Journées Équations aux dérivées partielles

Dominique Prévosto

Opérateurs maximaux associés à une classe d'opérateurs elliptiques fortement dégénérés sur la frontière. Application au calcul de l'indice pour une classe de problèmes aux limites associés à ces opérateurs

Journées Équations aux dérivées partielles (1975), p. 279-309

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1975____279_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 34-35 (1976) p.279-309

OPÉRATEURS MAXIMAUX ASSOCIÉS A UNE CLASSE D'OPÉRATEURS ELLIPTIQUES FORTEMENT DÉGÉNÉRÉS SUR LA FRONTIÈRE. APPLICATION AU CALCUL DE L'INDICE POUR UNE CLASSE DE PROBLÈMES AUX LIMITES ASSOCIÉS A CES OPÉRATEURS

par

Dominique PRÉVOSTO

-:-:-:-

I - INTRODUCTION

On étudie des problèmes aux limites dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, associés à des opérateurs elliptiques à l'intérieur, dégénérés au bord de cet ouvrage, le bord étant caractéristique.

Dans cette direction, M.I. Visik et V.V. Grusin ont obtenu certains résultats dans [13] pour l'opérateur défini par :

$$Lu(x) = L(x,D_x)u(x) = \sum_{h=o}^{m-r} P^{m-h}(x,D_x \quad \{\varphi(x)^{q(m-r-h)}\ u(x)\}\ ,$$

où m et r sont deux entiers tels que $0\leq r\leq m$, q un réel > 1 tel que $q(m-r) \in \mathbb{N}$, où $P^{m-h}(x,D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à m-h, $P^m(x,D_x)$ est un opérateur d'ordre m, elliptique dans $\overline{\Omega}$, et où φ est une fonction de classe C^∞, équivalente à la distance au bord Γ de l'ouvert régulier Ω. Ce sont des opérateurs d'ordre m, elliptiques à l'intérieur et dont la dégénérescence au bord est d'ordre q(m-r). Considérant les problèmes aux limites associés aux opérateurs L :

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ Bu = g & \text{sur } \Gamma\ , \end{cases}$$

où B est un système d'opérateurs différentiels frontière, on montre dans [13], moyennant certaines hypothèses sur L et B, que le couple d'opérateurs {L,B} est un opérateur à indice dans des espaces convenables, le second membre f étant dans $L^2(\Omega)$.

Avec J. Rolland dans [9] (cf. aussi [10]) nous avons montré que, pour tout entier $p \geq 0$, l'opérateur $\{L,B\}$ est à indice, le second membre f étant dans $H^p(\Omega)$, l'indice étant indépendant de $p \in \mathbb{N}$.

L'objet de cet article est de montrer que si $P^r(x;D_x)$ est un opérateur proprement elliptique d'ordre $r=2s$, et si l'on prend pour B un système de Dirichlet d'ordre s sur la frontière de Ω, alors l'indice de l'opérateur $\{L,B\}$ est nul, comme c'est le cas pour l'opérateur $\{P^r,B\}$. Lorsque $r=0$, il n'y a pas d'opérateurs frontière, et le résultat a été obtenu en collaboration avec J. Rolland.

Pour la démonstration, on utilise de façon essentielle, l'existence de traces et une formule de Green pour les éléments du domaine maximal

$D(L;\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \ ; \ Lu \in L^2(\Omega)\}$ de L dans $L^2(\Omega)$;

c'est l'objet du paragraphe IV.

Pour cela, on a besoin de montrer que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $D(L;\Omega)$. Dans le cas $r=0$, on montre même que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $D(L;\Omega)$. Ce problème de la densité des fonctions régulières dans le domaine maximal de L, est celui de la coïncidence entre prolongement "fort" et prolongement "faible" de l'opérateur L dans $L^2(\Omega)$. Pour les définitions, on renvoie à K.O. Friedrichs [4]. Ce problème intervient dans de nombreuses questions, en particulier en ce qui concerne les problèmes aux limites associés à L (cf. par exemple [8] et [5]).

Plusieurs auteurs ont résolu la validité de la densité des fonctions régulières dans le domaine maximal pour diverses classes d'opérateurs différentiels (cf. [3], [4], [6], [7], [8], [1], et la bibliographie de ce dernier).

La méthode utilisée ici, dans le paragraphe III, est une méthode de transposition, comme celle utilisée par P. Bolley et J. Camus dans [3]. Elle est associée à un théorème de régularité analogue au théorème de régularité à l'intérieur pour un opérateur elliptique. Ce théorème est démontré au paragraphe II.

De la formule de Green et du théorème de densité des fonctions régulières dans le domaine maximal de L dans $L^2(\Omega)$, on déduit, au paragraphe V, des théorèmes de régularité.

Le paragraphe VI, enfin, est consacré à l'étude du problème de Dirichlet associé aux opérateurs L. La méthode utilisée pour le calcul de l'indice diffère sensiblement de celle de J.L. Lions et E. Magènes dans [8].

Le plan de cet article est le suivant :

C'est Monsieur J. Camus qui m'a proposé ce travail. Qu'il soit remercié pour ses très nombreux conseils : son expérience mathématique m'a beaucoup aidé à avoir une vision plus claire et plus globale du problème et à éviter ainsi de nombreuses embuches. Je veux aussi remercier Monsieur P. Bolley dont l'aide constante et les suggestions n'auront pas été moins efficaces.

II - UN THÉORÈME DE RÉGULARITÉ.

Dans ce paragraphe, on va établir le théorème de régularité locale, à partir duquel on résoudra au paragraphe III le problème de la densité des fonctions régulières dans le domaine maximal des opérateurs considérés.

Tout d'abord, on rappelle et on complète des résultats relatifs aux espaces de Sobolev avec poids $W^{\ell}_{q,s}$ donnés dans [9], [10] et à une classe d'opérateurs différentiels ordinaires elliptiques et dégénérés (cf. [9]).

II-1. <u>Une inégalité du type "compacité" pour les espaces de Sobolev avec poids $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n)$.</u>

Soit $n \geq 1$. Le point générique de $\mathbb{R}^n$ sera noté $x = (x',t)$ avec $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $t \in \mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}^n_+$ le demi espace défini par :

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad t > o\} .$$

Soient $\ell \in \mathbb{Z}$, s un entier ≥ 0 et q un réel > 1 tel que $qs \in \mathbb{N}$.
On définit les espaces de Sobolev avec poids suivants :

$$W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n) = \{u \in H^{\ell-s}(\mathbb{R}^n) \quad ; \quad t^{qs}\, u \in H^{\ell}(\mathbb{R}^n)\}.$$

On munit $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n)$ de la norme canonique.

PROPOSITION 2.1. - <u>Pour tout entier</u> j <u>tel que</u> $0 \leq j \leq qs$, <u>l'application</u>

$$u \longmapsto t^{qs-j}\, u$$

est linéaire et continue de $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{\ell-\frac{j}{q}}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. - On utilise des théorèmes de dérivées intermédiaires après transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$ pour obtenir le résultat dans le cas $\ell-s \geq 0$. Dans le cas $\ell-s < 0$, si $u \in W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n)$ on pose

$$v(x) = \mathcal{F}^{-1} \{(1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{\ell-s}{2}} \; \hat{u}(\xi',\tau)\} \; (x),$$

et on est ramené au cas précédent car $v \in W^{s}_{q,s}(\mathbb{R}^n)$.

PROPOSITION 2.2. - L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. - Ce résultat s'obtient par troncature et régularisation.

PROPOSITION 2.3. - On suppose $s \geq 1$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que, pour $j = 1,\dots,qs$ et tout $u \in W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n)$, on ait

$$\|t^{qs-j}u\|_{H^{\ell-\frac{j}{q}}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \; \|t^{qs}u\|_{H^{\ell}(\mathbb{R}^n)} + C_\varepsilon \; \|u\|_{H^{\ell-s}(\mathbb{R}^n)} .$$

Démonstration. -

1ere étape : n=1. Il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $u \in W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R})$, on ait :

$$\|t^{qs-1}u\|_{H^{\ell-\frac{1}{q}}(\mathbb{R})} \leq \varepsilon \, \|t^{qs}u\|_{H^{\ell}(\mathbb{R}^n)} + C_\varepsilon \; \|t^{qs-2}u\|_{H^{\ell \frac{2}{q}}(\mathbb{R})} .$$

Par densité, il suffit de le montrer pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Si Fu est la transformée de Fourier de u sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} (1+\tau^2)^{\ell-\frac{1}{q}} \frac{d^{qs-1}}{d^{\;qs-1}} Fu. \overline{\frac{d^{qs-1}}{d\tau^{qs-1}} Fu} \; d\tau = -\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\tau} \{(1+\tau^2)^{\ell-\frac{1}{q}} \frac{d^{qs-1}}{d^{\;qs-1}} Fu\} \overline{\frac{d^{qs-2}}{d\tau^{qs-2}} Fu} \; d$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} (1+\tau^2)^{\ell-\frac{1}{q}} \frac{d^{qs}}{d\tau^{qs}} Fu. \overline{\frac{d^{qs-2}}{d^{\;qs-2}} Fu} \; d\tau - 2(\ell-\frac{1}{q}) \int_{\mathbb{R}} (1+\tau^2)^{\ell-\frac{1}{q}\;1} \frac{d^{qs-1}}{d\tau^{qs-1}} Fu. \overline{\frac{d^{qs-2}}{d\tau^{qs-2}} Fu} \; d\tau.$$

Par suite :

$$\int_{\mathbb{R}} (1+\tau^2)^{\ell-\frac{1}{q}} \left|\frac{d^{qs-1}}{d\tau^{qs-1}} Fu\right|^2 d\tau \leq \int_{\mathbb{R}} (1+\tau^2)^{\frac{\ell}{2}} \left|\frac{d^{qs}}{d\tau^{qs}} Fu\right| . (1+\tau 2)^{\frac{\ell}{2}-\frac{1}{q}} \left|\frac{d^{qs-2}}{d\tau^{qs-2}} Fu\right| d\tau$$

$$+ \; 2 \; |\ell-\frac{1}{q}| \int_{\mathbb{R}} (1+\tau^2)^{\frac{\ell}{2}-\frac{1}{2q}} \left|\frac{d^{qs-1}}{d^{\;qs-1}} Fu\right| . (1+\tau^2)^{\frac{\ell}{2}-\frac{1}{q}} \left|\frac{d^{qs-2}}{d^{\;qs-2}} Fu\right| d\tau.$$

On utilise alors l'inégalité classique : $ab \leq \varepsilon a^2 + C_\varepsilon b^2$, ce qui donne l'inégalité (2.1).

2ème étape : $n > 1$. Il suffit de faire la démonstration pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

1er cas : $\ell-s > 0$. En utilisant le cas $n=1$, on montre que l'on a

$$\|t^{qs-j}u\|_{H^{\ell-\frac{j}{q}}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))} \leq \varepsilon \|t^{qs}u\|_{H^\ell(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))} + C_\varepsilon \|u\|_{H^{\ell-s}(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^{n-1}))}.$$

En posant $v(\tau) = \mathcal{F}u(\xi',\frac{\tau}{\Lambda^\delta})$ où $\Lambda = (1+|\xi'|^2)^{1/2}$ et $\delta = -\frac{1}{q}$, on vérifie que

$$v \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad D_\tau^{qs}\, v \in L^2(\mathbb{R}).$$

Par intégration par parties, on obtient que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $j = 1,\dots,qs$ on ait :

$$\|D_\tau^{qs-j}v\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \varepsilon \|D_\tau^{qs}v\|_{L^2(\mathbb{R})} + C_\varepsilon \|v\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

On fait le changement de variables $\eta = \frac{\tau}{\Lambda^\delta}$, on multiplie par $(1+|\xi'|^2)^{\ell-s}$ et on intègre par rapport à $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$. On obtient :

$$\|t^{qs-j}u\|_{L^2(\mathbb{R},H^{\ell-\frac{j}{q}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \leq \varepsilon \|t^{qs}u\|_{L^2(\mathbb{R},H^\ell(\mathbb{R}^{n-1}))} + C_\varepsilon \|u\|_{L^2(\mathbb{R},H^{\ell-s}(\mathbb{R}^{n-1}))}.$$

On en déduit alors que

$$\|t^{qs-j}u\|_{H^{\ell-\frac{j}{q}}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \|t^{qs}u\|_{H^\ell(\mathbb{R}^n)} + C_\varepsilon \|u\|_{H^{\ell-s}(\mathbb{R}^n)}.$$

2ème cas : $\ell-s < o$. On se ramène au cas où $\ell=s$, en posant

$$v(x) = \mathcal{F}^{-1}\ \{(1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{\ell-s}{2}}\ \hat{u}(\xi',\tau)\}\ (x).$$

La proposition 2.3 est donc complètement démontrée.

L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ étant dense dans $W^\ell_{q,s}(\mathbb{R}^n)$, il en résulte que l'espace dual $[W^\ell_{q,s}(\mathbb{R}^n)]'$ est un espace de distributions. Plus précisément, $[W^\ell_{q,s}(\mathbb{R}^n)]'$ s'identifie à l'espace des distributions T de la forme :

$$T = \sum_{j=o}^{qs} t^j\, g_j, \text{ où } g_j \text{ appartient à } H^{-\ell+s-\frac{j}{q}}(\mathbb{R}^n).$$

II.2 - Un lemme de dérivées intermédiaires.

Etant donnés deux nombres réels ℓ et r, on désigne par $H^{r,\ell}(\mathbb{R}^n)$ l'espace

$$H^{r,\ell}(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \; ; \; (1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{r}{2}} \; (1+|\xi'|^2)^{\frac{\ell}{2}} \quad \mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n)\} ,$$

muni de la norme canonique. Si q désigne un réel ≥ 1 et s un entier ≥ 0 tel que $q\, s \in \mathbb{N}$, on note $W_{q,s}\,(r,\ell;\mathbb{R}^n)$ l'espace :

$$W_{q,s}(r,\ell;\mathbb{R}^n) = \{u \in H^{r,\ell-s}(\mathbb{R}^n) \; ; \; t^{qs}u \in H^{r,\ell}(\mathbb{R}^n)\} ,$$

muni de la norme canonique. On a alors :

LEMME 2.1. - Pour tout $j = 0,\dots,qs$, l'application : $u \longmapsto t^{qs-j}u$ est linéaire et continue de $W_{q,s}(r,\ell;\mathbb{R}^n)$ dans $H^{r,\ell-j/q}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. - Le cas n=1 est immédiat. Lorsque n>1, on étudie le cas r=0, puis pour $r\neq 0$, on s'y ramène en posant

$$v(x) = \mathcal{F}^{-1} \quad \{(1+|\xi'|^2+\tau^2)^{r/2} \quad \hat{u}(\xi',\tau)\} \quad (x).$$

II.3 - Surjectivité des traces dans $W^{\ell}_{q,s}(\Omega)$.

II.3.1. - Etude dans le demi espace.

Soient $\ell \in \mathbb{Z}$, s un entier ≥ 0 et q un réel > 1 tel que $q\, s \in \mathbb{N}$. On définit les espaces de Sobolev suivants :

$$W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in H^{\ell-s}(\mathbb{R}^n_+) \; ; \; t^{qs}u \in H^{\ell}(\mathbb{R}^n_+)\} .$$

On les munit de la norme canonique.

PROPOSITION 2.4. - Pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq qs$, l'application $u \longmapsto t^{qs-j}u$ est linéaire et continue de $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $H^{\ell-j/q}(\mathbb{R}^n_+)$.

Démonstration. - Pour u appartenant à $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n_+)$, on pose :

$$Pu(x',t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{si} \quad t \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \; u(x',-jt), & \text{si} \quad t < 0, \end{cases}$$

avec $r = \max\,(qs-\ell, qs, \; \ell-s-1+qs)$, les α_j étant des constantes solutions du système $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \; (-j)^k = 1$ pour $k = \min(\ell-qs,-qs),\dots,\max(\ell-s-1,-1)$.
On vérifie facilement que P est un opérateur linéaire continu de $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n)$.

PROPOSITION 2.5. - $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ est dense dans $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. - Elle résulte de la proposition 2.2 et du lemme 2.2.

Lorsque ℓ-s>0, on peut définir les ℓ-s traces $\gamma_0 u,\dots,\gamma_{\ell-s-1}u$ pour les éléments de $u \in W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n_+)$, ces traces sont définies de façon classiques par :

$$\gamma_j u(x') = D_t^j u(x',0), \quad j = 0,\dots,\ell-s-1, \quad \text{où } D_t = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}.$$

On a alors :

PROPOSITION 2.6. - L'application $\gamma = (\gamma_0,\dots,\gamma_{\ell-s-1})$ est linéaire continue et surjective de $W^\ell_{q,s}(\mathbb{R}^n_+)$ sur $\prod_{j=o}^{\ell-s-1} H^{\ell-s-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Démonstration. - Elle est classique (cf. [8] par exemple).

II.3.2. - Etude dans l'ouvert Ω.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de bord Γ. On suppose que $\overline{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞. On se donne une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \varphi(x) > 0\}, \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \varphi(x) = 0\}, \\ (\forall\, x \in \Gamma)\ (\operatorname{grad} \varphi(x) \neq 0). \end{cases}$$

Etant donnés $\ell \in \mathbb{Z}$, s un entier ≥ 0 et q un réel > 1 tel que $qs \in \mathbb{N}$, on définit les espaces de Sobolev avec poids suivants :

$$W^\ell_{q,s}(\Omega) = \{u \in H^{\ell-s}(\Omega) \quad ; \quad \varphi^{qs} u \in H^\ell(\Omega)\},$$

que l'on munit de la norme canonique.

Des propositions 2.4 et 2.5, on déduit les résultats suivants :

PROPOSITION 2.7. - Pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq qs$, l'application $u \longmapsto \varphi^{qs-j} u$ est linéaire continue de $W^\ell_{q,s}(\Omega)$ dans $H^{\ell-j/q}(\Omega)$.

PROPOSITION 2.8. - L'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^\ell_{q,s}(\Omega)$.

Lorsque $\ell-s > 0$, on va définir des traces pour les éléments de $W^\ell_{q,s}(\Omega)$. Soit δ un nombre réel > 0 et soit $U_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ d(x;\Gamma) < \delta\}$ où $d(x,\Gamma)$ désigne la distance du point x à Γ. On suppose que δ est suffisamment petit pour que, pour tout $x \in U_\delta$, la distance de x à Γ ne soit atteinte que par un seul point x_Γ de Γ. L'application

$$\Psi : \begin{cases} U_\delta \longrightarrow \Gamma \times]-\delta,\delta[\\ x \longrightarrow \left(x_\Gamma, \dfrac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|}\, d(x,\Gamma)\right) \end{cases}$$

est un isomorphe de classe C^∞.

Alors, pout tout u appartenant à $W^\ell_{q,s}(\Omega)$ et tout $j = 0,\dots,\ell-s-1$, on pose, pour $x \in \Gamma$

$$\gamma_j u(x) = D_t^j u(\Psi^{-1}(x,t))|_{t=o}, \quad \text{où} \quad D_t = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}.$$

De la proposition 2.6, on déduit alors :

PROPOSITION 2.9. - L'application $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{\ell-s-1})$ est linéaire, continue et surjective de $W^{\ell}_{q,s}(\Omega)$ sur

$$\prod_{j=o}^{\ell-s-1} H^{\ell-s-j-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

II.4. - Quelques propriétés d'une classe d'opérateurs différentiels ordinaires elliptiques et dégénérés.

On rappelle et on complète les résultats de [9].

Soit $L = L(t,D_t)$ l'opérateur différentiel défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$Lu(t) = L(t,D_t)u(t) = \sum_{h=o}^{m-r} P^{m-h}(D_t) \ \{t^{q(m-r-h)} u(t)\} ,$$

où $D_t = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$, m et r sont deux entiers tels que $0 \leq r \leq m$, q un réel > 1 tel que $q(m-r) \in \mathbb{N}$ et où :

(i) Pour $h = 0,\ldots,m-r$, $P^{m-h}(D_t)$ est un opérateur différentiel ordinaire d'ordre $\leq m-h$, à coefficients constants complexes :

$$P^{m-h}(D_t) = \sum_{j=o}^{m-h} P_j^{m-h} \ D_t^j \ ;$$

(si $q(m-r-h) \notin \mathbb{N}$, $P^{m-h}(D_t)$ est, par définition, l'opérateur identiquement nul).

(ii) $P^m(D_t)$ est un opérateur d'ordre m, elliptique, c'est-à-dire que, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, on a

$$P^m(\tau) = \sum_{j=o}^{m} P_j^m \ \tau^j \neq 0.$$

On considère alors l'hypothèse suivante, "d'ellipticité générale" :

(H_+) Pour tout $t \geq 0$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{h=o}^{m-r} P_{m-h}^{m-h} \ \tau^{m-r-h} \ t^{q(m-r-h)} \neq 0.$$

Les résultats que nous utiliserons par la suite sont les suivants :

PROPOSITION 2.10. - Soient s et λ deux réels, avec $\lambda \geq 0$. Sous l'hypothèse (H_+), si $u \in W^{m+s}_{q,m-r}(\mathbb{R}_+)$ et si $Lu \in H^{s+\lambda}(\mathbb{R}_+)$, alors $u \in W^{m+s+\lambda}_{q,m-r}(\mathbb{R}_+)$.

Démonstration. - Cette proposition sera montrée si l'on prouve que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'opérateur L est à indice de $W^{m+s}_{q,m-r}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^s(\mathbb{R}_+)$, dindice indépendant de s.

1°) Soit alors T > 0. D'après le théorème 2.2 de [9], on sait que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ l'opérateur :

$$M(t,D_t) = \sum_{h=o}^{m-r} P_{m-h}^{m-h} \ D_t^{m-r-h} \ \{t^{q(m-r-h)}.\}$$

est à indice de $W^{m+p}_{q,m-r}(0,T)$ dans $H^{r+p}(0,T)$, d'indice indépendant de p et égal à $m-r-m_+$, où m_+ désigne le nombre de racines τ de l'équation

$$P(\tau) = \sum_{h=0}^{m-r} P_{m-h}^{m-h} \tau^{m-r-h} = 0$$

telles que Im $\tau > 0$. Comme l'opérateur D_t^r est à indice, d'indice r, de $H^{p+r}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$, on en déduit que $D_t^r \circ M(t,D_t)$ est un opérateur à indice de $W_{q,m-r}^{m+p}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$, d'indice indépendant de $p \in \mathbb{Z}$ et égal à $m-m_+$. En montrant que l'opérateur $L-D_t^r \circ M(t,D_t)$ est compact de $W_{q,m-r}^{m+p}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$, on achève de démontrer que L est à indice, d'indice $m-m_+$, de $W_{q,m-r}^{m+p}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$.

2°) Pour $p \in \mathbb{Z}$, l'opérateur $u \longmapsto t^{q(m-r)}u$ est un isomorphisme de $W_{q,m-r}^{m+p}(T,+\infty)$ sur $H^{m+p}(T,+\infty)$. Puisque $P^m(D_t)$ est elliptique, il vient que l'opérateur $P^m(D_t)\,\{t^{q(m-r)}.\}$ est un opérateur à indice de $W_{q,m-r}^{m+p}(T,+\infty)$ dans $H^p(T,+\infty)$, d'indice égal à n_+, n_+ désignant le nombre de racines τ de l'équation $P^m(\tau) = 0$ telles que Im $\tau > 0$. On montre alors que $L(t,D_t)$ est un opérateur à indice, d'indice n_+, de $W_{q,m-r}^{m+p}(T,+\infty)$ dans $H^p(T,+\infty)$ en démontrant que l'opérateur $L(t,D_t)-P^m(D_t)\{t^{q(m-r)}.\}$ est compact de $W_{q,m-r}^{m+p}(T,+\infty)$ dans $H^p(T,+\infty)$.

3°) On regroupe les résultats obtenus au 1° et 2° à l'aide d'un diagramme commutatif, et on achève la démonstration de la proposition 2.10 par interpolation dans le cas où $s \notin \mathbb{Z}$.

Introduisons alors l'opérateur adjoint formel $L^* = L^*(t,D_t)$ de L défini par :

$$L^*u(t) = L^*(t,D_t)u(t) = \sum_{h=0}^{m-r} t^{q(m-r-h)} \; P^{m-h*}(D_t)u(t)$$

où, pour $h = 0,\dots,m-r$:

$$P^{m-h*}(D_t) = \sum_{j=0}^{m-h} \overline{P_j^{m-h}} \; D_t^j.$$

PROPOSITION 2.11. - <u>Soient</u> s <u>et</u> λ <u>réels, avec</u> $\lambda \geq 0$. <u>Sous l'hypothèse</u> (H_+), <u>si</u> $u \in W_{q,m-r}^{m+s}(\mathbb{R}_+)$ <u>et si</u> $L^*u \in H^{s+\lambda}(\mathbb{R}_+)$, <u>alors</u> $u \in W_{q,m-r}^{m+s+\lambda}(\mathbb{R}_+)$.

<u>Démonstration</u>. - On écrit $L^*(t,D_t) = \tilde{L}(t,D_t) + Q(t,D_t)$ avec

$$\tilde{L}(t,D_t) = \sum_{h=0}^{m-r} P^{m-h*}(D_t) \; \{t^{q(m-r-h)}.\}$$

$\tilde{L}(t,D_t)$ vérifiant les mêmes propriétés que l'opérateur $L(t,D_t)$, la proposition 2.11 se déduit de la démonstration de la proposition 2.10 en remarquant que $Q(t,D_t)$ est compact de $W_{q,m-r}^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}_+)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, on désigne par $H_0^\ell(\mathbb{R}_+)$ l'espace des distributions de $H^\ell(\mathbb{R})$ à support dans $\overline{\mathbb{R}_+}$. Des propositions 2.10 et 2.11, on déduit alors par transposition :

PROPOSITION 2.12. - <u>Soient</u> s <u>et</u> λ <u>deux réels, avec</u> $\lambda \geq 0$. <u>Sous l'hypothèse</u> (H_+), si $u \in H_0^s(\mathbb{R}_+)$ et si $L\,u \in [W^{m-s-\lambda}_{q,m-r}(\mathbb{R})]'$ (resp. $L^*u \in [W^{m-s-\lambda}_{q,m-r}(\mathbb{R})]'$), alors $u \in H_0^{s+\lambda}(\mathbb{R})$.

II.5. - Théorème de régularité.

II.5.1. - Notations, hypothèses et résultat.

Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x,D_x)$ un opérateur défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\mathcal{L}u(x) = \mathcal{L}(x,D_x)u(x) = \sum_{h=o}^{m-r} \mathcal{P}^{m-h}(x,D_x) \quad \{t^{q(m-r-h)}u(x)\} ,$$

où $D_x = (\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}},\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t})$, r et m sont deux entiers tels que $0 \leq r \leq m$, q un réel > 1 tel que $q(m-r) \in \mathbb{N}$, et où :

(i) pour $h = 0,\dots,m-r$, $\mathcal{P}^{m-h}(x,D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment différentiables dans $\mathbb{R}^n$, d'ordre inférieur ou égal à m-h :

$$\mathcal{P}^{m-h}(x;D_x) = \sum_{|\alpha'|+j\leq m-h} P^{m-h}_{(\alpha',j)}(x) \quad D^{\alpha'}_{x'} \quad D^j_t \ ;$$

(si $q(m-r-h) \notin \mathbb{N}$, $\mathcal{P}^{m-h}(x,D_x)$ est l'opérateur identiquement nul). Nous noterons $\mathcal{P}^{m-h}_{m-h}(x,D_x)$ la partie principale d'ordre m-h de $\mathcal{P}^{m-h}(x,D_x)$.

(ii) $\mathcal{P}^m(0,D_x)$ est un opérateur à coefficients constants, elliptique, d'ordre m. On introduit alors l'hypothèse "d'ellipticité générale" suivante :
(C_1) pour tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, tout $t \geq 0$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a :

$$\mathcal{L}_0((x',o);t;\ ) = \sum_{h=o}^{m-r} \mathcal{P}^{m-h}_{m-h}((x',0);\xi) \quad t^{q(m-r-h)} \neq 0.$$

Cette hypothèse implique en particulier que l'opérateur $\mathcal{P}^r(0,D_x)$ est elliptique.

On notera $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}^*(x,D_x)$ l'opérateur adjoint formel de $\mathcal{L}(x,D_x)$. Pour tout réel $\rho > 0$, désignons par $B(0,\rho)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon ρ. On se propose de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1. - On suppose que l'opérateur $\mathcal{L}(x,D_x)$ vérifie l'hypothèse (C_1). Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, si $u \in L^2(B(0,1))$ avec $\operatorname{supp} u \subset B(0,1) \cap \mathbb{R}^n_+$, et si $\mathcal{L}u \in L^2(B(0,1))$ (resp. $\mathcal{L}^*u \in L^2(B(0,1))$), alors pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\operatorname{supp} \phi \subset B(0,\varepsilon_0)$, on a : $\phi u \in W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 2.1. - Lorsque r=m, on a $\mathcal{L}(x,D_x) = \mathcal{P}^r(x,D_x)$; et dans ce cas, le résultat du théorème 2.1 est classique. Nous pouvons donc supposer, dans la démonstration du théorème 2.1, que $r < m$.

II.5.2. - Lemmes techniques.

Pour démontrer le théorème 2.1, on utilisera de façon essentielle deux lemmes de régularité tangentielle. Ces lemmes se démontrent par la méthode des quotients différentiels à partir d'inégalités a priori.

LEMME 2.3. - Soit ℓ un entier ≥ 0. Il existe une constante $\varepsilon_\ell > 0$ telle que, si $u \in W^\ell_{q,m-r}(\mathbb{R}^n)$ avec $\operatorname{supp} u \subset B(0,\varepsilon_\ell)$, si $\frac{\partial}{\partial x_i'} u \in H^{\ell-(m-r)}(\mathbb{R}^n)$ et si $\frac{\partial}{\partial x_i'} \mathcal{L} u \in H^{\ell-m}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\frac{\partial}{\partial x_i'} \mathcal{L}^* u \in H^{\ell-m}(\mathbb{R}^n)$), alors $\frac{\partial}{\partial x_i'} u \in W^\ell_{q,m-r}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. - On a :

$$\mathcal{P}^m(x,D_x)\,\{t^{q(m-r)}u\} = \mathcal{L}(x;D_x)u - \sum_{h=1}^{m-r} \mathcal{P}^{m-h}(x;D_x)\;\{t^{q(m-r-h)}u\}\ .$$

En utilisant le fait que $\mathcal{P}^m(0;D_x)$ est elliptique, on montre qu'il existe une constante $\varepsilon_\ell > 0$ telle que si $u \in W^\ell_{q,m-r}(\mathbb{R}^n)$, avec $\operatorname{supp} u \subset B(0,\varepsilon_\ell)$, on ait :

$$\|t^{q(m-r)}u\|_{H^\ell(\mathbb{R}^n)} \leq C\ \{\ \|\mathcal{L} u\|_{H^{\ell-m}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{H^{\ell-(m-r)}(\mathbb{R}^n)} + \|t^{q(m-r)}u\|_{H^{\ell-1}(\mathbb{R}^n)}\}\ .$$

On en déduit une inégalité a priori analogue pour l'opérateur $\mathcal{L}^*$. La méthode des quotients différentiels permet alors de terminer la démonstration du lemme 2.3.

LEMME 2.4. - On suppose que l'opérateur $\mathcal{L}(x,D_x)$ vérifie la condition (C_1). Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $\varepsilon_p > 0$ tel que, si $u \in H^p(\mathbb{R}^n)$ avec

$$\operatorname{supp} u \subset B(0,\varepsilon_p) \cap \overline{\mathbb{R}^n_+} \ \text{ et si } \ \frac{\partial}{\partial x_i'} \mathcal{L} u \in [W^{m-p}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n)]'$$

(resp. $\frac{\partial}{\partial x_i'} \mathcal{L}^* u \in [W^{m-p}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n)]'$), alors $\frac{\partial}{\partial x_i'} u \in H^p(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. - On applique le théorème 5.5 de [11], pour le cas particulier qui est le nôtre et pour l'opérateur $\mathcal{L}^*$ en prenant les g_j identiquement nuls. Il vient qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ avec $\operatorname{supp} u \subset B(0,\varepsilon_0) \cap \overline{\mathbb{R}^n_+}$, on a :

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\ \{\ \|\mathcal{L} u\|_{[W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n)]'} + \|u\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^n)}\}\ .$$

On montre alors, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, qu'il existe $\varepsilon_p > 0$ tel que, si $u \in H^p(\mathbb{R}^n)$ avec $\operatorname{supp} u \subset B(0,\varepsilon_p) \cap \overline{\mathbb{R}^n_+}$, on a :

$$\|u\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\ \{\|\mathcal{L} u\|_{[W^{m-p}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n)]'} + \|u\|_{H^{p-1}(\mathbb{R}^n)}\}\ .$$

Et l'on a une estimation a priori analogue pour l'opérateur $\mathcal{L}^*$. On termine alors la démonstration par la méthode des quotients différentiels tangentiels.

II.5.3. - Démonstration du théorème 2.1.

On fait la démonstration pour $r \geq 1$ et pour l'opérateur $\mathcal{L}(x,D_x)$. (Pour $\mathcal{L}^*(x,D_x)$ la démonstration serait analogue).

On fait l'hypothèse de récurrence suivante :

(K_p) Il existe $\varepsilon_p > 0$ tel que, si $u \in L^2(B(0,1))$ avec supp $u \subset B(0,1) \cap \overline{\mathbb{R}^n_+}$ et $\mathcal{L}u \in L^2(B(0,1))$, alors, pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que supp $u \subset B(0,\varepsilon_p)$, on a :

$$D^{\alpha}_{x'} \ \Phi u \in W^{p+1}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \text{pour} \quad |\alpha| \leq m-p-1$$

$$D^{\alpha}_{x'} \ \Phi u \in H^p(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \text{pour} \quad |\alpha| \leq r-p.$$

1°) L'hypothèse (K_0) est vraie : Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que supp $\phi \subset B(0,\varepsilon_0)$ où ε_0 est < 1 et satisfait les conditions du lemme 2.4 pour p=0. On a $\phi u \in H^0(\mathbb{R}^n)$.

En utilisant les égalités :

$$(2.3) \quad D^{\alpha}_{x'} \ \mathcal{L}(\phi u) = (D^{\alpha}_{x'} \ \phi u) + \sum_{h=0}^{m-r} \ \sum_{|\beta| \leq m-h} \ \sum_{\substack{\gamma < \alpha \\ \gamma \neq 0}} D^{\gamma}_{x'} \ \{P^{m-h}_{\beta}(x) \ D^{\beta}_{x} \ \{t^{q(m-r-h)} \ D^{\alpha-\gamma}_{x'} \ \phi u\}$$

et

$$(2.4) \quad \mathcal{L}(\phi u) = \phi \, \mathcal{L}u + \sum_{h=0}^{m-r} \ [\mathcal{P}^{m-h}(x,D_x),\phi] \ \{t^{q(m-r-h)} \ \Psi u\} \ ,$$

où $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec supp $\Psi \subset B(0,\varepsilon_0)$ et $\Psi\phi = \phi$; et en raisonnant par récurrence sur $|\alpha|$, il vient que $D^{\alpha}_{x'} \ \phi u \in H^0(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leq r$. Comme $\mathcal{L}(\phi u) \in H^{-m+1}(\mathbb{R}^n)$ puisque $m \geq 1$ on en déduit que :

$$\mathcal{P}^m(x,D_x) \quad \{t^{q(m-r)} \ \phi u\} \in H^{-m+1}(\mathbb{R}^n).$$

L'opérateur $\mathcal{P}^m(0;D_x)$ étant elliptique, en choisissant ε_0 assez petit on obient que $t^{q(m-r)} \ \phi u \in H^1(\mathbb{R}^n)$; ceci démontre que $\phi u \in W^1_{q,m-r}(\mathbb{R}^n)$ (car $r < m$). En raisonnant à nouveau par récurrence sur $|\alpha|$, et en utilisant les inégalités (2.3) et (2.4) ainsi que le lemme 2.3, on montre alors que $D^{\alpha}_{x'} \ \phi u \in W^1_{q,m-r}(\mathbb{R}^n)$, pour $|\alpha| \leq m-1$.

2°) Si $p < r-1$, l'hypothèse (K_p) implique l'hypothèse (K_{p+1}) : On prend $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que supp $\phi \subset B(0,\varepsilon_{p+1})$ où $\varepsilon_{p+1} \in \,]0,\varepsilon_p]$ sera choisi convenablement.

Montrons tout d'abord que $\phi u \in H^{p+1}(\mathbb{R}^n)$. Pour cela, on remarque que :

$$(2.5) \quad \sum_{h=0}^{m-r} P^{m-h}_{(o,m-h)}(x) \ D^{m-h}_t \ \{t^{q(m-r-h)} \ \phi u\} \in [W^{m-p-1}_{q,m-r}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))]' \ .$$

En effet :

* Pour $0 \leq j \leq p$ l'hypothèse (K_j) implique que $t^{q(m-r)} \ \phi u \in H^{j,m-j}(\mathbb{R}^n)$ et $\phi u \in H^{j,r-j}(\mathbb{R}^n)$; donc on a $t^{q(m-r-h)} \ \phi u \in H^{j,m-j-h}(\mathbb{R}^n)$.

Par suite, pour $|\alpha|+j \leq m-h$, on a :

$$D^j_t \ D^{\alpha}_{x'} \ \{t^{q(m-r-h)} \phi u\} \in L^2(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1})) \hookrightarrow [W^{m-p-1}_{q,m-r}(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^{n-1}))]' , \text{(car } p < r-1).$$

* Pour $p < j < m-r-h+p$, on choisit un entier s tel que $q(j-(r-1)) \leq s \leq q(j-p)$, ce qui est possible car $p<r-1$ et $q>1$. On écrit alors :

$$D_t^j \{t^{q(m-r-h)} \phi u\} = D_t^j \{t^s . t^{q(m-r-h)-s} \phi u\}$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{\min(s,j)} 0_{\lambda,j,s} \; t^{s-\lambda} D^{j-\lambda} \{t^{q(m-r-h)-s} \phi u\}.$$

L'hypothèse (K_p) implique que $t^{q(m-r-h)-s} \phi u \in H^{p,m-p-h-\frac{s}{q}}(\mathbb{R}^n)$.

Par suite, pour $|\alpha|+j \leq m-h$, on a :

$$D_t^{j-\lambda} D_{x'}^{\alpha} \{t^{q(m-r-h)-s} \phi u\} \in H^{p-j+\lambda, j-p-\frac{s}{q}}(\mathbb{R}^n).$$

Et, comme $q(j-(r-1)) \leq s \leq q(j-p)$, on en déduit que :

$$D_t^{j-\lambda} D_{x'}^{\alpha} \{t^{q(m-r-h)-s} \phi u\} \in H^{-r+p+1-\frac{s}{q}+\frac{\lambda}{q}}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1})).$$

Par conséquent, pour $|\alpha|+j \leq m-h$, on a :

$$D_t^j D_{x'}^{\alpha} \{t^{q(m-r-h)} \phi u\} \in [W_{q,m-r}^{m-p-1}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))]'.$$

* Pour $m-r-h+p \leq j \leq m-h-1$, on raisonne comme dans le cas précédent, en prenant $s = q(m-r-h)$.

L'assertion (2.5) est alors une conséquence de l'égalité (2.4).

On en déduit que :

$$\sum_{h=0}^{m-r} p_{(o,m-h)}^{m-h}(x',o) \, D_t^{m-h} \{t^{q(m-r-h)} \Phi u\} \in \left[W_{q,m-r}^{m-p-\frac{1}{q}}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))\right]' .$$

Soit alors $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\tau^m+\lambda$ n'ait pas de racine réelle. On applique la proposition 2.12 à l'opérateur :

$$(D_t^m+\lambda) \{t^{q(m-r)} .\} + \sum_{h=1}^{m-h} p_{(o,m-h)}^{m-h}(x',o) \, D_t^{m-h} \{t^{q(m-r-h)} .\} \quad ;$$

on en déduit que $\Phi u \in H^{p+\frac{1}{q}}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$. Et, par récurrence, on prouve que $\Phi u \in H^{p+1}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$. Mais, d'après l'hypothèse (K_p), on sait que, pour $i = 1,\ldots,n-1$, $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\Phi u \in H^p(\mathbb{R}^n)$. Par conséquent, $\Phi u \in H^{p+1}(\mathbb{R}^n)$.

Utilisant à nouveau les égalités (2.2) et (2.3) ainsi que les lemmes 2.4 et 2.5, on montre (par récurrence) que (K_{p+1}) est vraie.

Finalement, l'hypothèse (K_{r-1}) est vraie.

On fait maintenant l'hypothèse de récurrence suivante :

(H_ℓ) Il existe $\varepsilon_\ell > 0$ tel que, si $u \in L^2(B(0,1))$ avec supp $u \subset B(0,1) \cap \overline{\mathbb{R}_+^n}$ et $\mathcal{L}u \in L^2(B(0,1))$, alors, pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que supp $\Phi \subset B(0,\varepsilon_\ell)$, on a : $\quad D_{x'}^{\alpha} \Phi u \in W_{q,m-r}^{\ell}(\mathbb{R}^n)$, pour $|\alpha| \leq m-\ell$.

3°) <u>L'hypothèse (H_r) est vraie</u> : Ceci découle trivialement du fait que l'hypothèse (K_{r-1}) est vraie.

4°) <u>Si</u> $r \leq \ell < m$, <u>l'hypothèse</u> (H_ℓ) <u>implique l'hypothèse</u> $(H_{\ell+1})$: Soit $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec supp $\Phi \subset B(0,\varepsilon_{\ell+1})$, où $\varepsilon_{\ell+1} \in]0,\varepsilon_\ell]$ sera choisi convenablement. Montrons tout d'abord que $\Phi u \in W^{\ell+1}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n)$. Pour cela, on remarque que :

$$(2.5) \quad \sum_{h=0}^{m-r} p^{m-h}_{(0,m-h)}(x)\, D_t^{m-h}\, \{t^{q(m-r-h)}\, \Phi u\} \in H^{-m+\ell+1}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1})).$$

En effet :

* Pour $\ell+1 \leq h \leq m$, l'hypothèse (H_r) implique que :

$$t^{q(m-r)}\, \Phi u \in H^{r,m-r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{r-1,m-r+1}(\mathbb{R}^n).$$

De plus, l'hypothèse (K_{r-1}) implique que $\Phi u \in H^{r-1,1}(\mathbb{R}^n)$. On en déduit, grâce au lemme 2.1, que :

$$t^{q(m-r-h)}\, \Phi u \in H^{r-1,m-r+1-h}(\mathbb{R}^n).$$

Par suite, pour $|\alpha|+j \leq m-h$, on a :

$$D_t^j\, D^\alpha_{x'}\, \{t^{q(m-r-h)}\, \Phi u\} \in H^{r-1-j,-r+1+j}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-m+\ell+1}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1})).$$

* Pour $0 \leq h \leq \ell$, l'hypothèse (H_ℓ) implique que, pour $|\alpha| \leq m-\ell$, on a :

$$D^\alpha_{x'}\, \{t^{q(m-r-h)}\, \Phi u\} \in H^{\ell-h}(\mathbb{R}^n) \ ;$$

donc, pour $|\alpha|+j \leq m-h$ avec $0 < |\alpha| \leq m-\ell$, on a :

$$D_t^j\, D^\alpha_{x'}\, \{t^{q(m-r-h)}\, \Phi u\} \in H^{-m+\ell+1}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1})).$$

Pour $|\alpha| = m-\ell+\lambda$ avec $1 \leq \lambda \leq \ell-h$, on a :

$$D^\alpha_{x'}\, \{t^{q(m-r-h)}\, \Phi u\} \in H^{\ell-h-\lambda}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1})) \ ;$$

donc, pour $|\alpha|+j \leq m-h$, on a, puisque $\ell \leq m-1$:

$$D_t^j\, D^\alpha_{x'}\, \{t^{q(m-r-h)}\, \Phi u\} \in H^{\ell-h-\lambda-j}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1})) \hookrightarrow H^{-m+\ell+1}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1})).$$

L'assertion (2.5) est alors une conséquence de l'égalité (2.3). On en déduit que :

$$\sum_{h=0}^{m-r} p^{m-h}_{(0,m-h)}(x',0)\, D_t^{m-h}\, \{t^{q(m-r-h)}\, \Phi u\} \in H^{-m+\ell+\frac{1}{q}}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1})).$$

Soit alors $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\tau^m+\lambda$ n'ait pas de racine réelle. On applique la proposition 2.10 à l'opérateur :

$$(D_t^m + \lambda)\ \{t^{q(m-r)}.\} + \sum_{h=1}^{m-r} p^{m-h}_{(0,m-h)}(x',0)\, D_t^{m-h}\ \{t^{q(m-r-h)}.\} \ ;$$

on en déduit que $\Phi u \in W^{\ell+\frac{1}{q}}_{q,m-r}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$. Et, par récurrence, on prouve que $\Phi u \in W^{\ell+1}_{q,m-r}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$. D'après l'égalité (2.3), on a $\mathcal{L}(\Phi u) \in H^{-m+\ell+1}(\mathbb{R}^n)$; on en déduit que :

$$\mathcal{P}^m(x;D_x)\ \{t^{q(m-r)}\, \Phi u\} \in H^{-m+\ell+1}(\mathbb{R}^n) \ ;$$

et, puisque $\mathcal{P}^m(0;D_x)$ est elliptique, il en résulte que $t^{q(m-r)}\, \Phi u \in H^{\ell+1}(\mathbb{R}^n)$. Or $\Phi u \in H^{\ell+1-(m-r)}(\mathbb{R}^n)$ car $\Phi u \in H^{\ell+1-(m-r)}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ et, d'après l'hypothèse (H_ℓ), $\Phi u \in H^{\ell-(m-r)}(\mathbb{R}^n)$ et $\frac{\partial}{\partial x_i}\ \Phi u \in H^{\ell-(m-r)}(\mathbb{R}^n)$ pour $i = 1,\dots,n-1$.

Par conséquent $u \in W^{\ell+1}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n)$. Utilisant à nouveau les égalités (2.2) et (2.3), le lemme 2.4 ainsi que l'hypothèse (K_{r-1}), on montre alors (par récurrence) que l'hypothèse $(H_{\ell+1})$ est vraie.

Finalement (H_m) est vraie, c'est-à-dire que le théorème 2.1 est démontré.

Remarque 2.2. - Si r=0, on montre que (H_0) est vraie, puis que, pour $\ell = 0,\dots,m-1$, l'hypothèse (H_ℓ) implique l'hypothèse $(H_{\ell+1})$.

III - THÉORÈMES DE DENSITÉ POUR LES DOMAINES D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS MAXIMAUX ASSOCIÉS A UNE CLASSE D'OPÉRATEURS ELLIPTIQUES ET DÉGÉNÉRÉS.

III.1. - Notations et hypothèses.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ. On suppose que $\overline{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞. On se donne une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad \varphi(x) > 0\}, \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad \varphi(x) = 0\}, \\ (\forall\ x \in \Gamma)\ (\operatorname{grad}\ \varphi(x) \neq 0\ . \end{cases}$$

Soit $L = L(x;D_x)$ l'opérateur différentiel défini sur Ω par :

$$Lu = L(x;D_x)\ u(x) = \sum_{h=o}^{m-r} P^{m-h}(x;D_x) \quad \{\varphi(x)^{q(m-r-h)}\ u(x)\}\ ,$$

où m et r sont deux entiers tels que $0 \leq r \leq m$, q est un réel > 1 tel que $q(m-r) \in \mathbb{N}$, et où :

(i) Pour $h = 0,\dots,m-r$, $P^{m-h}(x,D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment dérivables dans $\overline{\Omega}$, d'ordre inférieur ou égal à m-h :

$$P^{m-h}(x,D_x) = \sum_{|\alpha|\leq m-h} p_\alpha^{m-h}(x)\ D_x^\alpha,$$

où $D_x = (\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n})$; (si $q(m-r-h) \notin \mathbb{N}$, $P^{m-h}(x;D_x)$ est, par définition, l'opérateur identiquement nul).

(ii) $P^m(x;D_x)$ est un opérateur d'ordre m, elliptique dans $\overline{\Omega}$, c'est-à-dire que, pour tout $x_0 \in \overline{\Omega}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a :

$$P_m^m(x_0,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} p^m(x_0) \quad \xi^\alpha \neq 0.$$

Pour tout $h = 0,\dots,m-r$, on notera $P_{m-h}^{m-h}(x;D_x)$ la partie principale d'ordre m-h de l'opérateur $P^{m-h}(x;D_x)$.

On introduit alors l'hypothèse "d'ellipticité générale" suivante :

(C) Pour tout $x_0 \in \Gamma$, tout $x \in \overline{\Omega}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a :

$$L_o(x_o;x;\ ) = \sum_{h=o}^{m-r} P_{m-h}^{m-h}(x_o;\xi)\ \varphi(x)^{q(m-r-h)} \neq 0.$$

Cette hypothèse implique en particulier que l'opérateur $P^r(x;D_x)$ est elliptique sur Γ, c'est-à-dire que, pour tout $x_o \in \Gamma$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a :

$$P_r^r(x_o;\xi) \neq 0.$$

On désigne par $D(L;\Omega)$ le domaine maximal dans $L^2(\Omega)$ de l'opérateur L ; c'est-à-dire :

$$D(L;\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)\ ;\ Lu \in L^2(\Omega)\}.$$

L'espace $D(L;\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme :

$$u \longmapsto \|u\|_{D(L;\ )} = (\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Lu\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}.$$

On définit de façon analogue l'espace de Hilbert $D(L^*;\Omega)$.

III.2. - Enoncé des résultats.

Lorsque $r = 0$, on va établir le :

THÉORÈME 3.1. - *Si* $r = 0$, *et si l'opérateur* L *vérifie la condition* (C), *alors l'espace* $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $D(L;\Omega)$ *et dans* $D(L^*;\Omega)$.

Lorsque $r \neq 0$, le résultat est le suivant :

THÉORÈME 3.2. - *Si* $0 < r \leq m$, *et si l'opérateur* L *vérifie la condition* (C), *alors l'espace* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $D(L;\Omega)$ *et dans* $D(L^*;\Omega)$.

III.3. - Démonstration des théorèmes 3.1 et 3.2.

Le principe de la démonstration des théorèmes 3.1 et 3.2 est la méthode de dualité de [8] qui ramène le problème de densité des fonctions régulières dans le domaine maximal à un problème de régularité.

Le théorème 3.1 résulte en fait de la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. - *Si* $r = 0$, *et si l'opérateur* L *vérifie la condition* (C), *alors l'espace* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $D(L;\Omega)$ *et dans* $D(L^*;\Omega)$.

Démonstration. - Soit M une forme linéaire continue sur $D(L;\Omega)$, nulle sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, c'est-à-dire telle que :

(3.1) $$(\forall\ u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}))\ (Mu = 0).$$

Il existe f et g appartenant à $L^2(\Omega)$ tels que :

(3.2) $$(\forall\ u \in D(L;\Omega))\ (Mu = (f,u)_{L^2(\Omega)} + (g,Lu)_{L^2(\Omega)}).$$

La condition (3.1) est alors équivalente à :

(3.3) $$L^* \tilde{g} = - \tilde{f} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

où g (resp. f) est le prolongement par 0 de g (resp. de f) dans $\mathbb{R}^n \backslash \bar{\Omega}$. (On suppose évidemment que les coefficients de l'opérateur L sont prolongés à $\mathbb{R}^n$).

L'opérateur L étant elliptique dans , on en déduit que $g \in H^m_{loc}(\Omega)$. D'autre part, d'après (3.3) et le théorème 2.1, on déduit que $g \in W^m_{q,m}(\Omega)$. Et, comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W^m_{q,m}(\Omega)$, il en résulte que Mu = 0 pour tout u D(L;D). La proposition 3.1 est donc démontrée pour L. Pour L^*, on procède exactement de la même manière.

Démonstration du théorème 3.1. On raisonne encore par dualité. Soit M une forme linéaire continue sur $D(L;\Omega)$, nulle sur $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est-à-dire telle que :

(3.4) $$(\forall\, u \in \mathcal{D}(\Omega)) \; (Mu = 0).$$

Il existe f et g appartenant à $L^2(\Omega)$ tels que :

(3.5) $$(\forall\, u \in D(L;\Omega)) \; (Mu = (f,u)_{L^2(\Omega)} + (g,Lu)_{L^2(\Omega)}).$$

La condition (2.4) est alors équivalente a :

(3.6) $$L^* g = -f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Ainsi g appartient à $D(L^*;\Omega)$. Or, on a, pour tout $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et tout $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$:

(3.7) $$(Lu,v)_{L^2(\Omega)} = (u,L^* v)_{L^2(\Omega)}, \text{ car } r = 0.$$

Par suite, en utilisant (3.6) et la proposition 3.1, on déduit que, pour tout $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, Mu = 0. Et comme $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $D(L;\Omega)$ d'après la proposition 3.1, on en déduit que M = 0. Le théorème 3.1 est donc démontré pour L. Pour L^*, la démonstration est tout à fait semblable.

Démonstration du théorème 3.2. - La démonstration est analogue à celle de la proposition 3.1, en remarquant que l'on déduit de (3.3) et du théorème 2.1 que

$$g \in \overset{\circ}{W}{}^m_{q,m-r}(\Omega) = \{u \in H^r_0(\Omega) \; ; \; \varphi^{q(m-r)} u \in H^m(\Omega)\}.$$

On termine alors comme dans la proposition 3.1.

IV - THÉORÈME DE TRACES POUR LES DOMAINES D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS MAXIMAUX ASSOCIÉS A UNE CLASSE D'OPÉRATEURS ELLIPTIQUES ET DÉGÉNÉRÉS.

Dans ce chapitre, on va d'abord montrer une formule de Green pour les fonctions régulières. Le théorème 3.2 permettra alors de déduire l'existence de traces pour les éléments du domaine maximal associé aux opérateurs considérés. Comme dans [8], on utilise la méthode globale.

IV.1. - La formule de Green.

Dans cette section et la suivante, on conserve les notations du paragraphe III.

THÉORÈME 4.1. - Soit $\{B_j\ ;\ j = 0,\ldots,r-1\}$ un système d'opérateurs "frontière" sur Γ, à coefficients $C^\infty(\Gamma)$, B_j étant d'ordre m_j. On suppose que ce système est un système de Dirichlet d'ordre r sur Γ.

Alors il existe un système d'opérateurs "frontière" $\{C_j\ ;\ j = 0,\ldots,r-1\}$ unique ayant les propriétés suivantes :

(i) les coefficients de C_j sont dans $C^\infty(\Gamma)$ et l'ordre de C_j est égal à $r-1-m_j$;

(ii) le système $\{C_j\ ;\ j = 0,\ldots,r-1\}$ est un système de Dirichlet d'ordre r sur Γ, de telle sorte que l'on ait la formule de Green :

$$\int_\Omega Lu.\overline{v}\,dx - \int_\Omega u.\overline{L^*v}\,dx = \sum_{j=o}^{r-1} \int_\Gamma B_ju.\overline{C_jv}\,d\Gamma\ ,$$

pour tous u et v dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$. ($L^*$ désigne l'opérateur adjoint formel de L).

Démonstration. - Par "cartes locales" et "partition de l'unité", on se ramène à une étude dans le demi-espace $\mathbb{R}^n_+$ (cf. [3] ou [8]).

IV.2. - Le théorème de traces.

THÉORÈME 4.2. - On suppose que l'opérateur L vérifie l'hypothèse (C). Soit alors $\{B_j\ ;\ j = 0,\ldots,r-1\}$ un système d'opérateurs "frontière" sur Γ, à coefficients $C^\infty(\Gamma)$, B_j étant d'ordre m_j. On suppose que ce système est un système de Dirichlet d'ordre r sur .

Alors l'application :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{D}(\Gamma)^r \\ u \longmapsto (B_ju\ ;\ j = 0,\ldots,r-1) \end{cases}$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de

$$D(L;\Omega) \ \text{dans} \ \prod_{j=0}^{r-1} H^{-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

De plus, pour $u \in D(L;\Omega)$ et $v \in W^m_{q,m-r}(\Omega)$, on a la "formule de Green" :

$$\int_\Omega Lu.\overline{v}\,dx - \int_\Omega u.\overline{L^*v}\,dx = \sum_{j=o}^{r-1} \langle B_ju, \overline{C_jv}\rangle_{H^{-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)}\ ,$$

les opérateurs C_j étant ceux introduits au théorème 4.1.

Démonstration. - Comme, d'après le théorème 3.2, $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $D(L;\Omega)$, il suffit de prouver que l'application :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{D}(\Gamma)^r \\ \quad u \longmapsto (B_j u \; ; \; j = 0,\ldots,r-1) \end{cases}$$

est continue de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $\prod_{j=o}^{r-1} H^{-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. On utilise le lemme 2.1 du chapitre II de [8] et la proposition 1.9 ; on en déduit qu'il existe un relèvement linéaire de $\prod_{j=o}^{r-1} H^{m_j+1/2}(\Gamma)$ dans $W^m_{q,m-r}(\Omega)$ tel que :

$$C_j \, R\,(\varphi_0,\ldots,\varphi_{r-1}) = \varphi_j \quad , \quad j = 0,\ldots,r-1,$$

pour tout $(\varphi_0,\ldots,\varphi_{r-1}) \in \prod_{j=o}^{r-1} H^{m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

On applique alors le théorème 4.1 à $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ et $v = R(\varphi_0,\ldots,\varphi_{r-1})$. Il vient :

$$\sum_{j=o}^{r-1} \langle B_j u, \overline{\varphi_j} \rangle_{H^{-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_\Omega Lu \,.\, \overline{R(\varphi_0,\ldots,\varphi_{r-1})}\, dx - \int_\Omega u.\overline{L^* R(\varphi_0,\ldots,\varphi_{r-1})}\, dx$$

On en déduit :

$$\|(B_j u \; ; \; j = 0,\ldots,r-1\|_{\prod_{j=o}^{r-1} H^{-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \; \|u\|_{D(L;\Omega)}.$$

Le théorème 4.2 est donc démontré.

Remarque 4.1. - On montrerait de façon analogue, en utilisant encore les théorèmes 3.2 et 4.1, que l'application :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{D}(\Gamma)^r \\ \quad u \longmapsto (C_j u \; ; \; j = 0,\ldots,r-1) \end{cases}$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $D(L^*;\Omega)$ dans $\prod_{j=o}^{r-1} H^{-r+m_j+1/2}(\Gamma)$, avec, pour $u \in W^m_{q,m-r}(\Omega)$ et $v \in D(L^*;\Omega)$, la "formule de Green" :

$$\int_\Omega Lu.\overline{v}\, dx - \int_\Omega u.\overline{L^* v}\, dx = \sum_{j=o}^{r-1} \langle B_j u, \overline{C_j v} \rangle_{H^{r-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{-r+m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)} .$$

V - APPLICATION AUX PROBLÈMES AUX LIMITES.

On va déduire, de [9] et des théorèmes de densité et de traces établis aux chapitres III et IV, quelques propriétés de régularité.

Soit tout d'abord $L \equiv L(x;D_x)$ un opérateur du type indiqué au chapitre III, avec $r = 0$, c'est-à-dire défini par :

$$Lu(x) \equiv L(x;D_x)\, u(x) \equiv \sum_{h=0}^{m} P^{m-h}(x;D_x) \quad \{\varphi(x)^{q(m-h)}\, u(x)\}.$$

On montre alors le :

THÉORÈME 5.1. - <u>Si l'opérateur</u> L <u>vérifie la condition "d'ellipticité générale"</u> (C), <u>alors le domaine maximal</u> $D(L;\Omega)$ <u>associé à</u> L <u>coïncide avec l'espace</u> $W^m_{q,m}(\Omega)$ <u>algébriquement et topologiquement</u>.

<u>Démonstration</u>. - D'après [9], on a l'estimation a priori :

$$\|u\|_{W^m_{q,m}(\Omega)} \leq C \quad \{\|Lu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{W^{m-1}_{q,m}(\Omega)}\},$$

pour tout u appartenant à $W^m_{q,m}(\Omega)$. Comme, d'après le théorème 3.1, $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $D(L;\Omega)$, on en déduit que l'on a l'injection continue $D(L;\Omega) \hookrightarrow W^m_{q,m}(\Omega)$. L'inclusion inverse étant évidente, le théorème 5.1 est donc démontré.

COROLLAIRE 5.1. - <u>On suppose que</u> L <u>vérifie la condition</u> (C). <u>Alors si</u> $u \in L^2(\Omega)$ <u>et si</u> $Lu \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, <u>alors</u> $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

<u>Démonstration</u>. - Elle résulte immédiatement du théorème 5.1 ainsi que du théorème 3.2 de [10].

Lorsque $r > 0$, on considère un opérateur $L \equiv L(x;D_x)$ défini, comme au chapitre II, par :

$$Lu(x) \equiv L(x;D_x)\, u(x) \quad \sum_{h=0}^{m-r} P^{m-h}(x;D_x) \quad \{\varphi(x)^{q(m-r-h)}\, u(x)\}.$$

Soit alors un système d'opérateurs "frontière" $\{B_j \; ; \; j = 0,\dots,r-1\}$, à coefficients indéfiniment dérivables sur Γ, avec l'ordre de B_j égal à m_j, de telle sorte que ce système soit un système de Dirichlet d'ordre r sur Γ.
On a alors :

THÉORÈME 5.2. - <u>Si l'opérateur</u> L <u>vérifie la condition</u> (C), <u>on a</u> :

$$\{ u \in D(L;\Omega) \; ; \; B_j u = 0 \ \underline{\text{dans}}\ H^{-m_j-1/2}(\Gamma),\ j = 0,\dots,r-1\} = \overset{\circ}{W}{}^m_{q,m-r}(\Omega),$$

<u>où</u> $\overset{\circ}{W}{}^m_{q,m-r}(\Omega) = \{u \in H^r_0(\Omega) \; ; \quad \varphi^{q(m-r)}\, u \in H^m(\Omega)\}$.

<u>Démonstration</u>. - D'après la formule de Green obtenue au théorème 4.2, on obtient que, si $u \in D(L;\Omega)$, avec $B_j u = 0$ pour $j = 0,\dots,r-1$, et si $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, on a :

$$\int_\Omega Lu.\overline{v}\, dx = \int_\Omega u.\overline{L^* v}\, dx.$$

On en déduit que $L\tilde{u} = \tilde{Lu}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (où $\sim$ désigne le prolongement par 0 dans

$\mathbb{R}^n \setminus (\overline{\Omega})$. Comme les hypothèses du théorème 2.1 sont satisfaites, on en conclut que $\tilde{u} \in W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire que $u \in \overset{\circ}{W}{}^m_{q,m-r}(\Omega)$.

VI - APPLICATION AU CALCUL DE L'INDICE POUR LE PROBLÈME DE DIRICHLET.

On a montré dans [9] que, pour le problème $\{L,\mathcal{B}\}$ soit bien posé (on reprend les notations de III), il suffit de prendre des opérateurs "frontière" B_j tels que l'opérateur $\{P^r,\mathcal{B}\}$ soit à indice. Si l'on suppose que l'opérateur P^r est proprement elliptique d'ordre 2s, on peut prendre comme opérateurs B_j, $j = 0,\dots,s-1$, un système de Dirichlet d'ordre s, par exemple le système des conditions de Dirichlet :

$$B_j = V_j \ , \quad j = 0,\dots,s-1.$$

Et l'on sait que le problème de Dirichlet pour l'opérateur P^r est d'indice nul (cf. remarque 8.5, chapitre II, [8]).

Le problème est de savoir si l'indice du problème $\{L, B_j, j = 0,\dots,s-1\}$ est nul lorsqu'on prend comme opérateurs "frontière" un système de Dirichlet d'ordre s sur Γ. Le but de ce chapitre est de montrer que la réponse est positive.

VI.1. - Hypothèses et résultats.

On reprend les notations et hypothèses du chapitre III. On suppose de plus que l'opérateur P^r est proprement elliptique d'ordre $r = 2s$.

Lorsque $s > 0$, on introduit s opérateurs "frontière" $B_j = B_j(x;D_x)$ à coefficients $C^\infty(\Gamma)$ tels que le système $\{B_j \ ; \ j = 0,\dots,s-1\}$ soit un système de Dirichlet d'ordre s sur Γ, B_j étant d'ordre m_j.

THÉORÈME 6.1. - Sous les hypothèses précédentes, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'opérateur $\mathcal{U} = \{L, B_j \ ; \ j = 0,\dots,s-1\}$ est un opérateur à indice de

$$W^{m+p}_{q,m-r}(\Omega) \ \text{ dans } \ H^p(\Omega) \times \prod_{j=0}^{s-1} H^{r+p-m_j-1/2}(\Gamma) \ ,$$

et son indice $\chi(\mathcal{U})$ est nul.

Lorsque $s = 0$, le résultat est le suivant :

THÉORÈME 6.2. - Sous les hypothèses précédentes, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'opérateur L est un opérateur à indice de $W^{m+p}_{q,m}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega)$ et son indice $\chi(L)$ est nul.

VI.2. - Deux théorèmes d'indice.

Dans [10], on a montré les résultats suivants :

THÉORÈME 6.3. - Sous les hypothèses précédentes, lorsque $s > 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'opérateur $\mathcal{U}$ est un opérateur à indice de

$$W^{m+p}_{q,m-r}(\Omega) \ \text{dans} \ H^p(\Omega) \times \prod_{j=0}^{s-1} H^{r+p-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \ ,$$

et son indice est indépendant de p. De plus, le noyau de $\mathcal{U}$ est égal à l'espace :

$$N = \{u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \ ; \quad \mathcal{U}u = 0\} \ ;$$

et l'image de $\mathcal{U}$ est donnée par les éléments $\{f \ ; \ g_0,\dots,g_{s-1}\}$ de

$$H^p(\Omega) \times \prod_{j=0}^{s-1} H^{r+p-m_j-1/2}(\Gamma)$$

tels que :

$$\int_\Omega f.\overline{v} \, dx + \sum_{j=0}^{s-1} \int_\Gamma g_j.\overline{\varphi_j} \, d\Gamma = 0$$

pour tout élément $\Phi = \{v \ ; \ \varphi_0,\dots,\varphi_{s-1}\}$ de l'espace :

$$\mathcal{N} = \{\Phi \in L^2(\Omega) \times \prod_{j=0}^{s-1} H^{-r+m_j+1/2}(\Gamma) \ ; \ \mathcal{U}^*\Phi = 0\} \ ,$$

où $\mathcal{U}^*$ est l'adjoint de $\mathcal{U}$ considéré pour $p = 0$.

THÉORÈME 6.4. - Sous les hypothèses précédentes, lorsque $s = 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'opérateur L est un opérateur à indice de $W^{m+p}_{q,m}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega)$, et son indice est indépendant de p.

VI.3. Précisions sur les conditions de compatibilité pour l'existence.

On va maintenant préciser les conditions de compatibilité pour l'existence des solutions du problème $\{L,B_j\}$, en utilisant la formule de Green montrée au chapitre IV. On se place dans le cas où $s > 0$.

Pour cela, choisissons un système d'opérateurs "frontière" $\{S_j \ ; \ j=0,\dots,s-1\}$, normal sur Γ, les S_j étant à coefficients $C^\infty(\Gamma)$ et d'ordre $\mu_j \leq r-1$, de façon que le système $\{B_0,\dots,B_{s-1},S_0,\dots,S_{s-1}\}$ soit un système de Dirichlet d'ordre r sur Γ. Ce choix étant fait, on sait (cf. théorème 4.1 et 4.2) qu'il existe r opérateurs "frontière" C_j, T_j, $j = 0,\dots,s-1$, à coefficients $C^\infty(\Gamma)$, tels que l'ordre de C_j soit $r-1-\mu_j$ et l'ordre de T_j soit $r-1-m_j$, le système $\{C_0,\dots,C_{s-1},T_0,\dots,T_{s-1}\}$ étant un système de Dirichlet d'ordre r sur Γ, avec les "formules de Green" suivantes :

(6.1) Pour tout $u \in D(L;\Omega)$ et tout $v \in W^m_{q,m-r}(\Omega)$:

$$\int_\Omega Lu.\overline{v} \, dx - \int_\Omega u.\overline{L^*v} \, dx = \sum_{j=0}^{s-1} \langle S_ju, \overline{C_jv}\rangle_{H^{-\mu_j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\mu_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

$$- \sum_{j=o}^{s-1} \langle B_j u, \overline{T_j v} \rangle_{H^{-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

(6.2) Pour tout $u \in W^m_{q,m-r}(\Omega)$ et tout $v \in D(L^*;\Omega)$:

$$\int_\Omega Lu.\bar{v}\,dx - \int_\Omega u.\overline{L^* v}\,dx = \sum_{j=o}^{s-1} \langle S_j u, \overline{C_j v} \rangle_{H^{r-\mu_j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-r+\mu_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

$$- \sum_{j=o}^{s-1} \langle B_j u, \overline{T_j v} \rangle_{H^{r-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-r+m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)} .$$

On dit que le problème $\{L^*, C\}$ est adjoint formel du problème $\{L, B\}$ par rapport à la formule de Green (6.1).

PROPOSITION 6.1. - <u>L'espace $\mathcal{N}$ défini dans le théorème 6.3 coïncide avec l'ensemble parcouru par</u> $(v; T_0 v, \ldots, T_{s-1} v)$ <u>lorsque</u> $v \in L^2(\Omega)$ <u>et</u> :

$$\begin{cases} L^* v = 0 & \text{dans} \\ C_j v = 0 & \text{sur } \Gamma \text{ , pour } j = 0, \ldots, s-1. \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>. - D'après le théorème 6.3, $\mathcal{N}$ est l'espace des éléments

$$(v, \varphi_0, \ldots, \varphi_{s-1}) \in L^2(\Omega) \times \prod_{j=o}^{s-1} H^{-r+m_j+1/2}(\Gamma)$$

qui sont orthogonaux à l'image de $\mathcal{U}$, considéré pour $p = 0$, c'est-à-dire tels que, pour tout $u \in W^m_{q,m-r}(\Omega)$, on ait :

$$\int_\Omega Lu.\bar{v}\,dx + \sum_{j=o}^{s-1} \int_\Gamma B_j u.\overline{\varphi_j}\,d\Gamma = 0.$$

Prenant u dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on en déduit que $L^* v = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Par conséquent, v appartient à $D(L^*;\Omega)$, et l'on peut appliquer la formule de Green (6.2).
Il vient que, pour tout $u \in W^m_{q,m-r}(\Omega)$, on a :

$$(6.3) \quad \sum_{j=o}^{s-1} \langle B_j u, \overline{\varphi_j} - \overline{T_j v} \rangle_{H^{r-m_j-1/2}(\Gamma) \times H^{-r+m_j+1/2}(\Gamma)}$$

$$+ \sum_{j=o}^{s-1} \langle S_j u, \overline{C_j v} \rangle_{H^{r-\mu_j-1/2}(\Gamma) \times H^{-r+\mu_j+1/2}(\Gamma)} = 0.$$

Le système $\{B_j, S_j ; j = 0, \ldots, s-1\}$ étant un système de Dirichlet d'ordre r sur Γ, on peut utiliser le lemme 2.2 du chapitre II de [8], dans sa généralisation au cas de l'ouvert Ω ; et donc, si u parcourt $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, $\{B_j u, S_j u ; j = 0,\dots,s-1\}$ parcourt $\mathcal{D}(\Gamma)^r$. On déduit alors de l'égalité (6.3) que :

$$T_j v = \varphi_j \quad \text{et} \quad C_j v = 0, \quad \text{pour} \quad j = 0,\dots,s-1.$$

La proposition 6.1 est donc démontrée.

VI.4. - La réalisation de L dans $L^2(\Omega)$.

VI.4.1. - Le problème de l'existence dans $L^2(\Omega)$.

On désignera par L_2 l'opérateur non borné dans $L^2(\Omega)$ défini par :

$$\begin{cases} D(L_2) = \{u \in W^m_{q,m-r}(\Omega) \; ; \; B_j u = 0, \quad j = 0,\dots,s-1\} \\ L_2 u = L(x;D_x)u, \text{ pour } u \text{ dans } D(L_2). \end{cases}$$

De façon analogue, on désigne par L_2^* l'opérateur non borné dans $L^2(\Omega)$ défini par :

$$\begin{cases} D(L_2^*) = \{u \in W^m_{q,m-r}(\Omega) \; ; \; C_j u = 0, \quad j = 0,\dots,s-1\} \\ L_2^* u = L^*(x;D_x)u, \text{ pour } u \text{ dans } D(L_2^*). \end{cases}$$

On dit que L_2 (resp. L_2^*) est la réalisation de L (resp. L^*) dans $L^2(\Omega)$ sous les conditions aux limites homogènes $B_j u = 0$, $j = 0,\dots,s-1$ (resp. $C_j u = 0$, $j = 0,\dots,s-1$). On désignera par $N(L_2)$ (resp. $N(L_2^*)$) le noyau de L_2 (resp. L_2^*) et par $R(L_2)$ (resp. $R(L_2^*)$) l'image de L_2 (resp. L_2^*).
Appliquons le théorème 6.3 aux opérateurs $\{L,B\}$ et $\{L^*,C\}$. Il vient :

PROPOSITION 6.2. -

(i) L^2 et L_2^* sont des opérateurs fermés à domaine dense dans $L^2(\Omega)$.

(ii) $N(L_2) = N = \{u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \; ; \; Lu = 0, \; B_j u = 0, \; j = 0,\dots,s-1\}$

$N(L_2^*) = N^* = \{u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \; ; \; L^* u = 0, \; C_j u = 0, \; j = 0,\dots,s-1\}$.

(iii) Les espaces N et N^* sont de dimension finie.

(iv) $R(L_2)$ et $R(L_2^*)$ sont fermés dans $L^2(\Omega)$.

Le problème de l'existence est de déterminer $R(L_2)$. Pour cela, comme le domaine de L_2 est dense dans $L^2(\Omega)$, L_2 possède un adjoint $(L_2)^*$, opérateur non borné dans $L^2(\Omega)$, de domaine $D((L_2)^*)$, défini par : $D((L_2)^*)$ est le sous-espace des éléments $v \in L^2(\Omega)$ tels que l'application :

$$\begin{cases} D(L_2) \longrightarrow \mathbb{C} \\ u \longmapsto (L_2 u, v)_{L^2(\Omega)} \end{cases}$$

se prolonge en une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega)$; pour tout $u \in D(L_2)$ et tout $v \in D((L_2)^*)$, on pose alors :

$$(L_2 u,v)_{L^2(\Omega)} = (u,(L_2)^* v)_{L^2(\Omega)} .$$

$(L_2)^*$ est un opérateur fermé à domaine dense, et si $N((L_2)^*)$ désigne le noyau de $(L_2)^*$, on a :

$$R(L_2) = \{f \in L^2(\Omega) \ ; \ \forall\ v \in N((L_2)^*), \ (f,v)_{L^2(\Omega)} = 0\} .$$

Dans les paragraphes suivants, nous allons chercher les relations entre les opérateurs L_2^* et $(L_2)^*$. Plus précisément, nous allons prouver le :

THÉORÈME 6.5. - <u>L'image de l'opérateur</u> L_2 <u>est déterminée par</u> :

$$R(L_2) = \{L^2(\Omega) \ ; \ N^*\}^{(1)} .$$

COROLLAIRE 6.1. - L_2^* <u>est l'adjoint, au sens des opérateurs non bornés dans</u> $L^2(\Omega)$, <u>de</u> L_2, <u>c'est-à-dire que</u> :

$$L_2^* = (L_2)^* .$$

VI.4.2. - <u>Un théorème de régularité</u>.

Pour u et v appartenant à $W^m_{q,m-r}(\Omega)$, on pose :

$$[u,v] = (L^* u, L^* v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=o}^{s-1} (C_j u, C_j v)_j ,$$

où $(,)_j$ désigne le produit scalaire dans $H^{\mu_j+1/2}(\Gamma)$.

Il est clair que l'on définit ainsi une forme sesquilinéaire hermitienne continue sur $W^m_{q,m-r}(\Omega) \times W^m_{q,m-r}(\Omega)$; on a donc une inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$(6.4) \qquad |[u,v]|^2 \leq [u,u] \, . \, [v,v] .$$

Il résulte du théorème 3.2 de [10] qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in W^m_{q,m-r}(\Omega)$, on ait :

$$(6.5) \qquad C^{-1} \|u\|^2_{W^m_{q,m-r}(\Omega)} \leq [u,u] + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|^2_{W^m_{q,m-r}(\Omega)} .$$

On a alors le résultat suivant :

---

(1) Ici, nous utilisons la notation suivante : soit E un espace de Banach et E^* son antidual pour la forme sesquilinéaire $u,v \longmapsto (u,v)$; pour tout sous-espace F de E, on pose $\{E^*;F\} = \{v \in E^* \ ; \ \forall\ u \in F, \ (u,v) = 0\}$.

THÉORÈME 6.6. - Soient $f \in L^2(\Omega)$ et u une solution du problème variationnel :

$$\begin{cases} u \in W^m_{q,m-r}(\Omega) \\ [u,v] = (f,v)_{L^2(\Omega)}, \text{ pour tout } v \in W^m_{q,m-r}(\Omega). \end{cases}$$

Alors $L^* u \in W^m_{q,m-r}(\Omega)$.

Démonstration. - De l'égalité $[u,v] = (f,v)_{L^2(\Omega)}$, on déduit, en prenant v dans $\mathcal{D}(\Omega)$, que :

$$LL^* u = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Posons $w = L^*u$. On a donc : $Lw = f \in L^2(\Omega)$. On applique alors la "formule de Green" (6.1). Il vient, puisque $w \in D(L;\Omega)$:

$$(6.6) \quad \sum_{j=o}^{s-1} \langle B_j w, \overline{T_j v}\rangle_{H^{-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \sum_{j=o}^{s-1} \langle C_j u - S_j w, \overline{C_j v}\rangle_{H^{-\mu_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{\mu_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0$$

Comme le système $\{C_j, T_j\ ;\ J = 0,\dots,s-1\}$ est un système de Dirichlet d'ordre r sur Γ, on déduit de l'égalité (6.6), en utilisant encore le lemme 2.2 du chapitre II de [8], que :

$$(6.7) \qquad B_j w = 0 \quad \text{et} \quad S_j w = C_j u, \quad j = 0,\dots,s-1.$$

Puisque le système $\{B_j, S_j\ ;\ j = 0,\dots,s-1\}$ est un système de Dirichlet d'ordre r sur Γ et que, pour $j = 0,\dots,s-1$,

$$C_j\, u \in H^{\mu_j+1/2}(\Gamma) \hookrightarrow H^{r-\mu_j-1/2}(\Gamma) \quad \text{car } (\mu_j \geq s),$$

on déduit du lemme 2.1 du chapitre II de [8] et de la proposition 2.9 qu'il existe $w_1 \in W^m_{q,m-r}(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} B_j\, w_1 = 0, \\ S_j\, w_1 = C_j u, \quad j = 0,\dots,s-1. \end{cases}$$

Si l'on pose $w_o = w - w_1$, on a alors :

$$B_j\, w_o = 0 \text{ et } S_j\, w_o = 0, \text{ pour } j = 0,\dots,s-1.$$

Comme $\{B_j, S_j\ ;\ j = 0,\dots,s-1\}$ est un système de Dirichlet d'ordre r sur Γ, on en déduit, en utilisant le théorème 5.2, que $w_o \in \mathring{W}^m_{q,m-r}(\Omega)$.

Par conséquent : $L^*u = w = w_o + w_1 \in W^m_{q,m-r}(\Omega)$. Le théorème 6.6 est donc démontré.

VI.4.3. - Démonstration du théorème 6.5.

LEMME 6.1. - On a : $L_2^* \subset (L_2)^*$.

Démonstration. - En effet, soit $v \in D(L_2^*)$; il est clair, grâce à la "formule de Green" (6.1), que l'application linéaire :

$$\begin{cases} D(L_2) \longrightarrow \mathbb{C} \\ u \longmapsto (L_2 u,v)_{L^2(\Omega)} = (u,L_2^* v)_{L^2(\Omega)} \end{cases}$$

est continue sur $D(L_2)$ pour la norme induite par $L^2(\Omega)$. Par conséquent,

$$v \in D((L_2)^*) \quad \text{et} \quad (L_2)^* v = L_2^* v.$$

COROLLAIRE 6.2. - $R(L_2) \subset \{L^2(\Omega) \; ; \; N^*\}$.

L'inégalité (6.5) montre que le produit scalaire :

$$u,v \longmapsto ((u,v)) = [u,v] + (u,v)_{L^2(\Omega)}$$

peut être substitué au produit scalaire habituel de $W^m_{q,m-r}(\Omega)$. Dans la suite, nous supposerons que $W^m_{q,m-r}(\Omega)$ est muni de ce nouveau produit scalaire.

Avant de finir la démonstration du théorème 6.5, montrons encore deux lemmes : notons $\{W^m_{q,m-r}(\Omega);N^*\}_{L^2(\Omega)} = \{u \in W^m_{q,m-r}(\Omega) \; ; \; \forall \; v \in N^*, \; (u,v)_{L^2(\Omega)} = 0\}$.

Alors :

LEMME 6.2. - $W^m_{q,m-r}(\Omega) = \{W^m_{q,m-r}(\Omega) \; ; \; N^*\}_{L^2(\Omega)} \oplus N^*$.

Démonstration. - $\{W^m_{q,m-r}(\Omega) \; ; \; N^*\}_{L^2(\Omega)}$ est l'orthogonal de N^* dans $W^m_{q,m-r}(\Omega)$ car, pour tout $u \in W^m_{q,m-r}(\Omega)$ et tout $v \in N^*$, on a :

$$((u,v)) = (u,v)_{L^2(\Omega)} .$$

LEMME 6.3. - Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout

$$v \in \{W^m_{q,m-r}(\Omega) \; ; \; N^*\}_{L^2(\Omega)},$$

on ait :

$$C^{-1} \, \|v\|^2_{W^m_{q,m-r}(\Omega)} \leq [v,v] \leq C \, \|v\|^2_{W^m_{q,m-r}(\Omega)} . \tag{6.8}$$

Démonstration. - Seule la première inégalité est à montrer. Pour cela, on procède par l'absurde en utilisant la compacité de l'injection de $W^m_{q,m-r}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration du théorème 6.5. - Soit $f \in \{L^2(\Omega) ; N^*\}$. Le lemme 6.3 montre que le produit scalaire : $u,v \longmapsto [u,v]$ peut être substitué au produit scalaire :

$$u,v \longmapsto ((u,v)) \quad \text{sur } \{W^m_{q,m-r}(\Omega) ; N^*\}_{L^2(\Omega)}.$$

Comme l'application : $v \longmapsto (f,v)_{L^2(\Omega)}$ est une forme anitilinéaire continue sur $\{W^m_{q,m-r}(\Omega) ; N^*\}_{L^2(\Omega)}$, il existe $g \in \{W^m_{q,m-r}(\Omega) ; N^*\}_{L^2(\Omega)}$, unique, tel que, pour tout $v \in \{W^m_{q,m-r}(\Omega) ; N^*\}_{L^2(\Omega)}$, on ait :

$$(6.9) \qquad [g,v] = (f,v)_{L^2(\Omega)}.$$

Cette égalité est encore vraie pour tout $v \in W^m_{q,m-r}(\Omega)$.

D'après le théorème 6.6, on en déduit que $w = L^*g \in W^m_{q,m-r}(\Omega)$.

On a, pour tout $v \in W^m_{q,m-r}(\Omega)$:

$$(6.10) \qquad (w,L^*v) + \sum_{j=o}^{s-1} (C_jg,C_jv) = (f,v).$$

Prenant v dans $\mathcal{D}(\Omega)$, la formule (6.10) montre que : $Lw = f$.

Comme $w \in D(L;\Omega)$, on applique la "formule de Green" (6.1). Il vient, pour $v \in D(L_2^*)$:

$$(w,L^*v)-(Lw,v) = 0 = \sum_{j=o}^{s-1} \langle B_jw, \overline{T_jv}\rangle_{H^{-m_j-1/2}(\Gamma) \times H^{m_j+1/2}(\Gamma)}.$$

Comme le système $\{C_j, T_j ; j = 0,\dots,s-1\}$ est un système de Dirichlet d'ordre r sur Γ, on en déduit que, pour $j = 0,\dots,s-1$:

$$B_jw = 0.$$

Par conséquent : $w \in D(L_2)$, avec $L_2w = f$. Donc $f \in R(L_2)$. On a donc montré que $L^2(\Omega) ; N^*\} \subset R(L_2)$. Le théorème 6.5 résulte alors du corollaire 6.2.

Démonstration du corollaire 6.1. - On applique le théorème 6.5 pour l'opérateur L_2^*; on obtient que :

$$R(L_2^*) = \{L^2(\Omega) ; N\}.$$

Comme $R(L_2)$ est fermé, on a aussi $R(L_2) = \{L^2(\Omega) ; N((L_2)^*)\}$ et $R((L_2)^*) = \{L^2(\Omega) ; N\}$. On en déduit que $N((L_2)^*) = N^*$ et que $R((L_2)^*) = R(L_2^*)$.

D'après le lemme 6.1, il suffit de vérifier que $D((L_2)^*) \subset D(L_2^*)$. Pour cela, soit $u \in D((L_2)^*)$; alors : $(L_2)^*u = f \in R((L_2)^*) = R(L_2^*)$. Il existe donc $u_o \in D(L_2^*)$ tel que $L_2^* u_o = f$. Alors : $u - u_o \in N((L_2)^*) = N^* \subset D(L_2^*)$. Par conséquent, en écrivant $u = (u-u_o) + u_o$, on a prouvé que $u \in D(L_2^*)$; ce qui démontre le corollaire 6.1.

VI.5. - Démonstration des résultats.

VI.5.1. - Cas où $s > 0$.

On remarque tout d'abord que l'on déduit de la proposition 6.1 et du théorème 6.5 la :

PROPOSITION 6.3. - L'espace $\mathcal{N}$ défini dans le théorème 5.2 coïncide avec l'ensemble parcouru par $(v\ ;\ T_0v,\ldots,T_{s-1})$ lorsque $v \in N^*$.

COROLLAIRE 6.3. - On a : $\chi(\mathcal{U}) = \dim N - \dim N^*$.

(Ceci résulte directement du théorème 6.3 et de la proposition 6.3).

Remarque 6.1. - Il résulte de la démonstration du corollaire 6.1 que L_2 est un opérateur à indice dans $L^2(\Omega)$ et son indice est égal à :

$$\chi(L_2) = \chi(\mathcal{U}) = \dim N - \dim N^*.$$

Pour finir la démonstration du théorème 6.1, on remarque que, puisque les systèmes $\{B_j\ ;\ j = 0,\ldots,s-1\}$ et $\{C_j\ ;\ j = 0,\ldots,s-1\}$ sont deux systèmes de Dirichlet d'ordre s, on en déduit, grâce au lemme 2.1 du chapitre II de [8], que :

$$D(L_2) = D(L_2^*) = \{u \in W^m_{q,m-r}(\Omega)\ ;\ \gamma_j u = 0,\quad j = 0,\ldots,s-1\}.$$

Considérons alors les opérateurs différentiels $\overline{L^*}$ et $\overline{C_j}$, $j = 0,\ldots,s-1$, déduits de L^* et C_j en remplaçant les coefficients par leurs complexes conjugués. Soit L_2^* la réalisation de L^* dans $L^2(\Omega)$ sous les conditions aux limites homogènes $C_ju = 0$, $j = 0,\ldots,s-1$. Il est clair que $D(L_2^*) = D(L_2)$. Mais $L - L^*$ est un opérateur compact de $D(L_2)$ dans $L^2(\Omega)$ (cf. la proposition 1.7) ; on en déduit que $\chi(L_2) = \chi(L_2^*)$. Mais, grâce au corollaire 5.1, on a :

$$\chi(L_2^*) = -\ (L_2).\ \text{Or}\ \chi(\overline{L_2^*}) = (L_2^*).$$

Donc :

$$\chi(L_2) = -\chi(L_2) = \chi(\mathcal{U}) = 0.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 6.1.

VI.5.2. - Cas où $s = 0$.

Nous noterons Δ l'opérateur Laplacien et γ_0 l'opérateur de restriction à Γ.

LEMME 6.4. - L'opérateur $\mathcal{U}_2 = \{\Delta,\gamma_0\}$ est un opérateur à indice de $W^{m+2}_{q,m}(\Omega)$ dans $W^m_{q,m}(\Omega) \times H^{3/2}(\Gamma)$, d'indice nul.

Démonstration. - On montre facilement les deux égalités suivantes :

$$\mathcal{U}_2(W^{m+2}_{q,m}(\Omega)) = \mathcal{U}_2(H^2(\Omega)) \cap (W^m_{q,m}(\Omega) \times H^{3/2}(\Gamma))$$

$$\ker_{W^{m+2}_{q,m}(\Omega)} (\mathcal{U}_2) = \ker_{H^2(\Omega)} (\mathcal{U}_2).$$

On en déduit que $\mathcal{U}_2$ est un opérateur à indice de $W^{m+2}_{q,m}(\Omega)$ dans $W^m_{q,m}(\Omega) \times H^{3/2}(\Gamma)$, d'indice égal à celui de $\mathcal{U}_2$, opérant de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega) \times H^{3/2}(\Gamma)$; or il est bien connu que cet indice est nul.

LEMME 6.5. - L'opérateur $\mathcal{U}_0 = \{\Delta \circ L, \gamma_0\}$ est un opérateur à indice de $W^{m+2}_{q,m}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega) \times H^{3/2}(\Gamma)$, d'indice nul.

Démonstration. - Ce résultat se déduit directement du théorème 6.1. En effet, l'opérateur $\Delta \circ L$ entre dans la classe étudiée, avec $r = 2$.

LEMME 6.6. - L'opérateur $\Delta \circ L - L \circ \Delta$ est un opérateur compact de $W^{m+2}_{q,m}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration. - Ce lemme résulte facilement de la proposition 2.7.

Pour terminer la démonstration du théorème 6.2, on utilise le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
W^{m+2}_{q,m}(\Omega) \arrow[rr, "(L, \mathbb{1}_{H^{3/2}(\Gamma)}) \circ (\Delta, \gamma_0)"] \arrow[d, "(\Delta, \gamma_0)"'] & & L^2(\Omega) \times H^{3/2}(\Gamma) \\
W^m_{q,m}(\Omega) \times H^{3/2}(\Gamma) \arrow[urr, "(L, \mathbb{1}_{H^{3/2}(\Gamma)})"'] & &
\end{tikzcd}$$

On a : $(L, \mathbb{1}_{H^{3/2}(\Gamma)}) \circ (\Delta, \gamma_0) = (L \circ \Delta, \gamma_0)$.

Les lemmes 6.5 et 6.6 impliquent que $(L \circ \Delta, \gamma_0) = (\Delta \circ L, \gamma_0) + ([L, \Delta], 0)$ est un opérateur à indice de

$$W^{m+2}_{q,m}(\Omega) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \times H^{3/2}(\Gamma),$$

d'indice nul. On déduit alors du lemme 6.4 que $(L, \mathbb{1}_{H^{3/2}(\Gamma)})$ est à indice de

$$W^m_{q,m}(\Omega) \times H^{3/2}(\Gamma) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \times H^{3/2}(\Gamma),$$

d'indice nul. Et comme on sait déjà que L est à indice (théorème 6.4), il en résulte que cet indice est nul. Ceci achève la démonstration du théorème 6.2.

Dominique PRÉVOSTO
Université de Rennes I
B.P. 25 A
35031 RENNES CEDEX

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BAIOCCHI : "Définition d'opérateurs maximaux ; applications".

[2] P. BOLLEY-J. CAMUS : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables".
Bull. Soc. Math. France, Mémoire 34, 1973, p. 55-140.

[3] P. BOLLEY- J. CAMUS : "Quelques propriétés des opérateurs maximaux associés à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés".
A paraître dans Annali della Scuola Normale di Pisa.

[4] K.O. FRIEDRICHS : "The identity of weak and strong extensions of differential operators".
Trans. Amer. Math. Soc. LV (1944), p. 132-151.

[5] G. GRUBB : "A characterization of the non local boundary value problems associated with an elliptic operators".
July 1966. Department of Math ; Stanford University.

[6] L. HORMANDER : "Definition of maximal differential operators".
Ark. for Mat. III (1958), p. 501-504.

[7] L. HORMANDER : "Weak and strong extensions of differential operators".
C.P.A.M. XIV (1961), p. 371-379.

[8] J.L. LIONS- E. MAGENES : "Non Homogeneous Boundary Value Problems and Applications".
Vol. 1 (1972) Springer-Verlag.

[9] D. PRÉVOSTO- J. ROLLAND : "Théorème d'indice et régularité pour une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés".
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 279, série A, p. 873-876, (1974).

[10] D. PRÉVOSTO- J. ROLLAND : Publications des séminaires de Mathématiques.
Université de Rennes. Séminaire d'Analyse fonctionnelle (1974).

[11] J. ROLLAND : "Théorème d'indice pour une classe d'opérateurs elliptiques fortement dégénérés sur la frontière".
Thèse de 3e cycle Rennes (1975).

[12] L. SCHWARTZ : "Théorie des Distributions". Hermann. Paris (1966).

[13] M.I. VISIK- V.V. GRUSIN : "Boundary Value Problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain".
Math. U.S.S.R. Sbornik. Vol. 9, (1969), n° 4.