JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PHAM THE LAI

Estimation du reste dans la théorie spectrale d'une classe de problèmes d'opérateur elliptiques dégénérés

Journées Équations aux dérivées partielles (1975), p. 263-277

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1975____263_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 34-35 (1976) p.263-277

ESTIMATION DU RESTE DANS LA THÉORIE SPECTRALE D'UNE CLASSE DE PROBLÈMES D'OPÉRATEURS ELLIPTIQUES DÉGÉNÉRÉS.

par

PHAM THE LAÏ

INTRODUCTION.

Nous avons étudié dans [6] le comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres d'une classe d'opérateur elliptique d'ordre 2m, dégénérant à l'ordre m au bord d'un domaine Ω borné, très régulier de $\mathbb{R}^n$, pour $n > 2$. (Pour cette classe d'opérateur, on sait que 2 est une valeur critique pour la dimension du domaine Ω, cf [5]).

Nous continuons ici cette étude en étudiant le reste.

Les preuves de certains lemmes techniques ne sont pas détaillées ici ; elles apparaîtront ultérieurement dans un autre travail qui traitera des cas plus généraux.

De même la bibliographie donnée ici est très succincte ; pour une bibliographie plus complète, on pourra consulter [6].

I. LES PRINCIPAUX RÉSULTATS.

I.1. Définitions, notations et rappels.

L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni de la base canonique, un point générique x de $\mathbb{R}^n$ est défini par ses composantes $x = (x_1,\dots,x_n)$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la structure euclidienne canonique $\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j$.

La mesure de Lebesgue associée est notée dx.

Concernant $\mathbb{R}^n$, les différentes notions telles que, par exemple, la distance, le gradient d'une fonction, la mesure d'une surface de $\mathbb{R}^n$, sont relatives à cette structure euclidienne.

Les différentes normes rencontrées seront notées $|\ |$, sauf mention du contraire.

Nous utilisons les notations classiques suivantes :

$$D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \quad i = \sqrt{-1} \quad , \quad j = (1,\dots,n)$$

$$D = (D_1,\dots,D_n) \quad , \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$$

pour $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ un multi-indice d'entiers $\geqq 0$.

Soit Ω un ouvert borné, de $\mathbb{R}^n$, variété à bord de classe $\mathscr{C}^\infty$.

On note $L_2(\Omega)$ l'espace des (classes) de fonctions de carré intégrables sur Ω, de produit scalaire :

$$(u,v)_{0;\Omega} = \int_\Omega u\,\overline{v}\,dx.$$

Pour m entier $\geqq 0$, on note $H_m(\Omega)$ l'espace de Sobolev usuel dont la norme naturelle est notée $|\ |_{m;\Omega}$.

On se donne une fonction φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$, vérifiant :

$$(1.1) \qquad \begin{array}{l} \Omega = \{x\in\mathbb{R}^n,\ \varphi(x) > 0\} \\ \Gamma = \{s\in\mathbb{R}^n, \varphi(s) = 0\} \\ \text{grad } \varphi(s) \neq 0 \quad \text{pour } s\in\Gamma. \end{array}$$

Pour m entier $\geqq 0$ et k réel, on considère les espaces de Sobolev avec poids (cf. [2]) :

$$(1.2) \qquad H_m^k(\Omega) = \{u\in\mathcal{D}'(\Omega)^{(*)}\ ;\ \varphi^k\, D^\alpha u\in L_2(\Omega)\ ;\ \forall|\alpha| \leqq m\}$$

Ces espaces sont munis des normes hilbertiennes naturelles notées $|\ |_{m;k;\Omega}$.

On vérifie (cf. [2]) que $H_m^k(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ pour k vérifiant $k \leqq m$.

Notons $\mathbb{R}_+^n$ le demi-espace de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1,\dots x_{n-1},x_n)\ ;\ x_n > 0\} .$$

On définit alors, de manière analogue, les espaces :

$$H_m^k(\mathbb{R}_+^n) = \{u\in\mathcal{D}'(\Omega),\ x_n^k\, D^\alpha u\in L_2(\mathbb{R}_+^n)\ ,\ \forall|\alpha| \leqq m\} .$$

Nous aurons à considérer la situation bien connue suivante : on se donne X et Y deux espaces de Hilbert avec $X\hookrightarrow Y$, X dense dans Y, et une forme sesquilinéaire $a(u,v)$, définie et continue sur $X \times X$.

(*) $\mathcal{D}'(\Omega)$ désigne l'espace des distributions sur Ω de L. Schwartz.

Il est bien connu que ces données définissent un opérateur A fermé (non borné en général) de Y dans Y, de domaine $\mathfrak{D}(A)$ dense dans Y et vérifiant :

(1.3) $\qquad (Au,v)_Y = a(u,v)$

pour tout $u \in \mathfrak{D}(A)$; $v \in X$.

On dira que A est l'opérateur engendré par le triplet $\{X,Y ; a(u,v)\}$.

Pour l'étude spectrale de la classe d'opérateurs elliptiques dégénérés envisagé dans l'introduction, le résultat suivant, prouvé dans [4], est essentiel pour la suite. Il concerne une classe d'opérateurs T borné dans $L_2(\Omega)$, dont l'image est dans $H^m_{2m}(\Omega)$, pour m entier $\geqq 0$.

Notons $\|T\|_{o,o;\Omega}$ la norme de T de $L_2(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$ et $\|T\|_{o,2m:m;\Omega}$ la norme de T de $L_2(\Omega)$ dans $H^m_{2m}(\Omega)$. Nous avons le :

THÉORÈME A. <u>Soit</u> T <u>un opérateur continu de</u> $L_2(\Omega)$ <u>dans</u> $L_2(\Omega)$ <u>dont les images de</u> T <u>et de</u> T^* <u>(l'adjoint de</u> T) <u>sont dans</u> $H^m_{2m}(\Omega)$ <u>avec</u> $m > n = \dim \Omega$.

<u>Alors</u> T <u>est un opérateur intégral avec un noyau</u> $K(x,y)$ <u>continu et borné sur</u> $\Omega \times \Omega$:

$$Tf(x) = \int_\Omega K(x,y)\, f(y)\, dy \qquad f \in L_2(\Omega)$$

$K(x,y)$ <u>est appelé noyau d'Agmon associé à</u> T.

<u>Il existe une constante</u> $C > 0$ <u>telle que</u> :

$$(1.4) \quad \begin{aligned} |K(x,y)| &\leqq C\,(\|T\|_{o,2m:m;\Omega}\, \|T^*\|_{o,2m:m;\Omega})^{\frac{n}{2m}}\, (\|T\|_{o,o;\Omega})^{1-\frac{n}{m}} \\ |K(x,y)| &\leqq C\,[\varphi(x)\varphi(y)]^{-\frac{n}{4}} (\|T\|_{o,2m:m;\Omega}\, \|T^*\|_{o,2m:m,\Omega})^{\frac{n}{4m}}\, (\|T\|_{o,o;\Omega})^{1-\frac{n}{2m}} \end{aligned}$$

pour tout $x,y \in \Omega$.

<u>Remarque</u>. Un tel résultat est encore vrai pour $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ avec $\varphi = x_n$.

Nous considérons une forme intégro-différentielle

$$(1.5) \qquad a(u,v) = \int_\Omega \varphi^n \sum_{\substack{|\alpha| \leqq m \\ |\beta| \leqq m}} a_{\alpha\beta}\, D^\alpha u\, \overline{D^\beta v}\, dx$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont des fonctions $\in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

On désigne par $\mathcal{a}(.,D)$ l'opérateur différentiel associé à cette forme :

$$(1.6) \qquad \mathcal{a}(.D) = \sum_{\substack{|\alpha| \leqq m \\ |\beta| \leqq m}} D^\beta (\varphi^m\, a_{\alpha\beta}\, D^\alpha)$$

Il est clair que $a(u,v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $H^{\frac{m}{2}}_m(\Omega) \times H^{\frac{m}{2}}_m(\Omega)$; comme $H^{\frac{m}{2}}_m(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ avec une image dense, nous notons A l'opérateur engendré par le triplet $\{H_m^{\frac{m}{2}}(\Omega),\ L_2(\Omega),\ a(u,v)\}$; d'après (1.3) A est une réalisation de $\mathcal{A}(.,D)$; nous dirons que A est la réalisation de Neumann de $\mathcal{A}(.,D)$, par analogie avec des problèmes non dégénérés.

Pour $s \in \Gamma$, notons :

T_s le sous-espace vectoriel des vecteurs tangents, associé à l'hyperplan tangent en s à Γ

(1.7) $\quad S_{T_s}$ la sphère unité de T_s

$$\nu_s = \frac{\operatorname{grad}\varphi(s)}{|\operatorname{grad}\varphi(s)|}$$

Nous faisons les hypothèses (H) suivantes sur a(u,v) :

(i) Il existe une constante C > 0 telle que l'on a :

$$\sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(x)\ \xi^{\alpha+\beta} \geq C|\xi|^{2m}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

(ii) $a_{\alpha\beta}(x) = a_{\beta\alpha}(x)$

pour tout $x \in \overline{\Omega}$, α et β vérifiant $|\alpha| = |\beta| = m$

(les $a_{\alpha\beta}(x)$ sont réelles en vertu de (i))

(iii) Pour $s \in \Gamma$ et $\omega \in S_{T_s}$, il existe une constante C > 0 telle que :

$$\int_0^\infty t^m \sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(s)\ (\omega+\nu_s\ \partial_t)^\alpha\ u\ \overline{(\omega+\nu_s\partial_t)^\beta\ u}\ dt \geq C|u|^2_{m:\frac{m}{2};\mathbb{R}_+}$$

pour tout $u \in H_m^{\frac{m}{2}}(\mathbb{R}_+)$.

Dans l'intégrale du premier membre, nous avons noté :

$$\partial_t = -\,i\,\frac{\partial}{\partial t}$$

Notons :

$$b_{\omega,s}(u,v) = \int_0^\infty t^m \sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(s)\ (\omega+\nu_s\partial_t)^\alpha\ u\ \overline{(\omega+\nu_s\partial_t)^\beta}\ v\ dt$$

et $\mathcal{B}_{\omega,s}$ l'opérateur différentiel, d'une variable, associé à $b_{\omega,s}$:

$$\mathcal{B}_{\omega,s} = \sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(s)\ (\omega+\nu_s\partial_t)^\beta(t^m(\omega+\nu_s\partial_t)^\alpha)$$

L'opérateur $\beta_{\omega,s}$ (non borné) de $L_2(\mathbb{R}_+)$ dans $L_2(\mathbb{R}_+)$, engendré par le triplet $\{H_m^{\frac{m}{2}}(\mathbb{R}_+),\ L_2(\mathbb{R}_+),\ b_{\omega,s}(u,v)\}$ est appelé la réalisation de Neumann de $\mathcal{B}_{\omega,s}$.

---

* Rappelons qu'un opérateur (non borné),A de $L_2(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$, de domaine (A), est dite une réalisation d'un opérateur différentiel (.D) si, pour u (A),
Au = (.,D)u dans '(Ω).

Nous avons prouvé dans [6] les résultats suivants :

THÉORÈME B. Sous les hypothèses (H), il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et une constante $C > 0$ telle que la région :

$$\mathcal{R} = \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Re}\ \lambda \leqq \lambda_0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ |\mathrm{Im}\ \lambda| \geqq C(1+|\lambda|)^{1-\frac{1}{2m}}\}$$

est dans l'ensemble résolvant de A. De plus :

$$(1.8) \qquad \| (A-\lambda)^{-1} \|_{0,0;\Omega} \leqq \frac{C}{d(\lambda)}$$

pour $\lambda \in \mathcal{R}$, $\lambda \neq 0$

(Dans (1.8), $\| (A-\lambda)^{-1} \|_{0,0;\Omega}$ est la norme de la résolvante $(A-\lambda)^{-1}$ de $L_2(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$ et $d(\lambda)$ la distance de λ à $\mathbb{R}_+ = [0,\infty[$).

La résolvante de A est compacte.

Si l'on suppose :

$$(1.9) \qquad m > n = \dim \Omega$$

alors, pour $\lambda \in \mathcal{R}$, $(A-\lambda)^{-1}$ est un opérateur intégrale dont le noyau d'Agmon associé $G_\lambda(x,y)$ est continu et borné sur $\Omega \times \Omega$:

$$(A-\lambda)^{-1} f = \int_\Omega G_\lambda(.,y)\, f(y)\, dy \qquad f \in L_2(\Omega)$$

THÉORÈME C. Sous les hypothèses (H) et la suivante :

$$(1.10) \qquad n > 2$$

l'opérateur $\beta_{\omega,s}$, pour $s \in \Gamma$ et $\omega \in S_{T_s}$, est auto-adjoint, strictement positif, à résolvante compacte. Soit la suite $(\mu_j(\omega,s))_{j \geqq 1}$ des valeurs propres (*) (réelles et positives) de $\beta_{\omega,s}$ et notons :

$$\rho_j(s) = \frac{1}{n-1} \int_{S_{T_s}} \mu_j(\omega,s)^{\frac{1-n}{m}}\, d\omega \qquad (**)$$

Alors la série $\sum_{j \geqq 1} \rho_j(s)$ est convergente et la somme est une fonction bornée sur Γ.

I.2. Enoncé des résultats.

Voici les résultats essentiels de ce travail ; notons, pour $0 \leqq \Theta \leqq 1$,

$$(1.11) \qquad \mathcal{R}_\Theta = \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Re}\ \lambda \leqq \lambda_0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ |\mathrm{Im}\ \lambda| \geqq C\,(1+|\lambda|)^{1-\frac{\Theta}{2m}}\}$$

(*) avec la convention habituelle.

(**) $d\omega$ est la mesure de surface ((n-2) dimensionnelle) de la sphère S_{T_s}.

THÉORÈME 1.1. Sous les hypothèses (H), (1.9) et (1.10), pour $0 \leqq \theta < \frac{1}{3}$, il existe des constantes $\rho > 0$, $C > 0$ telles que :

$$\left| \int_\Omega G_\lambda(x,x)dx - (2\pi)^{1-n} \alpha_{n,m} \left(\int_\Gamma |\mathrm{grad}\ (s)|^{1-n} \left[\sum_{j\geqq 1} \rho_j(s)\right] ds \right)(-\lambda)^{-1+\frac{n-1}{m}} \right| \tag{1.12}$$
$$\leqq C \frac{|\lambda|}{d(\lambda)}^{\frac{n-1}{m}} \frac{|\lambda|}{d(\lambda)}^{1-\frac{\theta}{m}}$$

pour $\lambda \in \mathcal{R}_\theta$, $|\lambda| \geqq \rho$.

(Dans (1.12), $(-\lambda)^{-1+\frac{n-1}{m}}$ est la détermination holomorphe de la puissance dans le plan complexe privé de $\mathbb{R}_+$, qui est positive sur le demi-axe négatif, ds est la mesure de surface du bord Γ de Ω et $\alpha_{n,m}$ est la constante :

$$\alpha_{n,m} = \frac{\pi(n-1)}{m} \left(\sin \frac{\pi(n-1)}{m}\right)^{-1} \tag{1.13}$$)

THÉORÈME 1.2. Sous les hypothèses (H) et (1.10), on a :

$$N(\lambda) = \sum_{\mathrm{Re}\ \lambda_j \leqq \lambda} 1 = \gamma\, \lambda^{\frac{n-1}{m}} + O\left(\lambda^{\frac{n-1}{m} - \frac{\theta}{2m}}\right) \qquad \lambda \to +\infty \tag{1.14}$$

pour tout $0 \leqq \theta < \frac{1}{3}$.

(Dans (1.14), $(\lambda_j)_{j\geqq 1}$ désigne la suite des valeurs propres de A, rangée par ordre croissant des modules, et γ est la constante :

$$\gamma = (2\pi)^{1-n} \int_\Gamma |\mathrm{grad}\ (s)|^{1-n} \left[\sum_{j\geqq 1} \rho_j(s)\right] ds \tag{1.15}$$).

Remarque. On pourrait aussi envisager la réalisation de Dirichlet $\mathring{A}$ de $\mathcal{A}(.,D)$. On obtient alors des résultats analogues à (1.12), (1.14), (1.15), la constante $\mathring{\gamma}$ correspondante est en général différente de γ.

II. NOYAU DE LA RÉSOLVANTE.

L'étude du noyau se fait grâce au théorème A. Nous faisons donc dans ce paragraphe les hypothèses du théorème 1.1.

Quitte à faire une translation, nous pouvons aussi supposer que la forme a(u,v) est $H_m^{\frac{m}{2}}(\Omega)$-fortement coercive.

D'après un résultat de P. BOLLEY - J. CAMUS [3], le domaine de A est donné par :

$$\mathcal{D}(A) = H_{2m}^m(\Omega). \tag{2.1}$$

Le théorème B et (2.1) montre que, pour $\lambda \in \mathcal{R}$, $(A-\lambda)^{-1}$ existe et est un opérateur borné dans $L_2(\Omega)$ dont l'image est dans $H_{2m}^m(\Omega)$. La même chose a lieu pour son adjoint.

Des arguments classiques et le théorème A conduisent alors au :

LEMME 2.1. Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$(2.2)\quad \begin{aligned} |G_\lambda(x,y)| &\leq C\,\frac{|\lambda|^{\frac{n}{m}}}{d(\lambda)} \\ |G_\lambda(x,y)| &\leq C[\varphi(x)\varphi(y)]^{-\frac{n}{4}}\,\frac{|\lambda|^{\frac{n}{2m}}}{d(\lambda)} \end{aligned}$$

pour tout x, $y \in \Omega$, $\lambda \in \mathcal{R}$, $|\lambda| \geq 1$.

Introduisons maintenant des notations déjà utilisées dans [6]

Pour x Ω et $\varepsilon > 0$, posons :

$$d(x) = \mathrm{dist}(x,\Gamma)$$
$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega,\ d(x) \geq \varepsilon\}$$
$$\mathcal{B}_\varepsilon = \Omega - \Omega_\varepsilon$$

Il existe $\varepsilon_0 > 0$ assez petit pour que, pour tout $x \in \mathcal{B}_{\varepsilon_0}$, il existe un seul point de Γ, noté x_Γ, pour lequel

$$|x - x_\Gamma| = d(x)$$

En plus des notations (1.7), pour $s \in \Gamma$, notons $\mathcal{T}_s$ l'hyperplan (affine) tangent en s à Γ, $E^n_{s,+}$ le demi-espace de bord $\tilde{T}_s$ dont ν_s est la normale intérieure.

Comme $\nu_s \neq 0$, il existe un difféomorphisme θ_s de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'un ouvert $\mathcal{O}_s$ de Γ, contenant s, sur la boule de $\tilde{T}_s$, de centre s et de rayon ε_0 (en diminuant ε_0 au besoin).

Faisons dès à présent la remarque suivante : pour $s \in \Gamma$ fixé, les considérations qui vont suivre font intervenir des constantes de majorations qui dépendent de s. Mais la régularité des données et le fait que Γ est compacte permettent de prouver que ces constantes peuvent être choisies indépendantes de s. Ainsi, pour abréger l'écriture, nous écrivons les notations (à part certaines) sous l'indice s ; ainsi par exemple : $\tilde{T}$, E^n_+, T, ν, θ, $\mathcal{O}$.

Pour $x \in E^n_+$, notons aussi :

$$\delta(x) = \mathrm{dist}\,(x,\tilde{T})$$
$$x_{\tilde{T}} = \text{la projection de } x \text{ sur } \tilde{T}$$
$$B_{\varepsilon_0} = \{x \in E^n_+,\ \delta(x) < \varepsilon_0\}$$

A partir de $\theta, \mathcal{O}$, nous définissons un difféomorphisme Θ de l'ouvert $\mathcal{U} = \{x \in \mathcal{B}_{\varepsilon_0}, x_\Gamma \in \mathcal{O}\}$ de Ω sur l'ouvert $U = \{x \in B_{\varepsilon_0},\ x_{\tilde{T}}\ \theta(\mathcal{O})\}$ de E^n_+ par l'application :

$$\Theta : x \longmapsto \theta(x_\Gamma) + d(x)\nu\ .$$

On choisit θ (ce qui est loisible) pour que la différentielle de Θ au point s soit l'identité.

Soit alors $s \in \Gamma$ fixé.

Considérons la forme intégro-différentielle à coefficients constants :

$$a'_s(u,v) = \int_{E^n_+} \delta(x)^n \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(s)\, D^\alpha u D^\beta v\, dx$$

dont les coefficients sont ceux de la partie principale de $a(u,v)$, pris au point s.

Notons $\mathcal{O}\!\mathcal{L}'_s(.,D)$ l'opérateur différentiel associé et A'_s la réalisation de Neumann. En vertu des hypothèses (H), on vérifie que A'_s est auto-adjoint strictement positif.

Pour $\lambda \notin \mathbb{R}_+$, $(A'_s - \lambda)^{-1}$ existe donc et notons le $F_{s,\lambda}$.

Grâce au théoreme A, il est aisé de voir que le noyau $F_{s,\lambda}(x,y)$ de $F_{s,\lambda}$ est un noyau d'Agmon continu et borné sur $E^n_+ \times E^n_+$.

De manière analogue à [6], nous avons le :

LEMME 2.2. Nous avons la formule :

$$\int_0^\infty F_{s,\lambda}(\nu t,\nu t)dt = (2\pi)^{1-n}\, \frac{\pi(n-1)}{m})(\sin \frac{\pi(n-1)}{m})^{-1} \Big[\sum_{j\geq 1} \rho_j(s)\Big](-\lambda)^{-1+\frac{n-1}{m}} \tag{2.3}$$

pour $\lambda \notin \mathbb{R}_+$.

(Dans (2.3), $\rho_j(s)$ est définie par la formule du théorème B, § 1).

Pour l'ouvert $\mathcal{U}$ de Ω construit auparavant et $\lambda \in \mathfrak{R}$, considérons la restriction à $\mathcal{U}$ de G_λ ; c'est l'opérateur

$$G^{\mathcal{U}}_\lambda f(x) = \int_{\mathcal{U}} G_\lambda(x,y)\, f(y)dy \qquad f \in L_2(\mathcal{U}).$$

Notons α l'opérateur de $L_2(\mathcal{U})$ dans $L_2(U)$: $f \to \alpha(f) = f \circ \Theta^{-1}$ et β son inverse $g \longmapsto \beta(g) = g \circ \Theta$. Considérons alors :

$$R^U_\lambda = \alpha\, G^{\mathcal{U}}_\lambda\, \beta \quad .$$

L'opérateur différentiel $\mathcal{O}\!\mathcal{L}(.,D)$ se transforme, par le changement de variable défini par Θ, en un opérateur différentiel de même type, $\mathcal{B}(.,D)$, sur U et on a évidemment :

$$(\mathcal{B}(.,D) - \lambda)\, R^U_\lambda\, g = g \qquad g \in L_2(U) \tag{2.4}$$

R^U_λ est un opérateur intégral dont le noyau d'Agmon $R^U_\lambda(x,y)$ associé est :

$$R^U_\lambda(x,y) = G_\lambda(\Theta^{-1}x, \Theta^{-1}y)\, \rho(y) \tag{2.5}$$

avec ρ la valeur absolue du jacobien de Θ^{-1}.

Nous désirons comparer $R^U_\lambda(x,y)$ au noyau $F_{s,\lambda}(x,y)$ au voisinage du point s.

Pour cela, soit $0 < \varepsilon \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ et soit η_ε une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \leq \eta_\varepsilon \leq 1$, $\eta_\varepsilon = 1$ sur la boule de centre ε et de rayon ε et nulle en dehors de la boule de centre S et de rayon 2ε. On construit η_ε de manière que l'on ait :

$$|D^\alpha \eta_\varepsilon| \leq C\, \varepsilon^{-|\alpha|}$$

avec C une constante ne dépendant que de α.

Pour la comparaison, considérons :

(2.6) $\quad S^{\varepsilon}_{s,\lambda} = \eta_\varepsilon (R^U_\lambda - F_{s,\lambda})\, \eta_\varepsilon$

qui est continu dans $L_2(E^n_+)$, à image dans $H^m_{2m}(E^n_+)$, ainsi que son adjoint.

- Si $S^{\varepsilon}_{s,\lambda}(x,y)$ est le noyau d'Agmon associé à $S^{\varepsilon}_{s,\lambda}$, il est facile de voir que l'on a :

(2.7) $\quad S^{\varepsilon}_{s,\lambda}(x,y) = \eta_\varepsilon(x)\, \eta_\varepsilon(y)\, (R^U_\lambda(x,y) - F_{s,\lambda}(x,y))$

pour $x,\ y \in E^n_+$, $\lambda \in \mathfrak{R}$.

Soit d'autre part ξ_ε une fonction ayant les mêmes propriétés que celles de η_ε et vérifiant de plus :

(2.8) $\quad \xi_\varepsilon\, \eta_\varepsilon = \eta_\varepsilon$

Utilisant (2.4), (2.5), (2.7), on a :

(2.9)
$$S^{\varepsilon}_{s,\lambda} = \eta_\varepsilon\, F_{s,\lambda}\, \xi_\varepsilon(\mathcal{B}(.,D) - \mathcal{A}'_s(.,D))\, R^U_\lambda\, \eta_\varepsilon$$
$$+\ \eta_\varepsilon\, F_{s,\lambda}[\xi_\varepsilon, \mathcal{A}'_s(.,D)]\, R^U_\lambda\, \eta_\varepsilon$$

Dans (2.8), $[\xi_\varepsilon, \mathcal{A}'_s(.,D)]$ désigne le commutateur $\xi_\varepsilon \mathcal{A}'(.,D) - \mathcal{A}'(.,D)\, \xi_\varepsilon$.

Cette décomposition conduit au :

LEMME 2.3. <u>Pour</u> k <u>entier</u> $\geqq 1$, <u>il existe une constante</u> $C > 0$ <u>telle que l'on ait</u>

(2.10)
$$|S^{\varepsilon}_{s,\lambda}(x,y)| \leqq C\, \frac{|\lambda|^{\frac{n}{m}}}{d(\lambda)} \left[\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\, \varepsilon + \left(\frac{|\lambda|^{1-\frac{1}{2m}}}{d(\lambda)\varepsilon} \right)^k \right]$$
$$|S^{\varepsilon}_{s,\lambda}(x,y)| \leqq C[\delta(x)\delta(y)]^{-\frac{n}{4}}\, \frac{|\lambda|^{\frac{n}{2m}}}{d(\lambda)} \left[\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\, \varepsilon + \left(\frac{|\lambda|^{1-\frac{1}{2m}}}{d(\lambda)\varepsilon} \right)^k \right]$$

<u>pour</u> $x,\ y \in E^n_+$, $s \in \Gamma$, $\lambda \in \mathfrak{R}$, $0 < \varepsilon \leqq \frac{\varepsilon_0}{2}$ <u>et</u> <u>vérifiant</u> $\varepsilon|\lambda|^{\frac{1}{2m}} \geqq 1$, $|\lambda| \geqq 1$.

<u>Preuve</u>. Nous donnons une idée rapide de la preuve de ce lemme. Notons :

$$A^{\varepsilon}_{s,\lambda} = \eta_\varepsilon\, F_{s,\lambda}\, \xi_\varepsilon(\mathcal{B}(.,D) - \mathcal{A}'_s(.,D))\, R^U_\lambda\, \eta_\varepsilon$$
$$B^{\varepsilon}_{s,\lambda} = \eta_\varepsilon\, F_{s,\lambda}[\xi_\varepsilon, \mathcal{A}'_s(.,D)]\, R^U_\lambda\, \eta_\varepsilon$$

Alors, (2.9) s'écrit :

(2.9)' $\quad S^{\varepsilon}_{s,\lambda} = A^{\varepsilon}_{s,\lambda} + B^{\varepsilon}_{s,\lambda}$.

Etudions le premier terme $A^{\varepsilon}_{s,\lambda}$. Pour cela, soit $\mathcal{B}'(.,D)$ la partie principale de $\mathcal{B}(.,D)$.

En utilisant le fait que la différentielle de Ⓗ au point s est l'identité, on voit que $\mathcal{A}'_s(.,D)$ est "comparable" à l'opérateur à coefficients constants obtenu à partir de $\mathcal{B}'(.,D)$, les coefficients étant ceux de $\mathcal{B}'(.,D)$ pris au point s. Comme $\mathcal{B}(.,D) - \mathcal{B}'(.,D)$ ne fait intervenir que deux des dérivées d'ordre $\leqq 2m-1$, on montre que l'on a :

$$\| A^{\varepsilon}_{s,\lambda} \|_{o,o;E^n_+} \leqq C \frac{|\lambda|}{d(\lambda)^2} \varepsilon$$

$$(2.11) \qquad \| A^{\varepsilon}_{s,\lambda} \|_{o,2m:m;E^n_+} \leqq C \frac{|\lambda|^2}{d(\lambda)^2} \varepsilon$$

$$\| (A^{\varepsilon}_{s,\lambda})^* \|_{o,2m:m;E^n_+} \leqq C \frac{|\lambda|^2}{d(\lambda)^2} \varepsilon$$

pour $s \in \Gamma$, $\lambda \in \mathcal{R}$, $0 < \varepsilon \leqq \frac{\varepsilon_o}{2}$ et vérifiant $\varepsilon|\lambda|^{\frac{1}{2m}} \geqq 1$, $|\lambda| \geqq 1$

Maintenant, le second terme $B^{\varepsilon}_{s,\lambda}$ fait intervenir le commutateur $[\xi_\varepsilon, \mathcal{O}\!\mathcal{L}'_s(.,D)]$. Comme $\xi_\varepsilon \mathcal{O}\!\mathcal{L}'(.,D)$ et $\mathcal{O}\!\mathcal{L}'(.,D)\,\xi_\varepsilon$ ont le même symbole dans un voisinage du support de η_ε (grâce au choix (2.8) de ξ_ε) ; la méthode des "contours successifs" conduit à : pour k entier $\geqq$ 1, il existe C > 0 telle que :

$$\| B_{s,\lambda} \|_{o,o;E^n_+} \leqq C \frac{1}{d(\lambda)} \left(\frac{|\lambda|^{1-\frac{1}{2m}}}{d(\lambda)\varepsilon}\right)^k$$

$$(2.12) \qquad \| B^{\varepsilon}_{s,\lambda} \|_{o,2m:m;E^n_+} \leqq C \frac{|\lambda|}{d(\lambda)} \left(\frac{|\lambda|^{1-\frac{1}{2m}}}{d(\lambda)\varepsilon}\right)^k$$

$$\| (B^{\varepsilon}_{s,\lambda})^* \|_{o,2m:m;E^n_+} \leqq C \frac{|\lambda|}{d(\lambda)} \left(\frac{|\lambda|^{1-\frac{1}{2m}}}{d(\lambda)\varepsilon}\right)^k$$

pour $s \in \Gamma$, $\lambda \in \mathcal{R}$, $0 < \varepsilon \leqq \frac{\varepsilon_o}{2}$ et vérifiant $\varepsilon|\lambda|^{\frac{1}{2m}} \geqq 1$, $|\lambda| \geqq 1$.

Alors (2.7), (2.9), (2.11), (2.12) et le théorème A prouvent le lemme.

III. PREUVE DU THÉORÈME 1.1.

Soit δ, δ' telle que $0 < \delta + \delta' < 1$

Notons :

$$(3.1) \qquad \varepsilon = |\lambda|^{-\frac{\delta'}{2m}}$$

Il existe $\rho \geqq 0$ assez grand pour que l'on ait :

$$(3.2) \qquad 0 < |\lambda|^{-\frac{1}{m}} \leqq \varepsilon \leqq \frac{\varepsilon_o}{2} \quad ; \quad \varepsilon|\lambda|^{\frac{1}{2m}} \geqq 1$$

pour $|\lambda| \geqq \rho$.

Décomposons :

$$\Omega = \Omega_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon .$$

En utilisant la deuxième majoration de (2.2) et la définition (3.1) de ε, on a, en intégrant :

$$(3.3) \qquad \int_{\Omega_\varepsilon} |G_\lambda(x,x)|\,dx \leqq C \frac{|\lambda|^{\frac{n-1}{m}}}{d(\lambda)} |\lambda|^{-\frac{(n-2)(2-\delta')}{4m}}$$

Pour l'intégrale sur $\mathcal{B}_\varepsilon$, on a :

$$(3.4) \qquad \left|\int_{\mathcal{B}_\varepsilon} G_\lambda(x,x)dx - \int_\Gamma \left(\int_0^\varepsilon G_\lambda(s+\nu t,s+\nu t)dt\right)ds\right| \leqq C\,\frac{|\lambda|^{\frac{n-1}{m}}}{d(\lambda)}\,|\lambda|^{-\frac{\delta'}{2m}}$$

Nous avons prouvé (3.3) en utilisant les deux inégalités (2.2) et en écrivant, grâce à (3.2) :

$$\int_0^\varepsilon = \int_0^{|\lambda|^{-\frac{1}{m}}} + \int_{|\lambda|^{-\frac{1}{m}}}^\varepsilon$$

Pour $s \in \Gamma$, le segment $\{x = s+\nu t \ ;\ 0 \leqq t \leqq \varepsilon_0\}$ est <u>invariant</u> par Θ. Comme la différentielle de Θ au point s est l'identité est 1, on a :

$$\rho(x) = 1 + O(|x-s|) \qquad\qquad |x-s| \to 0 .$$

On en déduit, grâce à (2.5) :

$$(3.5) \qquad \left|\int_0^\varepsilon G_\lambda(s+\nu t,s+\nu t)dt - \int_0^\varepsilon R_\lambda^U(s+\nu t,s+\nu t)dt\right| \leqq C\,\frac{|\lambda|^{\frac{n-1}{m}}}{d(\lambda)}\,|\lambda|^{-\frac{\delta'}{2m}}$$

Ecrivons maintenant :

$$\int_0^\varepsilon R_\lambda^U(s+\nu t,s+\nu t)dt = \int_0^\infty F_{s,\lambda}(s+\nu t,s+\nu t)dt + r_1 + r_2$$

avec

$$r_1 = \int_0^\varepsilon \left[R_\lambda^U(s+\nu t,s+\nu t) - F_{s,\lambda}|s+\nu t,s+\nu t)\right]dt$$

$$r_2 = -\int_\varepsilon^\infty F_{s,\lambda}(s+\nu t,s+\nu t)dt$$

Grâce à (3.2), le lemme 2.3 est applicable ; la formule (2.7) et les estimations (2.10) montrent que pour k entier $\geqq 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|R_\lambda^U(s+\nu t,s+\nu t)-F_{s,\lambda}(s+\nu t,s+\nu t)| \leqq C\,\frac{|\lambda|^{\frac{n}{m}}}{d(\lambda)}\,\left[\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}|\lambda|^{-\frac{\delta'}{2m}} + |\lambda|^{-\frac{k(1-\delta-\delta')}{2m}}\right]$$

$$|R_\lambda^U(s+\nu t,s+\nu t)-F_{s,\lambda}(s+\nu t,s+\nu t)| \leqq C t^{-\frac{n}{2}}\,\frac{|\lambda|^{\frac{n}{2m}}}{d(\lambda)}\,\left[\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}|\lambda|^{-\frac{\delta'}{2m}} + |\lambda|^{-\frac{k(1-\delta-\delta')}{2m}}\right]$$

pour $0 \leqq t \leqq |\lambda|^{-\frac{\delta'}{2m}}$, $\lambda \in \mathcal{R}_\delta$, $|\lambda| \geqq \rho$, $0 < \delta+\delta' < 1$.

On a alors :

$$(3.6) \qquad |r_1| \leqq C\,\frac{|\lambda|^{\frac{n-1}{m}}}{d(\lambda)}\,\left[\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\,|\lambda|^{-\frac{\delta'}{2m}} + |\lambda|^{-k\frac{(1-\delta-\delta')}{2m}}\right]$$

L'estimation concernant r_2 est aisée et on a :

$$(3.7) \qquad |r_2| \leqq C\,\frac{|\lambda|^{\frac{n-1}{m}}}{d(\lambda)}\,|\lambda|^{-\frac{n-2}{4m}(2-\delta')}$$

Tenant compte de (2.3) du lemme 2.2, (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) prouvent que, pour k entier $\geqq 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$(3.8) \qquad \left|\int_\Omega G_\lambda(x,x)dx - (-\lambda)^{-1+\frac{n-1}{m}}\int_\Gamma C(s)ds\right| \leqq$$
$$C\,\frac{|\lambda|^{\frac{n-1}{m}}}{d(\lambda)}\,\left[\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\,|\lambda|^{-\frac{\delta'}{2m}} + |\lambda|^{-\frac{(n-2)(2-\delta')}{4m}} + |\lambda|^{-\frac{k(1-\delta-\delta')}{2m}}\right]$$

pour $\lambda \in \mathcal{R}_{\delta}$, $|\lambda| \geqq \rho$, $0 < \delta+\delta' < 1$.

Nous avons noté, dans (3.8) :

$$C(s) = (2\pi)^{1-n} \alpha_{n,m} |\mathrm{grad}\varphi(s)|^{1-n} \sum_{j\geqq 1} \rho_j(s)$$

Alors (3.8) prouve le théorème 1.1 en prenant $\delta = \Theta$, $\delta' = 2\Theta$ et k assez grand puisque $1-3\Theta > 0$ et $n-2 \geqq 1$.

On déduit du théorème 1.1 le corollaire suivant :

Corollaire 3.1. Soit $0 < \Theta < \frac{1}{3}$. Il existe $C > 0$ et $\rho > 0$ telle que :

$$(3.9) \qquad \left|\int_\Omega G_\lambda(x,x)dx\right| \leqq C|\lambda|^{-1+\frac{n-1}{m}}$$

pour $\lambda \in \mathcal{R}_{\Theta}$ et $|\lambda| \geqq \rho$.

IV. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES.

a - Quelques lemmes.

Nous faisons dans cette section les hypothèses (1.9), (1.10). Il est alors facile de vérifier que la série $\sum_{j\geqq 1} (\lambda_j-\lambda)^{-1}$ est absolument convergente pour tout i appartenant à l'ensemble résolvant de A.

LEMME 4.1. Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(4.1) \qquad \left|\sum_{j\geqq 1} \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda_j-\lambda} - \sum_{j\geqq 1} \frac{1}{\lambda_j-\lambda}\right| \leqq C|\lambda|^{-1+\frac{n-1}{m}-\frac{1}{2m}} \left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^2$$

pour tout $\lambda \in \mathcal{R}$, $|\lambda| \geqq 1$.

Preuve. Ecrivons, pour $\lambda \in \mathcal{R}$:

$$(4.2) \qquad \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda_j-\lambda} - \frac{1}{\lambda_j-\lambda} = \frac{i\,\mathrm{Im}\lambda_j}{(\mathrm{Re}\lambda_j-\lambda)(\lambda_j-\lambda)}$$

Nous allons d'abord estimer le terme $\dfrac{\mathrm{Im}\lambda_j}{\mathrm{Re}\lambda_j-\lambda}$

Notons :

$$\mathbb{N}_1 = \{j \geqq 1 \ ; \ |\mathrm{Re}\lambda_j| > 2|\mathrm{Re}\lambda|)$$
$$\mathbb{N}_2 = \{j \geqq 1 \ ; \ |\mathrm{Re}\lambda_j| \leqq 2|\mathrm{Re}\lambda|)$$

Pour $j \in \mathbb{N}_1$, nous utilisons la majoration :

$$\left|\frac{\mathrm{Im}\lambda_j}{\mathrm{Re}\lambda_j-\lambda}\right| \leqq 2 \left|\frac{\mathrm{Im}\lambda_j}{\mathrm{Re}\lambda_j}\right|$$

Comme $\lambda_j \notin \mathcal{R}$ et $j \in \mathbb{N}_1$, il existe $C > 0$ telle que :

$$(4.3) \qquad \left|\frac{\mathrm{Im}\lambda j}{\mathrm{Re}\lambda_j-\lambda}\right| \leqq C|\lambda|^{-1/2n}$$

pour $\lambda \in \mathfrak{R}$ et $j \in \mathbb{N}_j$

Pour $j \in \mathbb{N}_2$, nous utilisons la majoration :

$$\left|\frac{\mathrm{Im}\lambda_j}{\mathrm{Re}\lambda_j-\lambda}\right| \leqq \left|\frac{\mathrm{Im}\lambda_j}{d(\lambda)}\right|$$

Comme $\lambda_j \notin \mathfrak{R}$ et $j \in \mathbb{N}_2$, on a :

$$\left|\frac{\mathrm{Im}\lambda_j}{\mathrm{Re}\,\lambda_j-\lambda}\right| \leqq C|\lambda|^{-\frac{1}{2m}} \frac{|\lambda|}{d(\lambda)} \tag{4.4}$$

pour $\lambda \in \mathfrak{R}$ et $j \in \mathbb{N}_2$.

Alors (4.2), (4.3), (4.4) prouvent que l'on a :

$$\left|\sum_{j\geqq 1} \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda_j-\lambda} - \sum_{j\geqq 1} \frac{1}{\lambda_j-\lambda}\right| \leqq C|\lambda|^{-\frac{1}{2m}} \frac{|\lambda|}{d(\lambda)} \left(\sum_{j\geqq 1} \frac{1}{|\lambda_j-\lambda|}\right) \tag{4.5}$$

pour $\lambda \in \mathfrak{R}$.

Il reste à estimer $\sum_{j\geqq 1} \frac{1}{|\lambda_j-\lambda|}$

En utilisant un calcul effectué dans [6], nous avons :

$$\sum_{j\geqq 1} \frac{1}{|\lambda_j-\lambda|} \leqq \frac{|\lambda|^{\frac{n-1}{m}}}{d(\lambda)} \tag{4.6}$$

pour $\lambda \in \mathfrak{R}$.

Alors (4.5), (4.6) prouvent le lemme.

Pour étudier le comportement asymptotique des valeurs propres, nous allons suivre la méthode de S. Agmon ; elle consiste à utiliser une formule de A. Pleijel qui est la suivante :

LEMME 4.2. Soit $\sigma(t)$ une fonction non décroissante définie sur $\mathbb{R}_+$. Soit, pour $\lambda \notin \mathbb{R}_+$:

$$f(\lambda) = \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t-\lambda}$$

Soit t et τ deux nombres réels positifs. Notons $\xi = t + i\tau$ et

$$I(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L(\xi)} f(\lambda)d\lambda$$

où $L(\xi)$ est une courbe orientée dans $\mathbb{C}$ joignant de $\bar{\xi}$ à ξ, ne rencontrant pas $\mathbb{R}_+$. Alors :

$$|I(\xi) - \frac{\tau}{\pi} \mathrm{Re}\, f(\xi) - \sigma(t) + \sigma(0)| \leqq \tau\, \mathrm{Im}\, f(\xi) . \tag{4.7}$$

b - Preuve du théorème 1.2.

Il est facile, en vertu du résultat de régularité (cf. [6]) concernant les itérés de **A**, de voir que l'on peut supposer, sans diminuer la généralité, $m > n$. On peut aussi supposer que A est inversible.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$, notons :

(4.8) $$f(\lambda) = \sum_{j\geq 1} \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda_j - \lambda}$$

qui s'écrit, sous la forme d'une transformée de Stieljès

$$f(\lambda) = \int_0^\infty \frac{dN(t)}{t-\lambda}$$

Soit $0 < \Theta < \frac{1}{3}$.

Pour $t > 0$ et a une constante > 0 à choisir, notons :

(4.9) $$I(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L(t)} f(\lambda)d\lambda$$

où $L(t)$ est une courbe orientée de $\mathbb{C}$, joignant $t-iat^{1-\frac{\Theta}{2m}}$ à $t+iat^{1-\frac{\Theta}{2m}}$, ne rencontrant pas $\mathbb{R}_+$.

Alors (4.7) donne :

(4.10) $$|I(t) - N(t)| \leq C\, t^{1-\frac{\Theta}{2m}} |f(t+iat^{1-\frac{\Theta}{2m}})|$$

pour $t > 0$.

Pour estimer le terme du second membre de (4.10), utilisons la formule suivante due à S. Agmon [1] :

(4.11) $$\sum_{j\geq 1} \frac{1}{\lambda_j - \lambda} = \int_\Omega G_\lambda(x,x)dx$$

pour tout λ appartenant à l'ensemble résolvant de A.

En vertu de (4.8), (4.11) et des estimations (3.9), (4.1), nous avons :

(4.12) $$|f(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-1+\frac{n-1}{m}}$$

pour $\lambda \in \mathcal{R}_\Theta$, $|\lambda| \geq \rho$.

Donc, en déterminant a et $t_0 > 0$ assez grand pour que $t+iat^{1-\frac{\Theta}{2m}}$ soit dans $\mathcal{R}_\Theta$ pour tout $t \geq t_0$, (4.10), (4.12) donnent :

(4.13) $$N(t) = I(t) + O(t^{\frac{n-1}{m} - \frac{\Theta}{2m}}) \qquad t \to +\infty$$

Nous allons maintenant étudier $I(t)$. Notons

(4.14) $$\gamma_0 = \alpha_{n,m}\gamma$$

En vertu de (4.8), (4.11) et des estimations (1.12), (4.1), nous avons :

(4.14) $$|f(\lambda) - (-\lambda)^{-1+\frac{n-1}{m}}\gamma_0| \leq C|\lambda|^{-1+\frac{n-1}{m} - \frac{\Theta}{m}} \left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^2$$

pour $\lambda \in \mathcal{R}_\Theta$, $|\lambda| \geq \rho$.

Choisissons maintenant $L(t)$, pour $t \geq t_0$, de la manière suivante :

$$L(t) = D(t) \cup C(t) \text{ avec :}$$

$$D(t) = \{\lambda \in \mathbb{C} \; ; \; \lambda = t+iu \; ; \; at^{1\,\frac{\Theta}{2m}} \leq |u| \leq at\}$$

$$C(t) = \{\lambda \in \mathbb{C} \; ; \; |\lambda| = (1+a^2)^{1/2}\, t \; , \; \mathrm{Re}\lambda \leq t\}$$

En vertu de (4.14), nous avons :

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L(t)}\left[f(\lambda)-(-\lambda)^{-1+\frac{n-1}{m}}\gamma_0\right]d\lambda\right| \leqq$$

$$C\left[t^{1+\frac{n-1}{m}-\frac{\Theta}{m}}\int_{at^{1-\frac{\Theta}{2m}}}^{at} u^{-2}du + t^{-1+\frac{n-1}{m}-\frac{\Theta}{m}}\int_{C(t)} du\right]$$

Cette dernière majoration donne :

$$(4.15)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{L(t)} f(\lambda)d\lambda = \frac{\gamma_0}{2\pi i}\int_{L(t)}(-\lambda)^{-1+\frac{n-1}{m}}d\lambda + O(t^{\frac{n-1}{m}-\frac{\Theta}{2m}})\quad t\to+\infty$$

Par un calcul explicite, on vérifie que :

$$(4.16)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{L(t)}(-\lambda)^{-1+\frac{n-1}{m}}d\lambda = \frac{m}{(n-1)\pi}\sin\frac{(n-1)\pi}{m}\, t^{\frac{n-1}{m}} + O(t^{\frac{n-1}{m}-\frac{\Theta}{2m}})\quad t\to+\infty$$

Alors (4.9), (4.14), (4.15), (4.16) donnent :

$$(4.17)\qquad I(t) = \gamma\, t^{\frac{n-1}{m}} + O(t^{\frac{n-1}{n}-\frac{\Theta}{2m}})\qquad t\to+\infty$$

(4.13) et (4.17) prouvent le théorème 1.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGMON S. - Lectures on elliptic boundary value Problems. Princeton Van Nostrand Mathematical Studies, (1965).

[2] BOLLEY P., CAMUS J. - Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids. Publications de l'Université de Rennes, (1969).

[3] BOLLEY P., CAMUS J. - Régularité pour une classe de problèmes aux limites elliptiques gégénérés variationnels. C.R. Acad. Sciences, Paris, t 278, (1974), p. 651-653.

[4] PHAM THE LAÏ. - Classe de compacité d'opérateur intervenant dans une classe de problèmes elliptiques dégénérés. Israël J. of Math., vol. 17, (1974) p. 364-379.

[5] PHAM THE LAÏ. - Comportement asymptotique des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés en dimension 2. C.R. Acad. Sciences Paris, t 278, (1974), p. 1619-1622. Séminaire J. Leray - Collège de France.

[6] PHAM THE LAÏ. - Opérateurs elliptiques dégénérés : comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres. C.R. Acad. Sciences, Paris, t 280, (1975), p. 1067-1070. A paraître au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.

PHAM THE LAÏ
Institut de Mathématiques
Université de Nantes
B.P.1044
44037 NANTES CEDEX