

Rappelons que nous notons $SSD(u)$ le spectre singulier différentiable (wave front) d'une distribution u.

a) Le spectre singulier analytique de Sato $SSA(u)$. Il peut se définir pour toute hyperfonction par

(A.2.1) $(x_o,\xi_o) \notin SSA(u)$ s'il existe $\omega \ni x_o$, des cônes ouverts convexes saillants Γ_α avec $\Gamma_\alpha^o \not\ni \xi_o$, et des f_α holomorphes dans $\omega + i\Gamma_\alpha$ tels que $u = \Sigma\, b(f_\alpha)$ dans ω .

b) Le support essentiel de Bros-Iagolnitzer $SE(u)$ (voir [1], [2]).

Il est défini pour toute distribution u en utilisant la transformation de Fourier généralisée, ou les valeurs au bord de fonctions holomorphes à croissance lente [2, § 3c] :

(A.2.2) $\mathcal{F}_u(\xi,\lambda\ ;\ x) = \int \exp[-iy.\xi - \lambda|y-x|^2]\ f(y)dy.$

(A.2.3) $(x_o,\xi_o) \notin SE(u)$ si pour $\chi \in \mathcal{E}_o^\infty$ analytique au voisinage de x_o, il existe un voisinage conique I de ξ_o et des constantes α, γ et C_N strictement positives telles que

$$\mathcal{F}_{\chi u}(\xi,\lambda\ ;\ x_o) \leq \frac{C_N}{1+|\xi|^N}\ e^{-\lambda\alpha} \quad \text{pour } \xi \in V \text{ et } 0 < \lambda < \gamma|\xi|.$$

(A.2.4) $(x_o,\xi_o) \notin SE(u)$ s'il existe $\omega \ni x_o$, des cônes ouverts convexes saillants Γ_α avec $\Gamma^o_\alpha \not\ni \xi_o$, et des f_α holomorphes dans $\omega + i\Gamma_\alpha$ à croissance lente telles que $u = \Sigma\, b(f_\alpha)$ dans ω.

Nous utiliserons également une des propriétés de décomposition démontrées par Bros-Iagolnitzer [2, th. 1].

(A.2.5) Si dans un voisinage ω de x_o, on a $SE(u) \subset \omega \times I$, où I est une partie fermée de Σ^{n-1}, et si des cônes ouverts convexes saillants Γ_α sont tels que les intérieurs de leurs polaires recouvrent I, il existe alors ω' voisinage de x_o, et des f_α holomorphes dans $\omega' + i\Gamma_\alpha$ à croissance lente telles que l'on ait $u = \Sigma\, b(f_\alpha)$ dans ω'.

c) Le front d'onde analytique de Hörmander $WFA(u)$ (voir [11]).

(A.2.6) $(x_o,\xi_o) \notin WFA(u)$ s'il existe un voisinage conique I de ξ_o, un voisinage ω de x_o, une suite bornée u_n de distributions à support compact, et une constante C telle que l'on ait

$$u_n = u \text{ dans } \omega$$
$$|\hat{u}_n(\xi)| \leq C^{n+1}\, n!\ \xi^{-n} \quad \text{pour } \xi \in I.$$

A.3. Relations entre les notions de spectre singulier.

Nous démontrerons plus loin l'identite de SSA, SE et WFA. Nous pouvons énoncer dès maintenant les propriétés suivantes.

(A.3.1) Si u est définie sur ω, la projection sur ω de $SSA(u)$, de $SE(u)$ et de $WFA(u)$ sont toutes trois égales au support singulier analytique de u (voir [S.K.K.], [2], [11]).

On a de plus les inclusions suivantes :

(A.3.2) $SSA(u) \subset SE(u)$

(A.3.3) $SSD(u) \subset WFA(u) \subset SE(u)$.

Compte tenu de (A.2.1) et (A.2.4) l'assertion (A.3.2) est évidente. Pour démontrer (A.3.3) il faut démontrer que si u est valeur au bord d'une fonction holomorphe f à croissance lente dans $\omega + i\Gamma$, on a $WFA(u) \subset \omega \times \Gamma^o$ (à l'aide d'un nombre fini d'intégrations, on se ramène au cas où f est continue jusqu'au bord).

Soit alors ξ_o n'appartenant pas à Γ^o, on peut trouver un petit voisinage conique I de ξ_o, et un point y_o de Γ tels que l'on ait

$$\xi . y_o \leq -c|\xi| \quad \text{pour} \quad \xi \in I.$$

Soit d'autre part $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $\mathcal{E}^\infty$, égales à 1 dans la boule de centre x_o et de rayon r, nulles hors de la coule de centre x_o et de rayon $2r$, et vérifiant (voir [11])

$$|D^\alpha \chi_n| \leq C^{|\alpha|+1}\, n^{|\alpha|} \quad \text{pour} \quad |\alpha| \leq n .$$

Nous allons montrer que la suite $u_n = \chi_n u$ vérifie les majorations de (A.2.6).

Construisons les prolongements "presque analytiques" des fonctions χ_n :

$$\tilde{\chi}_n(x+iy) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq n} \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \chi_n(x)(iy)^n ,$$

il n'est pas difficile de voir que l'on a (en désignant par la même lettre C diverses "constantes" ne dépendant ni de n ni de y).

(A.3.4) $|\tilde{\chi}_n(x+iy)| \leq C^{n+1}$ pour $|y| \leq 1$

(A.3.5) $|{}^\partial/_{\partial \bar{z}_j}\tilde{\chi}_n(x+iy)| \leq C^{n+1}\, |y|^n$.

En utilisant la formule de Stokes sur la $(n+1)$-chaîne définie par $|x| \leq 2r$, $y = ty_0$ $(0 \leq t \leq 1)$, on ramène l'estimation de

$$\int e^{-ix.\xi} \chi_n(x)\, u(x)dx$$

à celles de $\displaystyle\int_{|x|\leq 2r} e^{-i(x+iy_0).\xi} \chi_n(x+iy_0)\, f(x+iy_0)dx$

et de $\displaystyle\iint_{\substack{|x|\leq 2r \\ 0\leq t\leq 1}} e^{-i(x+ity_0).\xi}\, \partial/\partial\bar{z}_j\, \chi_n(x+ity_0)\, f(x+ity_0)\, dxdt.$

La première intégrale est majorée d'après (A.3.4) par

$$e^{-c\xi}\, C^{n+1} \leq \frac{C^{n+1}}{c^n e^n}\, n^n\, \xi^{-n}$$

tandis que la seconde est majorée par

$$\left|\int_0^1 e^{-ct|\xi|}\, C^{n+1}\, n^n |y_0|^n t^n dt\right| \leq C'^{n+1}\, \xi^{-n-1} \int_0^\infty e^{-cu}\, u^n du$$
$$\leq C''^{n+1}\, n^n\, \xi^{-n-1}.$$

Cela démontre les majorations de (A.2.6) et donc l'assertion (A.3.3).

A.4. Produit tensoriel.

Si $u(x')$ et $v(x'')$ sont des distributions sur X' et X'', leur produit tensoriel $u(x')\, v(x'')$ est défini au sens des distributions par dualité ou par passage à la limite à partir des fonctions. On peut également définir, au sens de Sato, l'hyperfonction $u(x')\, v(x'')$. Montrons que les deux notions coïncident.

Soient $f_\alpha(z')$ et $g_\beta(z'')$ des fonctions holomorphes à croissance lente telles que l'on ait $u(x') = \Sigma \lim f_\alpha(x'+iy')$ et $v(x'') = \Sigma \lim g_\beta(x''+iy'')$. Au sens des hyperfonctions, on a :

$$u \otimes v = \sum_{\alpha\beta} b(f_\alpha) \otimes b(g_\beta),$$

et la même formule est valable au sens des distributions d'après la continuité du produit tensoriel.

Les quatre propriétés suivantes sont établies dans [S.K.K.], [2], [11], [F.I.O.I] (parfois pour le produit "ordinaire", ce qui est bien sûr plus général).

A.4.1. En remplaçant SS par SSA ; SE ; WFA ; SSD, on a

$$SS(u\otimes v)\subset (SS(u)\times SS(v))\cup(X'\times SS(v))\cup(SS(u)\times X'')$$

en désignant par $X'\times SS(v)$ l'ensemble $\{(x',x'',\xi',\xi'')\,|\,\xi'=0 \text{ et } (x'',\xi'')\in SS(v)\}$.

A.5. Intégration de long des fibres.

Soit $u(x',x'')$ une distribution sur $X'\times X''$ telle que la projection du support de u sur X' soit propre. On peut là encore définir $\int u(x',x'')dx''$ au sens des distributions (par dualité) ou au sens des hyperfonctions (par voie cohomologique). Montrons que les deux notions coïncident.

Les deux notions étant locales en x', on peut se ramener au cas où u est à support compact, et définit donc une fonctionnelle analytique. Pour les fonctionnelles analytiques, la définition cohomologique coïncide avec celle définie par dualité :

$$<\int u(x',x'')dx'',\ \varphi(x'')> = < u(x',x''),\ 1(x')\ \varphi(x'')>$$

pour φ analytique. Cela montre que l'intégrale est la même qu'au sens des distributions.

Les quatre propriétés suivantes sont établies dans [S.K.K.], [2], [11] [F.I.O.I] (Pour WFA, la propriété n'est établie que dans le cas particulier où WFA(u) ne contient aucun point du type $(x',x'',\xi',0)$. Nous laissons au lecteur le soin d'étendre au cas général la démonstration du théorème 4.1 de [11]).

A.5.1. En remplaçant SS par SSA ; SE ; WFA ; SSD, on a

$$SS\left(\int u(x',x'')dx''\right)\subset\{(x',\xi')\,|\,\exists\, x''\ (x',x'',\xi',0)\in SS(u)\}.$$

A.6. Trace.

Soit $u(x',x'')$ une distribution sur $X'\times X''$. Sa trace $u(x',0)$ est définie dans [F.I.O.I] au sens de distributions si SSD(u) ne rencontre pas le fibré normal à X', et la trace au sens des hyperfonctions est définie dans [S.K.K.] si ce fibré normal ne rencontre pas SSA(u).

Il résulte donc de (A.3.2) et (A.3.3) que si

$$SE(u) \cap \{(x',x'',\xi',\xi'') | x'' = 0 \text{ et } \xi' = 0\} = \emptyset ,$$

les deux notions de trace sont définies pour u. Montrons qu'elles coïncident.

D'après (A.2.5) on peut écrire $u = \Sigma b(f_\alpha(z',z''))$ où les f_α sont holomorphes à croissance lente, dans des ouverts $\omega + i\Gamma_\alpha$, le polaire de Γ_α ne rencontrant pas le fibré normal à X'. Il en résulte que les cônes $\Gamma'_\alpha=\{y' | (y',0) \in \Gamma_\alpha\}$ sont non vide. Au sens des hyperfonctions, on a $u(x',0) = \Sigma\, b(f_\alpha(z',0))$.

On est donc ramené à démontrer la propriété suivante : soit f holomorphe à croissance lente dans $\omega + i\Gamma$, le polaire de Γ ne rencontrant pas le fibré normal à X', montrer que la trace au sens des distributions de $\lim f(x'+iy', x''+iy'')$ est $\lim f((x'+iy'),0)$.

Soit y'_n une suite tendant vers 0, telle que $(y'_n,0) \in \Gamma$. Les fonctions regulières $f(x'+iy'_n, x'')$ ont evidemment pour trace $f(x'+iy'_n, 0)$. D'après le théorème 2.5.11. de [F.I.O.I], il suffit donc de démontrer que $f(x'+iy'_n, x'') \longrightarrow u(x',x'')$ dans l'espace $\mathcal{D}'_{\Gamma^o}$. (Nous laissons au lecteur cette démonstration, qui repose sur un argument de déformation dans le domaine complexe analogue à (et plus simple que) la démonstration de (A.3.3).

Les quatre propriétés suivantes sont établies dans [S.K.K.], [2], [11], [F.I.O.I].

(A.6.1) En remplaçant SS par SSA ; SE ; WFA ; SSD, on a

$$SS(u(x',0)) \subset \{(x',\xi') | \exists\, \xi'' \ (x',0,\xi',\xi'') \in SS(u(x',x''))\}$$

en supposant toujours que $SE(u)$ ne rencontre pas le fibré normal à X'.

A.7. Composition.

On définit, au sens des distributions ou des hyperfonctions $Ku(x) = \int K(x,y)\, u(y)dy$ de la façon suivante : on fait le produit tensoriel $K(x,y)\, u(z)$, on prend si possible la trace sur $y = z$, on intègre si possible le long des fibres. Il résulte de ce qui précède que les deux sens coïncident sous les hypothèses suivantes :

$K(x,y)$ est une distribution sur $X \times Y$ et $u(y)$ est une distribution à support compact dans Y

$$\{(x,\xi) \mid \exists\, y,\ (x,y,\xi,0) \in SE(K)\} = \emptyset$$

$$\{(y,\eta) \mid \exists\, x,\ (x,y,0,-\eta) \in SE(K)\} \cap SE(u) = \emptyset\ .$$

Et on a de plus

(A.7.1) $SSA(Ku) \subset SE'(K) \circ SSA(u)$

$SE(Ku) \subset SE'(K) \circ SE(u)$

$WFA(Ku) \subset SE'(K) \circ WFA(u)$

en notant $SE'(K) = \{(x,y,\xi,\eta) \mid (x,y,\xi,-\eta) \in SE(K)\}$.

A.8. Une représentation de δ.

Nous allons utiliser une décomposition de δ analogue à celle utilisée dans [S.K.K., corollaire III.2.1.5.], pour prouver le caractère flasque du faisceau $\mathcal{E}$. Cette décomposition est d'ailleurs étroitement liée à la transformation de Fourier généralisée de Bros-Iagolnitzer.

(A.8.1) $$\delta = \frac{(n-1)!}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1 + x.\eta}{(x.\eta+i|x|^2+i0)^n}\, \omega(\eta).$$

Cette formule doit être interprétée de la façon suivante. On pose

(A.8.2) $$K(x,\eta) = \frac{(n-1)!}{(-2i\pi)^n} (1 + x.\eta) \lim_{\substack{y\to 0\\ \sigma\to 0}} \frac{1}{[(x+iy).(\eta+i\sigma) + i(x+iy).(x+iy)]^2}\ .$$

La distribution $K(x,\eta)$ est ainsi valeur au bord d'une fonction holomorphe au voisinage de x pour $x \neq 0$, et holomorphe à croissance lente dans les domaines $|x| < \varepsilon$, $y.\eta > |y|^2 + \varepsilon|\sigma|$. On a donc

(A.8.3) $SE(K(x,\eta)) \subset \{(x,\eta,\xi,\theta) \mid x = 0,\ \eta = \xi\ ;\ \theta = 0\}$.

Le second membre de (A.8.1) désigne l'intégrale le long des fibrés $\int K(x,\eta)\omega(\eta)$ où ω est la mesure canonique sur $\mathbb{S}^{n-1}$: $\omega(\eta) = \Sigma\, (-1)^{j-1}\, d\eta_1 \wedge \dots\, d\hat{\eta}_j \wedge \dots\, d\eta_n$.

Les deux membres de A.8.1. sont des distributions bien définies, a priori d'ordre n. Il suffit donc de démontrer qu'elles coïncident sur des fonctions d'essai $\tilde{\varphi}(x)$ du type suivant :

φ est analytique au voisinage de la boule $|x| \leq r$.

φ est nulle ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n pour $|x| = r$.

$\tilde{\varphi}$ est le prolongement de φ par 0 hors de la boule $|x| \leq r$.

Nous allons alors utiliser la formule de Cauchy-Fantappiè (voir [14]) :

$$\varphi(0) = \frac{(n-1)!}{(-2i\pi)^n} \int_\Delta \frac{\varphi(z)}{(z.\zeta)^n} \, dz \wedge \omega(\zeta)$$

avec $dz = dz_1 \ldots dz_n$, $\omega(\zeta) = \Sigma\, (-1)^{j-1}\, \zeta_j\, d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\zeta_j} \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$, et où nous choisirons le $(2n-1)$-cycle suivant : $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ avec Δ_1 défini par $z = x + i\,\varepsilon\left(1 - \frac{|x|^2}{r^2}\right)\eta$, $\zeta = \eta + iz$ pour $|x| \leq r$ et $\eta \in \mathbb{S}^{n-1}$

Δ_2 défini par $z = x$, $\zeta = \eta + iz$, pour $|x| = r$ et $|\eta| \leq 1$.

L'intégrale sur Δ_2 étant nulle, on obtient

$$\varphi(0) = \frac{(n-1)!}{(-2i\pi)^n} \int \frac{\varphi(z)}{(z.\eta+iz^2)^n} \, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge (-1)^j (\eta_j + iz_j) d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_j \wedge \ldots \wedge d\eta_n$$

$$\varphi(0) = \frac{(n-1)!}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega(\eta) \int_{z=x+i\varepsilon(1-|x|^2/r^2)\eta} \varphi(z) \, \frac{1 + iz.\eta}{(z.\eta + i|z|^2)^n} \, dz$$

ce qui prouve (A.8.1) en faisant tendre ε vers 0.

A.9. Equivalence des trois définitions du spectre singulier analytique.

La distribution $K(x-x', \eta)$ définie sur $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{S}^{n-1}$ vérifie d'après (A.8.3) :

(A.9.1) $\quad SE(K(x-x',\eta)) \subset \{(x,x',\eta,\xi,\xi',\theta) \mid x = x',\ \eta = \xi = -\xi',\ \theta = 0\}$.

Si on pose, pour une distribution u à support compact :

(A.9.2) $\quad \hat{u}(x,\eta) = \int K(x-x', \eta)\, u(x')dx'$.

On a d'après (A.8.1)

(A.9.3) $\quad u(x) = \int \hat{u}(x,\eta)\, d\eta$.

On déduit de (A.9.2) et (A.7.1)

$$SSA(\hat{u}) \subset \{(x,\eta,\xi,\theta) \mid \theta = 0,\ \eta = \xi,\ (x,\eta) \in SSA(u)\}$$

$$SE(\hat{u}) \subset \{(x,\eta,\xi,\theta) \mid \theta = 0,\ \eta = \xi,\ (x,\eta) \in SE(u)\}$$

$$WFA(\hat{u}) \subset \{(x,\eta,\xi,\theta) \mid \theta = 0,\ \eta = \xi,\ (x,\eta) \in WFA(u)\}$$

On déduit de (A.9.3) et (A.5.1)

$$SSA(u) \subset \{(x,\xi) \mid \exists\ \eta,\ (x,\eta,\xi,0) \in SSA(\hat{u})\}$$

$$SE(u) \subset \{(x,\xi) \mid \exists\ \eta,\ (x,\eta,\xi,0) \in SE(\hat{u})\}$$

$$WFA(u) \subset \{(x,\xi) \mid \exists\ \eta,\ (x,\eta,\xi,0) \in WFA(\hat{u})\}$$

et donc $SSA(u) = SE(u) = WFA(u) =$ supp. sing. anal. $\hat{u}$.

Remarque A.9.4. L'argument ci-dessus montre qu'à une notion locale de singularité, on peut faire correspondre au plus une notion micro-locale "raisonnable" de singularité; le spectre singulier de u doit être le support singulier de $\hat{u}$. "Raisonnable" signifie ici que la projection sur $\mathbb{R}^n$ du spectre singulier est le support singulier, que la fonction $K(x,\eta)$ a son spectre singulier là où il doit être, et que les propriétés "fonctorielles" de comportement par rapport au produit tensoriel, à l'intégration et aux traces sont satisfaites.

Remarque A.9.5. La transformation utilisée ci-dessus est plus simple que celle de [S.K.K.], mais elle ne permet pas de traiter les problèmes de prolongement. Elle suffit toutefois pour obtenir des théorèmes de décomposition assez fins du spectre singulier. Ainsi, si $\Sigma\, \varphi_i(\eta) = 1$ est une partition mesurable (non nécessairement différentiable) de l'unité, les produits $\hat{u}(x,\eta)\ \varphi_i(\eta) = u_i(x,\eta)$ sont bien définis (car $SS(\varphi_i) \subset \{(x,\eta,\xi,\theta) | \xi = 0\}$) et $\int u_i(x,\eta)d\eta$ a son spectre singulier dans $SS(u) \cap Supp(\varphi_i)$.

A.10. Opérateurs pseudo-différentiels.

Dans tout notre article, nous utilisons les opérateurs pseudo-differentiels d'ordre fini tels qu'ils sont définis dans [S.K.K.], ainsi que leur interprétation à partir de l'action de ces opérateurs dans le domaine complexe (1.2.6). On peut toutefois se demander s'ils coïncident, dans le cas où ils sont définis globalement, avec ceux de Boutet de Monvel et Krée [6], ce qui permettrait d'appliquer nos theorèmes à une solution au sens de [6] de $Pu = 0$. Indiquons brièvement comment cela pourrait se démontrer.

En fait, dans l'un et l'autre article, ces opérateurs sont définis par leurs noyaux $K(x,x-x')$ et par la formule

(A.10.1) $\quad P(x,D_x)\, u(x) = \int K(x,x-x')\, u(x')dx'$,

où K est dans un cas une microfonction portée par le fibré normal à la diagonale, dans l'autre cas une distribution analytique hors de la diagonale (mais qui n'est déterminée par le symbole $\Sigma\, p_k(x,\xi)$ qu'à une fonction analytique près).

Nous savons maintenant que les deux sens que l'on peut donner à (A. 10.1) sont cohérentes. Dans [6], on a $K(x,y) = \Sigma\, \hat{p}_k(x,y) + h(x,y)$, où $\hat{p}_k$ est la transformée de Fourier inverse de $P.f.p_k(x,\xi)$ par rapport à ξ. Dans [S.K.K., II.1.4.] on définit d'abord un noyau complexe $K(z,z-z') = \Sigma\, K_k(z,z-z')$, puis on en prend la "restriction au réel" [S.K.K., III.1.2.]. Il n'est pas bien difficile de voir que la restriction au réel de $K_k(z,z-z')$ est précisément la microfonction associée à $\hat{p}_k(x,x-x')$, et d'en déduire le résultat.

Remarque A.10.2. Lorsque l'opérateur $P(x,D_x)$ n'est défini que dans un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$, et est d'ordre fini, la microfonction $K(x,x-x')$ est valeur au bord de fonctions holomorphes à croissance lente, et coïncide donc microlocalement avec une distribution dont le spectre singulier analytique est contenu dans le fibré normal à la diagonale. On retrouve ainsi, à partir de (A.10.1) et de (A.7.1) le fait que les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre fini opèrent dans les microdistributions et respectent le spectre singulier différentiable (voir 1.2.5. et 1.2.6).

A.11. Transformations de contact quantifiées.

Soit T une transformation de contact appliquant au voisinage du point (x_o,ξ_o) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$ sur un voisinage du point (y_o,η_o). Nous allons montrer l'existence d'une transformation de contact quantifiée associée à T, conservant les microdistributions et transformant par T le spectre singulier différentiable.

Toute transformation de contact étant composée de transformations du type suivant, on peut se ramener au cas où il existe $F(x,y)$ définie au voisinage de (x_o,y_o), avec $dF(x_o,y_o) = (-\xi_o,\eta_o)$, et où, en appelant Σ l'hypersurface $\{(x,y) \mid F(x,y) = 0\}$, on ait

$$T = q \circ p^{-1}$$

avec
$$p : S^*_\Sigma \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow S^*\mathbb{R}^n \qquad (x,y,\xi,\eta) \rightsquigarrow (x,-\xi)$$
$$q : S^*_\Sigma \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow S^*\mathbb{R}^n \qquad (x,y,\xi,\eta) \rightsquigarrow (y,\eta).$$

On peut alors prendre comme transformation de contact quantifiée associée [S.K.K., III.1.3.], pour u microfonction au voisinage de (x_o,ξ_o)

(A.11.1) $\quad \tilde{T}u(y) = \int K(x,y)\, u(x)dx$

avec $\quad K(x,y) = \delta[F(x,y)]$.

Mais $K(x,y)$ est en fait une distribution, avec $SSD(u) \subset SSA(u) = S_\Sigma \mathbb{R}^n$. Que l'on interprète A11.1. au sens des distributions ou des microfonctions, les deux sens sont cohérents. Il en résulte que $\tilde{T}$ conserve les microdistributions et que

$$SSD(\tilde{T}u) = T.SSD(u).$$

<u>Remarque</u>. La distribution $\delta[F(x,y)]$ est une distribution de Fourier, associée à la phase $F(x,y).\theta$, et $\tilde{T}$ est microlocalement un opérateur intégral de Fourier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BROS et D. IAGOLNITZER, Tuboïdes et généralisation d'un théorème de Grauert - Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz (1975) n° 16.

[2] J. BROS et D. IAGOLNITZER, Support essentiel et structure analytique des distributions. Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz (1975) n° 18.

[B.S.] J.M. BONY et P. SCHAPIRA, Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles. Ann. Inst. Fourier Grenoble 26.1 (1976).

[4] L. BOUTET de MONVEL, Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators. Comm. Pure Appl. Math.(1974).

[5] L. BOUTET de MONVEL, Propagation des singularités des solutions d'équations analogues à l'équation de Schrödinger. (à paraître)

[6] L. BOUTET de MONVEL et P. KREE, Pseudo-differential operators and Gevrey classes. Ann. Inst. Fourier Grenoble 17 (1967), 295-323.

[7] J. CHAZARAIN, Propagation des singularités pour une classe d'opérateurs à caractéristiques multiples et résolubilités locale. Ann. Inst. Fourier Grenoble 24, 1 (1974), 203-223.

[F.I.O.II] J. DUISTERMAAT et L. HÖRMANDER, Fourier Integral Operators II. Acta Math. 128 (1972), 183-269.

[F.I.O.I] L. HÖRMANDER, Fourier Integral Operators I. Acta Math. 127 (1971), 79-183.

[10] L. HÖRMANDER, Introduction to complex analysis in several variables. D. Van Nostrand Publ. Co. Princeton N.J. (1965).

[11] L. HÖRMANDER, Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients. Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970), 329-358.

[12] M. KASHIWARA et T. KAWAI, Microhyperbolic pseudo-differential operators I. Journ. Mat. Soc. Japan 27.3 (1975) 359-404.

[13] R. LASCAR, Propagation des singularités des solutions d'équations quasi-homogènes, (à paraître).

[14] J. LERAY, Le Calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy III) Bull. Soc. Math. France 87 (1959), 81-180.

[15] A. MARTINEAU, Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes, Proc. Intern. Summer Inst. Lisbon (1964).

[16] A. MARTINEAU, Théorèmes sur le prolongement analytique du type "edge of the wedge theorem" Sém. Bourbaki, 20^{e} année, 340 (1967/68).

[17] A. MARTINEAU, Le "edge of the wedge theorem" en théorie des hyperfonctions de Sato, Proc. Intern. Conf. Functional Analysis and Rel. Topics Univ. Tokyo Press (1969) 95-106.

[S.K.K.] M. SATO, T. KAWAI et M. KASHIWARA, Hyperfunctions and pseudo-differential equations. Lect. Notes in Math. 287 (1973) Springer, 265-529.

[19] P. SCHAPIRA, Théorie des Hyperfonctions, Lect. Notes in Math. 126 (1970) Springer.

[20] J. SJÖSTRAND, Propagation of singularities for operators with multiple involutive characteristics. (à paraître).

Jean-Michel BONY
Mathématiques - Bâtiment 425
Université de Paris XI
91405 ORSAY