Journées Équations aux dérivées partielles

Guy Métivier

Comportement asymptotique des valeurs propres d'opérateurs elliptiques dégénérés

Journées Équations aux dérivées partielles (1975), p. 215-249
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1975____215_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 34-35 (1976) p.215-249

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES D'OPÉRATEURS ELLIPTIQUES DÉGÉNÉRÉS.

par

Guy MÉTIVIER

I. INTRODUCTION.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de bord Γ , $\overline{\Omega}$ étant une variété à bord C^∞. On se donne une fonction φ de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \varphi(x) > o\} . \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \varphi(x) = o\} . \\ \forall\ x \in \Gamma, \ \ d\varphi\ (x) \neq o . \end{cases}$$

On définit des opérateurs elliptiques dégénérés, par la méthode variationnelle, en se donnant des formes sesquilinéaires continues et coercitives sur des espaces de Sobolev avec poids. On veut envisager ici des espaces du type :

$$(1.1) \qquad W = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \ / \ \forall\ \alpha\ , \ |\alpha| \leq m \ : \varphi^{r_{|\alpha|}} . \ D^\alpha u \in L^2(\Omega)\} .$$

les r_p pour $p=o,\ldots,m$ étant des réels $\geq o$. On munit un tel espace de la norme hilbertienne évidente.

On peut prouver que l'on peut, sans changer l'espace W, modifier la suite r_p de manière à la rendre croissante et convexe. On envisagera donc dans toute la suite le cas typique suivant :

$$(1.2) \quad \begin{cases} \text{On se donne des entiers } \ell \leq k \leq m \text{ et des réels } s \text{ et } \delta \text{ avec } o \leq \ell-1 < s \leq \ell \\ \text{et } \ \delta > 1 . \\ \text{On pose } \ \sigma = (\delta-1)\ k+s \ \text{ et on définit : } r_p = \text{Max}\ (o, p-s\ , \ p\delta-\sigma). \end{cases}$$

de sorte que $r_p=o$ si $p \leq \ell-1$, $r_p=p-s$ pour $\ell \leq p \leq k$ et $r_p=p\delta-\sigma$ pour $k \leq p \leq m$.

On choisit comme espace variationnel V soit l'espace W défini en (1.1), soit $\overset{\circ}{W}$, adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans W. Soit a une forme intégro-différentielle du type :

$$(1.3)\quad \begin{cases} a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} a_{\alpha\beta}(x).\ \varphi(x)^{r|\alpha|+r|\beta|}\ D^\alpha u(x).\ \overline{D^\beta v(x)}.\ dx \\ \text{où les } a_{\alpha\beta} \text{ sont des fonctions continues sur } \overline{\Omega} \text{ et vérifient } a_{\beta\alpha} = \overline{a_{\alpha\beta}}. \end{cases}$$

a est hermitienne et continue sur W ; on la supposera coercitive sur V :

$\exists\, c_0 > 0,\ \exists\, \lambda_0 \in \mathbb{R},\ \forall u \in V :\ a(u,u) \geq c_0\ \|u\|_W^2 - \lambda_0\ \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$.

Par le lemme de Lax Milgram, on associe au triplet variationnel $(V, L^2(\Omega), a)$ un opérateur $(A,D(A))$ semi-borné et auto-adjoint dans $L^2(\Omega)$. On démontrera la compacité de l'injection de W dans $L^2(\Omega)$ et il en résultera que le spectre de A est constitué d'une suite de valeurs propres λ_j , réelles, tendant vers $+\infty$. On se propose d'établir des formules asymptotiques du type :

$$(1.4)\qquad N(\lambda) = \sum_{\lambda_j\leq\lambda} 1 \sim c.\lambda^\omega$$

ou dans certains cas :

$$(1.4')\qquad N(\lambda) = \sum_{\lambda_j\leq\lambda} 1 \sim c.\lambda^\omega.\ \mathrm{Log}\ \lambda$$

l'exposant ω et la constante c seront précisés au théorème 5.3.

Notons que dans certains cas la constante c dépend des conditions aux limites (choix de V). Remarquons aussi qu'on adapte très facilement les démonstrations (et les résultats) au cas où V est un espace du type :

$$V = \{u \in W \ /\ \gamma_j\, u = 0,\ \forall\, j \in J\}.$$

J étant un ensemble d'entiers $< s - \frac{1}{2}$.

La considération de conditions aux limites plus générales pose des problèmes techniques.

Le principal intérêt de ce travail est qu'on y étudie des opérateurs d'ordre supérieur à 2 ; on retrouve ainsi certains résultats obtenus pour l'ordre 2 en ([9], [14], [17]). Le cas des opérateurs d'ordre > 2 a été abordé par une méthode différente par PHAM THE LAI ([15], [16]).

Le plan sera le suivant : dans II on rappelle et on établit quelques propriétés des valeurs propres de problèmes variationnels; dans III on précise quelques propriétés des espaces de Sobolev avec poids qui nous seront utiles; dans IV on étudie le cas de modèles en dans V on établit les résultats pour le problème initial sur Ω.

Théorème 5.1 et 5.2 : la coercivité de a équivaut à l'ellipticité de a, et à la coercivité de formes à une variable "définies sur le bord" ; elle implique des relations de type ellipticité pour des symboles définis sur le bord Γ.

Théorème 5.3 : on précise (1.4) et (1.4'), les constantes c trouvées étant finies et non nulles grâce au théorème 5.2.

II. VALEURS PROPRES.

II.1. Précisons d'abord quelques notations : on appellera, dans toute la suite, problème variationnel un triplet (V,H,a) où V et H sont des espaces de Hilbert, V s'injectant continuement dans H, et où a est une forme hermitienne continue et coercitive sur V :

(2.1) $\quad \exists\, c_o > o,\ \exists\, t_o,\ \forall\, u \in V \quad c_o \|u\|_V^2 \leq a(u,u) + t_o \|u\|_H^2$.

On dira que le problème variationnel est compact si l'injection de V dans H est compacte ; dans ce cas, il existe des éléments φ_j de V $(j=1,\ldots)$ tels que :

(2.2) $\begin{cases} \text{le système des } \varphi_j \text{ est total dans } V \text{, orthogonal pour } a\text{, orthonormé pour} \\ (\ ,\ )_H \text{ et la suite } \lambda_j = a(\varphi_j, \varphi_j) \text{ est croissante et tend vers } +\infty . \end{cases}$

De plus, si pour tout $t \geq t_o$, on note :

$$S_{a+t} = \{u \in V \ /\ a(u,u) + t\|u\|_H^2 \leq 1\}$$

et $d_n(S_{a+t})$ $(n=o,1,\ldots)$ le n-ième diamètre de S_{a+t} dans H, ([11], [12]), alors on a (|4|,|5|) :

(2.3) $\quad \lambda_{n+1} + t = \{d_n(S_{a+t})\}^{-2} \quad (n=o,1,\ldots)$

On introduit alors la notation :

$$N(\lambda,V,a,H) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1$$

On convient de simplifier cette notation en $N(\lambda,V,a)$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur l'espace H, et d'omettre le a si celui-ci est le produit scalaire de V.

Si (V,H,a) est un problème variationnel compact, et si V est dense dans H, on lui associe un opérateur A auto-adjoint dans H, semi-borné et à résolvante compacte. Le spectre de A est constitué d'une suite de valeurs propres qui sont précisément les λ_j de (2.2). Les (φ_j) constituant une base orthonormée de H, de fonctions propres de A.

II.2. Pour étudier le comportement asymptotique des fonctions $N(\lambda,V,a,H)$, on introduit une classe de "fonctions de comparaison" :

$\mathcal{F}$ est l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, croissantes, tendant vers $+\infty$ avec λ et telles que :

$$f^*(\mu) = \lim_{\lambda \to +\infty} f(\mu.\lambda)/f(\lambda)$$

existe, pour tout μ de $\mathbb{R}_+$ et soit une fonction continue de μ.

On définit donc, pour un problème variationnel compact (V,H,a) et pour $f \in \mathcal{F}$, les nombres de $[o,\infty]$:

$$N_f^+(V,a,H) = \limsup_{\lambda \to +\infty} N(f,V,a,H)\ /\ f(\lambda)$$

$$N_f^-(V,a,H) = \liminf_{\lambda \to +\infty} N(f,V,a,H)\ /\ f(\lambda).$$

II.3. Rappelons d'abord les propriétés suivantes qui découlent immédiatement de (2.3) et des définitions :

(2.4) $N(\lambda.V,\ \alpha a+t\ (\ ,\ )_H) = N\ ((\lambda-t)/\alpha\ ,\ V,\ a)$

(2.5) Si (V_1, H, a_1) et (V_2, H, a_2) sont deux problèmes tels que $V_1 \subset V_2$ et $\forall\ u \in V_1\ ,\ a_2(u,u) \leq a_1(u,u)$ alors $N(\lambda, V_1, a_1) \leq N(\lambda, V_2, a_2)$.

(2.6) Si $(V_i, H_i, a_i)_{i=1,\dots,\nu}$ est une famille de problèmes variationnels compacts, on a alors :

$$N(\lambda,\ \overset{\nu}{\underset{i=1}{\oplus}} V_i\ ,\ \overset{\nu}{\underset{i=1}{\oplus}} a_i\ ,\ \overset{\nu}{\underset{i=1}{\oplus}} H_i) = \sum_{i=1}^{\nu} N(\lambda,\ V_i\ ,a_i\ ,H_i)$$

où $\overset{\nu}{\underset{i=1}{\oplus}} a_i$ est la forme définie par :

$$(\overset{\nu}{\underset{i=1}{\oplus}} a_i)\ (\overset{\nu}{\underset{i=1}{\oplus}} u_i\ ,\ \overset{\nu}{\underset{i=1}{\oplus}} v_i) = \sum_{i=1}^{\nu} a_i\ (u_i\ ,\ v_i).$$

(2.7) Si V_o est un sous-espace fermé de V de codimension finie ν dans V alors :

$$0 \leq N(\lambda,V,a) - N(\lambda,V_o\ ,a) \leq \nu.$$

(2.8) Si l'inégalité $a(u,u) \leq \lambda\ \|u\|_H^2$ a lieu pour tout élément u d'un sous-espace E de V alors :

$$\dim E \leq N\ (\lambda,V,a,H).$$

Nous utiliserons par la suite les deux propositions suivantes :

PROPOSITION 2.1. - <u>Soient</u> $V \hookrightarrow V_1 \hookrightarrow H$ <u>trois espaces de Hilbert</u>, <u>l'injection de</u> V <u>dans</u> V_1 <u>étant compacte</u>. <u>Soit</u> a <u>une forme hermitienne continue coercitive sur</u> V <u>et soit</u> b <u>une forme hermitienne sur</u> V <u>vérifiant</u> :

$$\exists\ C\ ,\ \forall\ u \in V\quad |b(u,u)| \leq C\ \|u\|_V\ .\ \|u\|_{V_1}$$

<u>Alors</u>, $a+b$ <u>est coercitive sur</u> V <u>et pour toute fonction</u> f <u>de</u> $\mathcal{F}$ <u>on a</u> :

$$N_f^{\pm}\ (V,\ a+b,\ H) = N_f^{\pm}\ (V,a,H).$$

<u>Démonstration</u>. - On déduit de la compacité de l'injection de V dans V_1, et de la coercivité de a que pour tout $\varepsilon > o$ il existe une constante C_ε telle que :

$$\forall\ u \in V\ :\ |b(u,u)| \leq \varepsilon\ a(u,u) + C_\varepsilon\ \|u\|_H^2\ ,$$

d'où l'on déduit la coercivité de $a+b$ et grâce à (2.4) et (2.5) que :

$$N(\lambda,V,a) \leq N(\lambda(1+\varepsilon) + C_\varepsilon\ ,\ V,\ a+b)$$

$$N(\lambda,V,a) \geq N(\lambda(1-\varepsilon) - C_\varepsilon\ ,\ V,\ a+b)$$

d'où, en écrivant que pour λ grand $C_\varepsilon < \varepsilon\ \lambda$;

$$f^*(1-2\varepsilon)\ N_f^{\pm}(V,a+b) \leq N_f^{\pm}(V,a) \leq f^*(1+2\varepsilon)\ N_f^{\pm}(V,a+b)$$

et la proposition suit en faisant tendre ε vers o.

PROPOSITION 2.2. - <u>Soit</u> $(V_\varepsilon\ ,H,\ a_\varepsilon)_{\varepsilon \geq o}$ <u>une famille de problèmes variationnels</u>

tels que :

1. - $(V_\varepsilon)_{\varepsilon \geq o}$ est une famille décroissante, et l'injection de V_o dans H est compacte.

2. - Il existe $c_o > o$, telle que :

$$\forall \varepsilon \geq o \qquad \forall u \in V_\varepsilon \quad : \quad a_\varepsilon(u,u) \geq c_o \|u\|^2_{V_o} .$$

On suppose que a_ε converge vers a_o au sens suivant : il existe un sous-espace $\mathcal{D}$ de $\bigcup_{\varepsilon > o} V_\varepsilon$, dense dans V_o tel que :

3. - $\forall u \in \mathcal{D} \qquad a_\varepsilon(u,u) \longrightarrow a_o(u,u) \quad (\varepsilon \to o)$

4. - Pour toute famille $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > o}$, pour laquelle $a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)$ reste borné, et pour tout u de $\mathcal{D}$.

$$a_o(u,u_\varepsilon) - a_\varepsilon(u,u_\varepsilon) \longrightarrow o \qquad (\varepsilon \to o)$$

Alors, pour tout λ de $\mathbb{R}$ point de continuité de $N(\lambda, V_o, a_o, H)$:

$$N(\lambda, V_\varepsilon, a_\varepsilon, H) \underset{\varepsilon \to o}{\longmapsto} N(\lambda, V_o, a_o, H)$$

Remarque. - Ce résultat est à rapprocher de résultats de [10] et suivant la méthode qui y est utilisée, on peut démontrer sous les mêmes hypothèses, la convergence forte et avec la proposition, en norme des projecteurs spectraux.

Démonstration. - Remarquons d'abord que :

$$\exists c_1, \forall \varepsilon > o, \forall u \in V_\varepsilon \qquad a_\varepsilon(u,u) \geq c_1 a_o(u,u) \qquad \text{et on a donc :}$$

(2.9) $\qquad N(\lambda, V_\varepsilon, a_\varepsilon) \leq N(\lambda/C_1, V_o, a_o) < +\infty .$

Notons (φ_i) et (λ_i) $(i=1,\dots)$ les éléments associés au problème (V_o, H, a_o) par (2.2), et (ψ^ε_j), (μ^ε_j) $(j=1,\dots)$ ceux associés au problèmes $(V_\varepsilon, H, a_\varepsilon)$. Fixons maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$, distincts de tous les λ_i.

Il existe alors $\delta > o$ tel que :

$$\nu_o = N(\lambda, V_o, a_o) = N(\lambda - \delta, V_o, a_o)$$

et approchant les φ_i $(i=1,\dots,\nu_o)$ par des éléments de $\mathcal{D}$, on voit qu'il existe un sous-espace G de $\mathcal{D}$ de dimension ν_o tel que :

$$\forall u \in G, \ a_o(u,u) \leq (\lambda - \delta/2) \|u\|^2_H .$$

G étant de dimension finie, on a pour ε assez petit $G \in V_\varepsilon$ et grâce à l'hypothèse 3 :

$$\forall u \in G \qquad a_\varepsilon(u,u) \leq \lambda \|u\|^2_H .$$

On en déduit alors, par (2.8), que pour ε assez petit, on a :

$$N(\lambda, V_\varepsilon, a_\varepsilon) \geq N(\lambda, V_o, a_o).$$

Soit d'autre part : $\nu = \limsup_{\varepsilon \to o} N(\lambda, V_\varepsilon, a_\varepsilon)$

Par (2.9), on a : $\nu < +\infty$, et quitte à restreindre ε aux valeurs d'une suite tendant vers 0, on peut supposer que : $\nu = N(\lambda, V_\varepsilon, a_\varepsilon)$.

On a donc : $a_\varepsilon(\psi_j^\varepsilon , \psi_j^\varepsilon) = \mu_j^\varepsilon \leq \lambda$ pour $j=1,\dots,\nu$, et on en déduit, par l'hypothèse 4, que pour $u \in \mathcal{D}$:

$$(a_\varepsilon - a_0)\ (u, \psi_j^\varepsilon) \longrightarrow 0 \quad \text{ou} \quad :$$

(2.10) $$\mu_j^\varepsilon(u, \psi_j^\varepsilon)_H - a_0(u, \psi_j^\varepsilon) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Par l'hypothèse 2, ψ_j^ε reste borné dans V_0 , et comme $\mu_j^\varepsilon \leq \lambda$, on en déduit que (2.10) reste vrai pour tout u de V_0 . En particulier, prenant $u = \varphi_i$ on a :

(2.11) $$\forall\ i \geq 1,\ \forall\ j \geq \nu \qquad (\mu_j^\varepsilon - \lambda_i)\,(\varphi_i\ , \psi_j^\varepsilon)_H \underset{\varepsilon \to 0}{\longmapsto} 0$$

Si l'on suppose que $\nu > \nu_0 = N(\lambda, V_0\ , a_0)$, il existe alors des éléments v_ε de V_ε :

$$v_\varepsilon = \sum_{j=1}^{\nu} v_{\varepsilon,j} \cdot \psi_j^\varepsilon \quad \text{avec}$$

(2.12) $$\begin{cases} \|v_\varepsilon\|_H^2 = 1 \quad \text{et} \\ (v_\varepsilon\ , \varphi_i) = 0\ ,\ i=1,\dots,\ \nu_0\ . \end{cases}$$

Les $v_{\varepsilon,j}$ étant bornés et $\lambda_i > \lambda \geq \mu_j^\varepsilon$ pour $j \leq \nu$ et $i > \nu_0$, on déduit que (2.11) que :

(2.13) $$\begin{cases} (v_\varepsilon\ , \varphi_i) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 & \text{si} \quad i > \nu_0 \\ (v_\varepsilon\ , \varphi_i) = 0 & \text{si} \quad i \leq \nu_0\ . \end{cases}$$

Or, on a :

$$a_0(v_\varepsilon) \leq {}^1\!/\!C_1\ a_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq {}^\lambda\!/\!C_1\ \|v_\varepsilon\|_H^2$$

ce qui implique, en décomposant v_ε sur les φ_i :

$$\sum_{\lambda_i > \lambda/C_1} |(v_\varepsilon\ , \varphi_i)|^2 \leq C^{te} \sum_{\lambda_i \leq \lambda/C_1} |(v_\varepsilon\ , \varphi_i)|^2$$

ce qui avec (2.13) implique que $\|v_\varepsilon\|_H^2 \longmapsto 0$ contredisant l'hypothèse $\|v_\varepsilon\|_H^2 = 1$, et cette contradiction achève la démonstration de la proposition.

III. ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS.

III.1. Soient Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et φ comme au I. Pour m entier et r réel ≥ 0 , on définit l'espace :

$$W_r^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega)\ /\ \forall \alpha,\ |\alpha| \leq m : \varphi^r D^\alpha u \in L^2(\Omega)\}$$

muni de la norme hilbertienne évidente. Pour l'étude au voisinage de Γ on introduit des espaces modèles :

On note $\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times\ ]0,\infty[$, et $x = (x',t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ la variable générique de $\mathbb{R}_+^n$. On définit alors :

$$W_r^m(\mathbb{R}_+^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n)\ /\ \forall\ \alpha\ ,\ |\alpha| \leq m : t^r D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}_+^n)\}\ .$$

De plus, si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de la forme $U = U' \times]o,T[$, U' ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ on définit :

$$W_r^m(U) = \{u \in W_r^m(\mathbb{R}_+^n) \ / \ u(x) = o \ , \ \text{pp } x \in \mathbb{R}_+^n \setminus U\} .$$

On utilisera aussi les espaces suivants, où Π^{n-1} désigne le tore de dimension $(n-1)$:

$$W_r^m(\Pi^{n-1} \times \mathbb{R}_+) = \{u \in \mathcal{D}'(\Pi^{n-1} \times \mathbb{R}_+) \ / \ \forall \alpha \ , \ |\alpha| \leq m \ : \ t^r \ D^\alpha u \in L^2(\Pi^{n-1} \times \mathbb{R}_+)\}$$

et

$$W_r^m(\Pi^{n-1} \times]o,T[) = \{u \in W_r^m(\Pi^{n-1} \times \mathbb{R}_+) \ / \ \text{supp } u \subset \Pi^{n-1} \times [o,T]\} .$$

On désignera dans ce paragraphe par X une des variétés, Ω , $\mathbb{R}_+^n$, $U = U' \times]o,T[$, $\Pi^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ ou $\Pi^{n-1} \times]o,T[$.

On notera $\mathring{W}(X)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(X)$ dans $W(X)$.

On rappelle que : (cf. [3], [8], [13]).

(3.1) $\quad W_r^m(X) \hookrightarrow W_{r-j}^{m-j}(X)$ si $0 \leq j \leq m$ et $j \leq r$

(3.2) $\quad \mathcal{D}(\overline{X})$ est dense dans $W_r^m(X)$ si $X = \Omega$, $\mathbb{R}_+^n$, $\Pi^{n-1} \times \mathbb{R}_+$.

PROPOSITION 3.1. - <u>Si</u> X <u>est borné</u>, <u>alors</u> $W_r^m(X)$ <u>s'injecte avec injection compacte dans</u> $W_{r'}^{m'}(X)$ <u>pourvu que</u> :

$$m' \leq m-1 \quad \text{et} \quad r' - m' > r - m.$$

<u>Démonstration</u>. - On suppose que $m' = m-1$. Le cas général suit des injections suivantes (cf.(3.1)) :

$$W_r^m(X) \hookrightarrow W_{r''}^{m-1}(X) \hookrightarrow W_{r'}^{m'}(X)$$
$$\text{avec} \quad r'' = r' + (m-1-m')$$

Puisque $W_r^m(\Omega) \hookrightarrow H_{loc}^m(\Omega)$, par partition de l'unité et cartes locales, on ramène le cas $X = \Omega$ au cas $X = U' \times]o,T[$, et dans ce dernier cas, en prolongeant par 0, on se ramène au cas où U' est un pavé. Nous supposons donc maintenant que $X = X' \times]o,T[$, X' étant soit un pavé de $\mathbb{R}^{n-1}$, soit le tore Π^{n-1} .

On définit alors les opérateurs τ_h $(h > o)$:

$$(\tau_h u) \quad (x',t) = u(x', t+h)$$

τ_h opère de $W_r^m(X)$ dans $W_r^m(X) \cap H^m(X)$. On obtiendra alors la compacité (cf. [1]) à partir de l'estimation :

(3.3) $$\|u - \tau_h u\|_{W_{r'}^{m-1}(X)} \leq C. \ h^\varepsilon \ \|u\|_{W_r^m(X)}$$

où $\varepsilon = \text{Min } (1, 1+r'-r) > o$.

En effet, si u_j est une suite bornée dans $W_r^m(X)$, prenant une suite $h_n \searrow o$ on extrait de u_j , par le procédé diagonal, une sous-suite u_{jk} telle que pour tout n, $\tau_{h_n} u_{jk}$ converge dans $H^{m-1}(X)$, et donc dans $W_{r'}^{m-1}(X)$ et par (3.3), on en déduit que la suite u_{jk} converge elle-même dans $W_{r'}^{m-1}(X)$.

L'estimation (3.3) résulte directement du lemme :

LEMME 3.2. - Il existe une constante C telle que pour toute fonction u de $W^1_r(o,T)$ on ait :

$$\int_0^T t^{2r'} |u(t+h) - u(t)|^2 \, dt \leq C\, h^{2\varepsilon} \int_0^T t^{2r} |u'(t)|^2 \, dt.$$

avec $\varepsilon = \mathrm{Min}\,(1,\ 1+r'-r) > 0$.

Démonstration. - On écrit que pour u dans $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ on a :

$$u(t+h) - u(t) = \int_t^{t+h} u'(s)\, ds$$

et on écrit les majorations :

$$|u(t+h) - u(t)|^2 \leq \frac{(2h)^{2\varepsilon}}{2\varepsilon} \int_t^{t+h} s^{1-2\varepsilon} |u'(s)|^2 \, ds \qquad \text{si} \quad t \leq h$$

$$|u'(t+h) - u(t)|^2 \leq h \int_t^{t+h} |u'(s)|^2 \, ds \qquad \text{si} \quad t \geq h$$

et le lemme suit par intégration.

III.2. Espaces W.

Si r_p est la suite de réels définis en (1.2), on définit les espaces :

$$W(X) = \bigcap_{p=o}^{m} W^p_{r_p}(X)$$

$\overset{\circ}{W}(X)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(X)$ dans $W(X)$.

Il résulte alors de la proposition (3.1) :

PROPOSITION 3.3. - Si X est borné, W(X) s'injecte avec injection compacte dans $L^2(X)$.

III.3. Espaces à une variable.

On utilisera par la suite les espaces $W^m_r(o,T)$ et $W(o,T)$, munis d'une famille de normes dépendant d'un paramètre $\rho > o$:

$$\|u\|^2_{W^m_{r,\rho}(o,T)} = \sum_{k=o}^{m} \rho^{2(m-k)} \, \|t^r D^k_t u\|^2_{L^2(o,T)}$$

$$\|u\|^2_{W_\rho(o,T)} = \sum_{p=o}^{m} \|u\|^2_{W^p_{r_p,\rho}(o,T)} .$$

On précisera $W^m_{r,\rho}(o,T)$ ou $W_\rho(o,T)$ pour spécifier que les espaces sont munis des normes indicées par ρ.

Dans le cas des espaces à une variable (n=1), nous précisons la proposition (3.1) de la manière suivante :

PROPOSITION 3.4. -

i) Pour $r < m$, il existe une constante C, ne dépendant que de r et m, telle que pour tout $T > o$ et tout réel λ positif, on ait :

$$N(\lambda,\ W_r^m(o,T),\ L^2(o,T)) \leq C\ [\lambda^{1/2m}\ T^{1-r/m} + 1]$$

ii) Pour $o < r < m$, il existe $\lambda_o > o$, tel que :

$$N(\lambda,\ W_r^m(\mathbb{R}_+),\ L^2(\mathbb{R}_+)) = o \quad \text{si} \quad \lambda < \lambda_o .$$

$$N(\lambda, W_r^m(\mathbb{R}_+),\ L^2(\mathbb{R}_+)) = O(\lambda^{1/2r}) \quad \lambda \geq \lambda_o .$$

Démonstration. - On suit une méthode très voisine de celle utilisée en [6].

Soit $\varepsilon = 1 - \frac{r}{m}$. Pour $h > o$, on définit la suite $t_j = h\ j^{1/\varepsilon}$, $j=1,\dots,\nu$ où ν sera fixé par la suite. On note $h_j = t_{j+1} - t_j \leq 1/\varepsilon .\ h\ .\ (j+1)^{1/\varepsilon - 1}$.

On approche u de $W_r^m(o,T)$ sur $]t_j\ ,t_{j+1}[$ par un polynôme de degré $(m-1)$, $P_j(u)$, de sorte que :

$$\|u - P_j u\|^2_{L^2(t_j,t_{j+1})} \leq C.\ h_j^{2m}\ \|D^m u\|^2_{L^2(t_j,t_{j+1})}$$

On approche donc u sur $]t_1\ ,t_\nu[$ par une fonction v polynomiale par morceaux variant dans espace de dimension $\nu.m$, telle que :

$$\|u - v\|^2_{L^2(t_1,t_\nu)} \leq C\ (\sup_j\ h_j^{2m}\ t_j^{-2r})\ \|t^{2r}\ D^m u\|^2_{L^2(t_1,t_\nu)} ,$$

et il vient alors :

$$(3.4) \qquad \|u - v\|^2_{L^2(t_1,t_\nu)} \leq C_1\ h^{2(m-r)}\ \|t^{2r}\ D^m u\|^2_{L^2(t_1,t_\nu)} .$$

On considère d'autre part l'opérateur Δ_h :

$$\Delta_h\ u(t) = u(t) - u(t+h).$$

On vérifie, comme au lemme 3.2, l'estimation :

$$(3.5) \qquad \|t^\rho\ \Delta_h u\|^2_{L^2(o,\rho h)} \leq \frac{[(\rho+1)h]^{2\varepsilon}}{2\varepsilon\ (2\rho+1)}\ \|t^{\rho+1-\varepsilon}\ D_t u\|^2_{L^2(o,(\rho+1)h)} .$$

Or on a : $\Delta_h^m\ u(t) = u(t) - \sum_{p=1}^{m} (-1)^p \binom{m}{p}\ u(t+ph)$ que l'on note $\Delta_h^m u = u - \tau_h^m\ u$, et l'on déduit de (3.5) :

$$(3.6) \qquad \|u - \tau_h^m\ u\|^2_{L^2(o,h)} \leq C_2\ h^{2m\varepsilon}\ \|t^r\ D_t^m\ u\|^2_{L^2(o,m+1)h)} .$$

On a d'autre part de manière évidente :

$$(3.7) \qquad \|\tau_h^m u - \tau_h^m v\|^2_{L^2(o,h)} \leq C_3\ \|u-v\|^2_{L^2(h,(m+1)h)}$$

et en regroupant (3.4), (3.6) et (3.7) on voit que si l'on pose :

$$w(t) = v(t) \qquad \text{pour} \quad t \geq h$$

$$w(t) = (\tau_h^m v)(t) \quad \text{pour} \quad t \leq h.$$

On a :

$$(3.8) \qquad \|u-w\|^2_{L^2(o,t_\nu)} \leq C_4\ h^{2(m-r)}\ \|D^m u\|^2_{L^2(o,t_\nu)}$$

pourvu que $(m+1)h \leq t_\nu$, w variant dans un espace de dimension $m.\nu$.

Pour démontrer i), on choisit alors ν de sorte que $h\nu^{1/\varepsilon} \geq T$ et on déduit de (3.8) :

$$N\left(\frac{1}{C_4} h^{r-m}\right) \leq m\nu \leq m\,(T^{\varepsilon} h^{-\varepsilon} + 1)$$

pourvu que $(m+1)h \leq T$.

Pour démontrer ii), on choisit ν de sorte que $t_\nu^{-2r} \leq C_4\, h^{2(m-r)}$, i.e. $\nu \geq C_4^{-\varepsilon/2r}\, h^{-m\varepsilon/r}$.

En prolongeant W par 0 sur $]t_\nu, \infty[$, et en tenant compte de la majoration :

$$\|u\|^2_{L^2(t_\nu,\infty)} \leq t_\nu^{-2r}\, \|t^r u\|^2_{L^2(t_\nu,\infty)}$$

on obtient alors de (3.8) :

$$\|u-w\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq C_4 \quad t^{2(m-r)}\ \|u\|^2_{W^m_r(\mathbb{R}_+)}$$

et

$$N\left(\frac{1}{C_4} h^{r-m}, W^m_r(\mathbb{R}_+)\right) \leq m.\nu\ . \leq m\,\left[C_5\, h^{-m\varepsilon/r} + 1\right]$$

pourvu que

$$C_4\, h^{2m} \geq (m+1)^{2r}$$

ce qui démontre la seconde estimation de ii), la première résultant seulement de la continuité de l'injection de $W^m_r(\mathbb{R}_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}_+)$.

IV. MODÈLES.

IV.1. Soit $J' = (]o,h[)^{n-1}$, pavé de $\mathbb{R}^{n-1}$, que l'on identifie à un ouvert du tore $X' = \mathbb{R}^{n-1}/_{h.\,\mathbb{Z}^{n-1}}$. On considère alors les variétés $J = J' \times]o,T[$ et $X = X' \times]o,T[$

Etant donnée la suite (r_p) (1.2), on définit les espaces W(J) et W(X). Pour ne pas énoncer deux fois des résultats semblables, on convient de désigner par V l'un des symboles W ou $\overset{\circ}{W}$, toujours le même à l'intérieur d'un énoncé.

On décompose la variable x de $\mathbb{R}^n$ en $x = (y,t)$ $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}_+$ et la variable duale ξ en (η,τ).

Soit b la forme hermitienne sur $W(\mathbb{R}^n)$:

$$(4.1) \qquad b(u,v) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} b_{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}^n_+} t^{r_{|\alpha|}+r_{|\beta|}}\ .\ D^\alpha u\ .\ \overline{D^\beta v}\ dx$$

avec $b_{\alpha\beta} = \overline{b_{\beta\alpha}} \in \mathbb{C}$.

On introduit aussi des formes à une variable sur $W(\mathbb{R}_+)$: pour $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$ on pose :

$$b_\eta(u,v) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} b_{\alpha\beta}\ .\ \eta^{\alpha'+\beta'}\ .\int_0^\infty t^{r_{|\alpha|}+r_{|\beta|}}.\ D_t^{\alpha_n} u.\ \overline{D_t^{\beta_n} v.}\ dt$$

où l'on a écrit $\alpha = (\alpha', \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N}$

Nous commençons par étudier la coercivité de b et on a tout d'abord :

LEMME 4.1. - b <u>est coercitive sur</u> $V(J)$ <u>si et seulement si</u> b <u>est coercitive sur</u> $V(\mathbb{R}^{n-1} \times]o,T[)$.

<u>Démonstration</u>. - La condition est suffisante puisque : $V(J) \hookrightarrow V(\mathbb{R}^{n-1} \times]o,T[)$. Prouvons sa nécessité.

On considère les pavés $J'_\nu = {}^h\!/_2 \cdot \nu + J'$ $(\nu \in \mathbb{Z}^{n-1})$ et $J_\nu = J'_\nu \times]o,T[$. b est alors coercitive sur $V(J_\nu)$ et :

$$(4.3) \qquad \exists\, c_o > o,\ \exists\, \lambda_o,\ \forall\, \nu \in \mathbb{Z}^{n-1},\ \forall\, u \in V(J_\nu)\ b(u,u) + \lambda_o \|u\|^2_{L^2(J_\nu)} \geq c_o \|u\|^2_{W(J_\nu)} .$$

D'autre part, il existe des fonctions $\zeta_\nu \in \mathcal{D}(J'_\nu)$ telles que $\sum\limits_\nu \zeta_\nu^2 = 1$ sur $\mathbb{R}^{n-1}$ et que :

$$(4.4) \qquad \forall\, \alpha' \in \mathbb{N}^{n-1}\ \exists\, C_{\alpha'} ,\ \forall\, \nu \in \mathbb{Z}^{n-1} \quad \|D^\alpha \zeta_\nu\|_{L^\infty} \leq C_{\alpha'}$$

On déduit alors de (4.4) qu'il existe une constante C, telle que pour tout u de $V(\mathbb{R}^{n-1} \times]o,T[)$ on ait :

$$|b(u,u) - \sum_\nu b(\zeta_\nu u\ ,\ \zeta_\nu u)| \leq C \sum_\nu \sum_{\substack{o<p\leq m \\ o\leq q\leq m}} \|u\|_{W^{p-1}_{r_p}(J_\nu)} \cdot \|u\|_{W^q_{r_q}(J_\nu)} .$$

Il résulte alors de la compacité de l'injection de $W^{p-1}_{r_p}(J_\nu)$ dans $W^p_{r_p}(J_\nu)$, en remarquant que tout point x est dans au plus 2^{n-1} pavés J_ν, que :

$$(4.5) \qquad \begin{cases} \forall\, \varepsilon > o,\ \exists\, C_\varepsilon\ ,\ \forall\, u \in V(\mathbb{R}^{n-1} \times]o,T[) : \\ |b(u,u) - \sum\limits_\nu b(\zeta_\nu u, \zeta_\nu u)| \leq \varepsilon \|u\|^2_W + C_\varepsilon \|u\|^2_{L^2} \end{cases}$$

De même, on a :

$$\begin{cases} \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times]o,T|)} = \sum\limits_\nu \|\zeta_\nu u\|^2_{L^2(J_\nu)} \\ \|u\|^2_{W(\mathbb{R}^{n-1} \times |o,T|)} \leq \text{Cte} \sum\limits_\nu \|\zeta_\nu u\|^2_{W(J_\nu)} . \end{cases}$$

Ecrivant (4.3) pour chaque fonction $(\zeta_\nu u)$ on obtient compte-tenu de (4.5) et (4.6) la coercivité de b sur $V(\mathbb{R}^{n-1} \times]o,T[)$.

PROPOSITION 4.2. - b <u>est coercitive sur</u> $V(J)$ <u>si et seulement si les formes</u> b_η $(\eta \in \mathbb{R}^{n-1})$ <u>sont coercitives sur</u> $V_{|\eta|}(o,T)$ <u>uniformément en</u> η, <u>i.e.</u> :

$$(4.7) \qquad \begin{cases} \exists\, C_o > 0\ ,\ \exists\, \lambda_o \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\, \eta \in \mathbb{R}^{n-1},\ \forall\, u \quad V(o,T) \\ \quad b_\eta(u,u) + \lambda_o \|u\|^2_{L^2(o,T)} \geq C_o \|u\|^2_{W_{|\eta|}(o,T)} . \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>. - Pour $u \in L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times]o,T[)$, on note $\hat{u}(\eta,t)$ sa transformée de Fourier partielle. Il est clair que si (4.7) a lieu, en écrivant l'inégalité pour la fonction $t \longrightarrow \hat{u}(\eta,t)$, et en l'intégrant en η on obtient la coercivité de b sur $V(\mathbb{R}^{n-1} \times]o,T[)$.

Inversement, si b est coercitive sur $V(J)$ donc sur $V(\mathbb{R}^{n-1} \times]o,T[)$, on écrit l'inégalité correspondante pour des fonctions de la forme $u(y,t) = \zeta(y) \cdot v(t)$

pour obtenir :

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\hat{\zeta}(\eta)|^2 [b_\eta(v,v) + \lambda_0 \|v\|^2_{L^2(0,T)} - C_0 \|v\|^2_{W_{|\eta|}(0,T)}]\, d\eta \geq 0$$

et l'inégalité ayant lieu pour toute fonction $\zeta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ on en déduit (4.7).

Nous aurons besoin par la suite de résultats d'ellipticité. On introduit ici les symboles suivant qui apparaitront par la suite :

pour $(t,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ avec $\xi = (\eta,\tau) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. On pose :

$$(4.8) \quad \begin{cases} b_\eta(t,\tau) = b(t,\xi) = \sum\limits_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} b_{\alpha\beta} \cdot t^{r_{|\alpha|}+r_{|\beta|}} \xi^{\alpha+\beta} , \\ b^1(t,\xi) = \sum\limits_{\substack{k\leq|\alpha|\leq m \\ k\leq|\beta|\leq \mu}} b_{\alpha\beta} \cdot t^{r_{|\alpha|}+ r_{|\beta|}} \cdot \xi^{\alpha+\beta} \\ b'^k(\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=|\beta|=k} b_{\alpha\beta} \cdot \xi^{\alpha+\beta} \\ b'^m(\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=|\beta|=m} b_{\alpha\beta} \cdot \xi^{\alpha+\beta} . \end{cases}$$

Avec ces notations on a :

PROPOSITION 4.3. <u>Si</u> b <u>est coercitive sur</u> $\overset{\circ}{W}(J)$ <u>alors</u> :

i) <u>Il existe une constante</u> $C_1 > 0$ <u>telle que pour</u> $(t,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ <u>on ait</u> :

$$b^1(t,\xi) \geq C_1 \, [t^{2r_k}|\xi|^{2k} + t^{2r_m}|\xi|^{2m}] .$$

$$b'^k(\xi) \geq C_1 \, |\xi|^{2k}$$

$$b'^m(\xi) \geq C_1 \, |\xi|^{2m}$$

ii) <u>Il existe deux constantes</u> $C_2 > 0$ et λ_1 <u>telles que pour</u> $(t,\xi) \in]0,T[\times \mathbb{R}^n$ <u>on ait</u> :

$$b(t,\xi) \geq C_2 [t^{2r_k}|\xi|^{2k} + t^{2r_m}|\xi|^{2m}] - \lambda_1 \, t^{-2s}$$

<u>Démonstration</u>. - Soit $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. On se donne $\gamma > 1$ et on applique (4.7) pour $\eta = \rho^\gamma . \eta_0$ à la fonction $u(t) = \zeta(\rho t) \exp(i\rho^\gamma \tau_0 t)$, où $\xi_0 = (\eta_0,\tau_0)$ est fixé et où ρ est assez grand pour que $u \in \mathcal{D}(]0,T[)$. Prenant la partie principale quand $\rho \to +\infty$, on obtient :

$$(4.9) \quad \sum_{\substack{|\alpha|\in\Delta \\ |\beta|\in\Delta}} b_{\alpha\beta} \cdot \xi_0^{\alpha+\beta} \int_0^\infty t^{r_{|\alpha|}+r_{|\beta|}} |\zeta(t)|^2 dt \geq C_0 \sum_{|\alpha|\in\Delta} \xi_0^{2\alpha} \int_0^\infty t^{2r_{|\alpha|}} |\zeta(t)|^2 \, dt$$

où $\Delta = \{k,\dots,m\}$ si $\gamma = \delta$

$\Delta = \{k\}$ si $1 < \gamma < \delta$

$\Delta = \{m\}$ si $\delta < \gamma$

Puisque (4.9) a lieu pour tout $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ on en déduit le i)

Pour démontrer ii) il suffit alors de vérifier que :

si $p \notin \{k,\dots m\}$ ou si $q \notin \{k,\dots m\}$ alors :

(4.10) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \lambda_\varepsilon,\ \forall (t,\xi) \in]0,T[\times \mathbb{R}^n$:

$$t^{r_p+r_q}|\xi|^{p+q} \leq \varepsilon\ [t^{2r_k}|\xi|^{2k} + t^{2r_m}|\xi|^{2m}] + \lambda_\varepsilon\ t^{-2s}$$

- si $p + q < 2k$. On a pour $(t,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$:

$$t^{p+q-2s}|\xi|^{p+q} \leq \varepsilon . t^{2r_k}|\xi|^{2k} + \varepsilon^{-(p+q)/(2k-p-q)}\ t^{-2s}$$

et (4.10) suit puisque $r_p \geq p-s$, $r_q \geq q-s$ et puisque pour (4.10) on restreint t à $]0,T[$

- si $2k \leq p+q < 2m$, $p < k$. On a :

$$t^{(p+q)\delta-\sigma}|\xi|^{p+q} \leq t^{2r_k}|\xi|^{2k} + t^{2r_m}|\xi|^{2m}.$$

Comme $r_p > p\delta-\sigma$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe t_ε tel que (4.10) ait lieu sur $]0,t_\varepsilon[\times \mathbb{R}^n$ avec $\lambda_\varepsilon = 0$. Mais alors puisque $p + q < 2m$, on peut choisir λ_ε de sorte que (4.10) ait lieu sur $]t_\varepsilon, T[\times \mathbb{R}^n$.

On achève ainsi la démonstration de la proposition 4.3.

IV.2. - On suppose maintenant pour toute la suite que b est coercitive sur V(J) et donc que (4.7) a lieu.
On a alors :

PROPOSITION 4.4. - b <u>est coercitive sur</u> V(X) <u>et on a</u> :

$$N(\lambda,V(X),\ b,\ L^2(X)) = \sum_{\nu \in h^* \mathbb{Z}^{n-1}} N(\lambda,V(0,T),\ b_\nu,\ L^2(0,T))$$

avec $h^* = 2\pi/h$.

<u>Démonstration</u>. - On effectue un développement partiel en séries de Fourier : pour

$$u(y,t) = \sum_{\nu \in h^* \mathbb{Z}^{n-1}} . u_\nu(t).\ h^{(1-n)/2}.\ \exp(i\nu y)$$

on a

$$\|u\|^2_{L^2(X)} = \sum_\nu \|u_\nu\|^2_{L^2(0,T)}$$

$$b(u,u) = \sum_\nu b_\nu\ (u_\nu,\ u_\nu)$$

$$\|u\|^2_{W(X)} \leq \text{Cte.} \sum_\nu \|u_\nu\|^2_{W_{|\nu|}(0,T)} .$$

On en déduit alors la coercitivité de b. D'autre part si on note $\varphi_{\nu,j}(j=1,..)$ une base orthonormée de fonctions propres pour les valeurs propres $\lambda_{\nu,j}$, de l'opérateur associé au problème variationnel $(V(0,T), L^2(0,T), b_\nu)$, les fonctions $\tilde{\varphi}_{\nu,j}(y,t) = \varphi_{\nu,j}(t).\ h^{(1-n)/2} \exp(i\nu.y)$ forment une base orthonormée de $L^2(X)$ de fonctions propres pour les valeurs propres $\lambda_{\nu,j}$ de l'opérateur associé au problème $(V(X), L^2(X), b)$, et la proposition suit.

Notons :

(4.11) $\qquad m_1 = \operatorname{Sup}\{p \in \{1,\dots m\} \ / \ p-r_p > 0\}.$

De l'injection $W(0,T) \hookrightarrow W^{m_1}_{r_{p_1}}(0,T)$ on tire, grâce à la proposition 3.4 :

(4.12) $\qquad N(\lambda, V(0,T), b_{|\eta|}) = O(\lambda^{1/2m_1})$

uniformément pour $|\eta|$ borné.

On introduit alors les fonctions suivantes :
pour $R > 0$ on note :

$$\Phi_R(\lambda) = \int_{|\eta|>R} N(\lambda, V(0,T), b_\eta)\, d\eta.$$

On modifie la proposition 4.4 en la :

PROPOSITION 4.5. - <u>Les fonctions</u> $N(\lambda, V(X), b, L^2(X))$ et $(h/2\pi)^{n-1} . \Phi_R(\lambda)$ <u>sont équivalentes au sens suivant</u> :

<u>Pour toute fonction</u> f <u>de</u> $\mathcal{F}$ <u>vérifiant</u> $\lambda^{1/2m_1} = O(f(\lambda))$ <u>on a</u> :

$$N_f^+(V(X), b, L^2(X)) = (h/2\pi)^{n-1} \limsup_{\lambda \to +\infty} \Phi_R(\lambda) / f(\lambda)$$

$$N_f^-(V(X), b, L^2(X)) = (h/2\pi)^{n-1} \liminf_{\lambda \to +\infty} \Phi_R(\lambda) / f(\lambda)$$

<u>Démonstration</u>. - Pour $|\nu| \geq R > (2\pi)/h$ et pour η dans le pavé de centre ν de côté $(2\eta)/h$ on a :

$$|\ \eta^{\alpha'+\beta'} - \nu^{\alpha'+\beta'}\ | \leq C.\ |\eta|^{|\alpha'+\beta'|-1}$$

d'où l'on tire :

$$\forall u \in V(0,T) \quad |b_\eta(u,u) - b_\nu(u,u)| \leq C/_{|\eta|} \quad \|u\|^2_{W_{|\eta|}(0,T)}$$

Notant C_0 et λ_0 les constantes de (4.7), on voit alors que $\varepsilon > 0$ étant donné, on a pour $|\eta| > C/_{\varepsilon C_0}$

$$\forall u \in V(0,T) \quad |b_\eta(u,u)-b_\nu(u,u)| \leq \varepsilon\ [b_\eta(u,u) + \lambda_0 ||u||^2_{L^2}]$$

d'où l'on déduit les encadrements :

$$N(\lambda(1-\varepsilon)-\varepsilon\lambda_0,\ V(0,T),\ b_\nu) \leq\ N(\lambda, V(0,T),\ b_\eta) \leq$$
$$\leq\ N(\lambda(1+\varepsilon) + \varepsilon\lambda_0,\ V(0,T),\ b_\nu).$$

et compte tenu de (4.12) on obtient :

$$N(\lambda(1-\varepsilon)-\varepsilon\lambda_0,\ V(X),\ b) \leq (h/_{2\pi})^{n-1}\ \Phi_R(\lambda) + O(\lambda^{1/2m_1})$$
$$N(\lambda(1+\varepsilon) + \varepsilon\lambda_0,\ V(X),\ b) \geq (h/_{2\pi})^{n-1}.\ \Phi_R(\lambda) + O(\lambda^{1/2m_1})$$

La proposition suit alors en passant à la limite d'abord en λ, puis en faisant tendre ε vers 0.

IV.3. - Nous étudions donc maintenant les fonctions $N(\lambda, V(0,T),\ b_\eta)$ et tout d'abord leur comportement par homogénéité.

Pour u dans $V(0,T)$ et $\rho > 0$ on pose $v(t) = u(t/\rho)$ et on a :

$$(4.13)\quad \begin{cases} ||u||^2_{L^2(0,T)} = \rho^{-1}\ ||v||^2_{L^2(0,\rho T)} \\[2ex] b_\eta(u,u) = \rho^{2s-1}\ b_{\eta/\rho,\rho}\ (v,v). \end{cases}$$

où les formes $b_{\eta,\rho}$ sont définies par :

$$b_{\eta,\rho}(v,v) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} b_{\alpha.\beta}.\rho^{-s_{|\alpha|}-s_{|\beta|}}\ \eta^{\alpha'+\beta'} \int_0^{T\rho} t^{r_{|\alpha|}+r_{|\beta|}} D^{\alpha}_{n}u.\ \overline{D^{\beta}_{n}v}.dt$$

avec $s_p = -p + r_p + s \geq 0$ pour $p = 0,\dots m$.

Notons que $s_p = 0$ si et seulement si $p \in \{\ell,\dots.k\}$, (ℓ et k sont définis en (1,2)). On définit alors :

$$(4.14)\quad b^o_\eta(v,v) = \sum_{\substack{\ell\leq|\alpha|\leq k \\ \ell\leq|\beta|\leq k}} b_{\alpha\beta}.\eta^{\alpha'+\beta'} \int_0^\infty t^{r_{|\alpha|}+r_{|\beta|}}\ D^{\alpha}_{n}v.\ \overline{D^{\beta}_{n}v}.\ dt.$$

qui est définie et continue (cf(3.1)) sur $W^k_{r_k}(\mathbb{R}_+)$

Il résulte maintenant de (4.13) que :

$$(4.15)\quad N(\lambda, V(0,T),\ b_\eta, L^2(0,T)) = N(\lambda\rho^{-2s};\ V(0,\rho T),\ b_{\eta/\rho.\rho},\ L^2(0,\rho T))$$

On énonce alors :

PROPOSITION 4.6. - Soit b une forme (4.1) vérifiant (4.7). Alors b^o_η est fortement coercitive sur $V^k_{r_k|\eta|}(\mathbb{R}_+)$ uniformément en $\eta \neq 0$, ie :

$$\exists c'_o > 0 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^{n-1}\setminus 0. \quad \forall u \in V^k_{r_k}(\mathbb{R}_+).$$
$$b^o_\eta(u,u) \geq c_o \|u\|^2_{W^k_{r_k,|\eta|}(\mathbb{R}_+)}.$$

Si de plus $r_k > 0$. Alors pour tout réel λ :

$$N(\lambda, V(0,\rho T), b_{\eta,\rho}, L^2(0,\rho T)) \xrightarrow[\rho\to+\infty]{} N(\lambda, V^k_{r_k}(\mathbb{R}_+), b^o_\eta, L^2(\mathbb{R}_+)) \quad \text{p.p } \eta.$$

Démonstration. - On déduit de (4.7) par le changement de fonction $v(t) = u(t/\rho)$ que pour $v \in V(0, \rho T)$:

$$(4.16) \qquad b_{\eta,\rho}(v,v) \geq c'_o \sum_{p=o}^{m} \rho^{-2s_p} \|v\|^2_{W^p_{r_p,|\eta|}(\mathbb{R}+)} - \lambda_o \rho^{-2s}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

et la coercitivité suit en remarquant que les fonctions à support compact sont denses dans $V^k_{r_k}(\mathbb{R}_+)$, et en faisant tendre ρ vers $+\infty$.

Nous allons maintenant vérifier quand $r_k > 0$ les hypothèses de la proposition 2.2. pour les problèmes variationnels, $(V(0,\rho T), L^2(\mathbb{R}_+), b_{\eta,\rho})$ et $(V^k_{r_k}(\mathbb{R}_+), L^2(\mathbb{R}_+), b^o_\eta)$ $\eta \neq 0$ étant fixé.

Tout d'abord puisque $r_k > 0$, l'injection de $V^k_{r_k}(\mathbb{R}_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ est compacte. Ensuite puisque $|\eta| \neq 0$. On a $\|.\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq$ Cte $\|.\|_{W^k_{r_k,|\eta|}(\mathbb{R}+)}$ et on déduit alors de (4.16) que pour ρ assez grand on a :

$$(4.17) \qquad b_{\eta,\rho}(v,v) \geq C'_o/2 \sum_{p=o}^{m} \rho^{-2s_p} \|v\|^2_{W^p_{r_p,|\eta|}(\mathbb{R}_+)}$$

On choisit maintenant comme espace $\mathcal{D}$ de la proposition 2.2, $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ ou $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ suivant que $V = W$ ou $\overset{\circ}{W}$. Il est clair d'après la définition de b^o_η que :

$$\forall u \in \mathcal{D} \quad b_{\eta,\rho}(u,u) \xrightarrow[\rho\to+\infty]{} b^o_\eta(u,u)$$

Soit maintenant (u_ρ) $(\rho > \rho_o)$ une famille de fonctions telles que :

$$\begin{cases} u_\rho \in V(0,\rho T) \quad \text{et} \\ \sup\limits_\rho \; b_{\eta,\rho}(u_\rho, u_\rho) < +\infty. \end{cases}$$

On a alors par (4.17) que pour $p = 0,\dots m$

$$(4.18) \qquad \operatorname*{Sup}_\rho \rho^{-s_p} \|u_\rho\|_{W^p_{r_p|\eta|}(\mathbb{R}_+)} < +\infty$$

Soit $u \in \mathcal{D}$. Notons T_o un réel tel que supp $u \subset [0,T_o[$. Alors $(b_{\eta,\rho} - b^o_\eta)(u,u_\rho)$ est une somme de termes de la forme :

$$L_{\alpha\beta} = \rho^{-s_{|\alpha|}-s_{|\beta|}} \int_0^{T_0} t^{r_{|\alpha|}+r_{|\beta|}} D^{\alpha_n} u \overline{D^{\beta_n} u\rho} . dt$$

avec $s_{|\alpha|}+s_{|\beta|} > 0$.

Si $s_{|\alpha|} > 0$ il est clair par (4.18) que $L_{\alpha\beta} \to 0$. De même si $\beta_n \leq k$, par (4.18) $t^{r_{\beta_n}} . D^{\beta_n} u\rho$ reste borné dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ et puisque u est à support compact $L_{\alpha\beta} \to 0$. Il suffit donc d'étudier maintenant le cas $|\alpha| \leq k$ et $\beta_n > k$. Des intégrations par parties montrent alors que $L_{\alpha\beta}$ est somme de termes de la forme :

$$\rho^{-s_{|\alpha|}-s_{|\beta|}} \int_0^{T_0} t^{\omega} . \overline{D_t^j u . D_t^k u\rho} . dt$$

avec $\omega > r_k > 0$, et comme précédemment on conclut que $L_{\alpha\beta} \to 0$, ce qui achève de vérifier les hypothèses de la proposition 2.2. On en déduit alors que :

$$N(\lambda, V(0,\rho T), b_{\eta,\rho}, L^2(\mathbb{R}_+)) = N(\lambda, V(0,\rho T), b_{\eta,\rho}, L^2(0,\rho T))$$

$$\underset{\rho\to+\infty}{\longrightarrow} N(\lambda, V^k_{r_k}(\mathbb{R}_+), b^o_\eta, L^2(\mathbb{R}_+)).$$

pourvu que λ soit point de continuité de $N(\lambda, V^k_{r_k}(\mathbb{R}_+), b^o_\eta)$.

Remarquons maintenant que l'homogénéité de b^o_η permet d'obtenir comme (4.15) que :

(4.19) $\qquad N(\lambda, V^k_{r_k}(\mathbb{R}_+), b^o_\eta) = N(\lambda\rho^{-2s}, V^k_{r_k}(\mathbb{R}_+), b^o_{\eta/\rho})$.

D'où l'on déduit en prenant $\rho = |\eta|$ que λ étant fixé, l'ensemble des η pour lesquels λ n'est pas point de continuité de $N(\lambda, V^k_{r_k}(\mathbb{R}_+), b^o_\eta)$ est dans chaque direction dénombrable, et donc négligeable, ce qui achève la démonstration de la proposition 4.6.

On déduit maintenant de (4.19), de la coercitivité des formes b^o_η et de la proposition 3.4 le

LEMME. 4.7. - <u>On suppose que</u> $r_k > 0$. <u>Il existe alors une constante</u> $\mu_1 > 0$, <u>et une constante</u> C <u>telles que</u> , <u>pour tout</u> $\lambda > 0$, <u>et tout</u> $\eta \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus 0$ <u>on a</u> :

$$N(\lambda, V^k_{r_k}(\mathbb{R}_+), b^o_\eta) \leq C . \lambda^{1/2r_k} |\eta|^{-s/r_k}$$

$$N(\lambda, V^k_{r_k}(\mathbb{R}_+), b^o_\eta) = 0 \quad \text{si} \quad \lambda|\eta|^{-2s} < \mu_1$$

On aura de même :

LEMMME 4.8.i) <u>Il existe deux constantes</u> μ_0 <u>et</u> R_0 telles <u>que pour</u> $\lambda|\eta|^{-2s} < \mu_0$ <u>et</u> $|\eta| > R_0$ on ait :

$$N(\lambda, V(0,T),\, b_\eta) = 0$$

ii) <u>Il existe une constante</u> C <u>telle que pour tous</u> $\lambda \geq 0,\ \eta \neq 0,$ <u>et</u> $T_1 \leq T$ <u>on ait</u> :

$$N(\lambda, V(0,\, T_1),\, b_\eta) \leq C\, [1 + \lambda^{1/2k}.\ T_1^{s/k}]\ .$$

<u>Démonstration</u>. - Il résulte de (4.15) et (4.16) que :

$$N(\lambda, V(0,T_1,\, b_\eta) \leq N((\lambda+\lambda_0)|\eta|^{-2s}/c'_0\ ,\ W^k_{r_k}(0,|\eta|T_1)).$$

et ii) résulte de la proposition 3.4.

Si $r_k > 0$. On majore $N(\lambda',\ W^k_{r_k}(0,|\eta|\ T)$ par $N(\lambda' W^k_{r_k}(\mathbb{R}_+))$ et on obtient i) comme au lemme 4.7. par la proposition 3.4.

Si $r_k = 0$, $W^k_0(0,|\eta|T)$ est l'espace de Sobolev usuel $H^k(0,|\eta|T)$ et de $\|\cdot\|_{L^2} \leq \|\cdot\|_{H^k}$ on déduit que $N(\mu, H^k(0,|\eta|T)) = 0$ si $\mu < 1$.

D'oû encore i).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le

THÉORÈME 4.9. - <u>Soit</u> b <u>une forme (4.1) vérifiant (4.7)</u>. <u>Alors si</u> $n.r_k > k$ <u>on a</u> :

$$N(\lambda, V(X), b, L^2(X)) \sim \{(2\pi)^{1-n} \int_{T^*X'} N(\lambda, V^k_{r_k}(\mathbb{R}_+), b^0_\eta\ ).dy.d\eta\}\lambda^{\frac{n-1}{2s}}.$$

<u>Remarque</u>. - La convergence de l'intégrale résulte du lemme 4.7 et de l'hypothèse $n.r_k > k$.

<u>Démonstration</u>. - En utilisant (4.15) on a :

$$\Phi_R(\lambda^{2s}) = \lambda^{(n-1)} \int_{\lambda|\eta|>R} N(1, V(0,\lambda T),\, b_{\eta,\lambda}) d\eta. \tag{4.20}$$

Par le lemme (4.8) on a, si $R > R_0$, $N(1, V(0,\lambda T), b_{\eta,\lambda}) = 0$ si $|\eta|^{-2s} < \mu_0$.

On déduit de (4.16) la majoration :

$$N(1, V(0,\lambda T), b_{\eta,\lambda}) \leq N((1+\lambda_0/\lambda)|\eta|^{-2s}\ c_0'^{-1}\ ,\ W^k_{r_k}(\mathbb{R}_+))\ .$$

et

$$N(1, V(0,\lambda T),\, b_{\eta,\lambda}) = 0\ (|\eta|^{-s/r_k}\ ).$$

Le théorème résulte alors d'une application du théorème de la convergence dominée pour le passage à la limite de l'intégrale intervenant en (4.20).

IV.4. - Nous étudions maintenant le cas $nr_k \leq k$. Pour cela nous utiliserons des estimations plus précises de $N(\lambda, V(0,T), b_\eta)$.

Pour des raisons techniques nous supposerons maintenant, quitte à changer b en $b + \lambda_0(\ ,\ )_{L^2(X)}$, que l'on peut prendre $\lambda_0 = 0$ dans (4.7). On a alors :

LEMME 4.10. - Il existe une constante L, telle que pour tout $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$, tout $\varepsilon \in]0,1]$, et tous réels t_1 et t_2 vérifiant $0 < t_1 < t_2 \leq T$ et $|t_2 - t_1| < \varepsilon t_1$, on ait :

$$N(\lambda, H_0^m(t_1,t_2), b_\eta) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt. \int_{b_\eta(t,\tau) \leq \lambda(1+L\varepsilon)} d\tau + 2m$$

$$N(\lambda, H_0^m(t_1,t_2), b_\eta) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{b_\eta(t,\tau) \leq \lambda(1-L\varepsilon)} d\tau - 3m.$$

Démonstration. - Soit $\theta \in]t_1, t_2]$. Notons $\tilde{b}$ la forme obtenue en figeant les coefficients de b_η en θ. On a alors pour u dans $H_0^m(t_1,t_2)$:

(4.21) $$|b_\eta(u,u) - \tilde{b}(u,u)| \leq C^{te}.\ \varepsilon \|u\|^2_{W_{|\eta|}(0,T)} \leq L.\varepsilon\, b_\eta(u,u).$$

où L ne dépend que des $b_{\alpha\beta}$, de la suite r_p, et de la constante c_0 de (4.7). On tire de (4.21) :

(4.22) $$N(\lambda(1-L\varepsilon), H_0^m(t_1,t_2), \tilde{b}) \leq N(\lambda, H_0^m(t_1,t_2), b_\eta) \leq N(\lambda(1+L\varepsilon), H_0^m(t_1,t_2), \tilde{b}).$$

Notant $H^m_{\#}(t_1, t_2)$ l'espace des fonctions périodiques de $H^m(t_1, t_2)$. On a puisque $H_0^m(t_1,t_2)$ est de codimension m dans $H^m(t_1,t_2)$:

(4.23) $$0 \leq N(\lambda, H^m_{\#}(t_1,t_2), \tilde{b}) - N(\lambda, H_0^m(t_1,t_2), \tilde{b}) \leq m.$$

Or on sait que :

$$N(\lambda, H^m_{\#}(t_1,t_2), \tilde{b}) = \mathrm{Card}\,\{p \in \mathbb{Z} / b_\eta(\theta, \frac{2\pi p}{t_2-t_1}) \leq \lambda\}.$$

D'où l'on tire en utilisant que $b_\eta(\theta,\tau)$ est un polynôme de degré 2m en τ :

$$\left|N(\lambda; H^m_{\#}(t_1,t_2), \tilde{b}) - \frac{t_2-t_1}{2\pi} \int_{b_\eta(\theta,\tau) \leq \lambda} d\tau\ \right| \leq 2m$$

et le lemme suit en reportant cette estimation dans (4.23) et (4.22) et en intégrant ensuite en θ.

On utilisera aussi.

LEMME 4.11. - <u>Si</u> c_0 <u>est la constante de (4.7), alors pour tous</u> $t_1 \leq T$. $\lambda \geq 0$ <u>et</u> $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$ tels que $c_0\, t_1.^{2r_k} |\eta|^{2k} > \lambda$, on a :

$$N(\lambda, H_0^m(t_1, T), b_\eta) = 0.$$

Démonstration. - Pour u dans $V(0,T)$ on a :

$$b_\eta(u,u) \geq c_0 \|u\|^2_{W_{|\eta|}(0,T)} \geq c_0 |\eta|^{2k} . \|t^{r_k} u\|^2_{L^2(0,T)}$$

d'où pour u dans $H_0^m(t_1, T)$:

$$\|u\|^2_{L^2(t_1,T)} \leq \frac{1}{c_0} t_1^{-2r_k} |\eta|^{-2k} b_\eta(u,u)$$

et le lemme suit.

On introduit maintenant les notations suivantes :
pour $\rho > 0$, $\lambda > 0$ et $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$ on note :

$$(4.24) \qquad \begin{aligned} \theta_\rho(\lambda,\eta) &= \operatorname{Inf}(T|\eta|, (\rho\lambda|\eta|^{-2s})^{1/2r_k}) && \text{si } r_k > 0 \\ \theta_\rho(\lambda,\eta) &= T|\eta| && \text{si } r_k = 0 \end{aligned}$$

et

$$(4.25) \qquad \Psi_\rho(\lambda,\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{b_\eta(t,\tau) \leq \lambda \\ 1 < t|\eta| < \theta_\rho(\lambda,\eta)}} dt.d\tau$$

On a alors le :

LEMME. 4.12. - Il existe des constanstes ε_0, ρ_0, L et R_1 telles que pour tous $\varepsilon < \varepsilon_0$ $\rho > \rho_0$ $\lambda > 0$ et tout η vérifiant $R_1 < |\eta| < (1/2\ \rho.\lambda)^{1/2s}$, on a :

$$N(\lambda, V(0,T), b_\eta) \leq \Psi_\rho(\lambda(1+L\varepsilon),\eta) + 0(1 + \lambda^{1/2k}|\eta|^{-s/k}) + 0(1 + \operatorname{Log} \theta_\rho(\lambda,\eta)).$$

$$N(\lambda, V(0,T), b_\eta) \geq \Psi_\rho(\lambda(1-L\varepsilon),\eta) + 0\ (1 + \operatorname{Log} \theta_\rho(\lambda,\eta)).$$

Démonstration. - Etant donnée une partition de $]0,T[$ en intervalles $]0,t_0[$, et $]t_j, t_{j+1}[$ pour $j = 0,\ldots.\nu$, avec $t_{\nu+1} = T$, l'espace $V(0,t_0) \oplus [\bigoplus_{j=0} H_0^m(t_j,t_{j+1})]$ est inclus $V(0,T)$ et est de codimension $m(\nu+1)$ dans $V(0,T)$; on en déduit :

$$(4.26) \qquad 0 \leq N(\lambda,V(0,T),b_\eta) - \sum_{j=0}^{\nu} N(\lambda,H_0^m(t_j,t_{j+1}), b_\eta) \leq N(\lambda,V(0,t_0),b_\eta) + m(\nu+1)$$

On choisit $t_0 = 1/_{|\eta|}$, et par le lemme 4.8 on a :

$$(4.27) \qquad N(\lambda,V(0,t_0),b_\eta) = 0(1 + \lambda^{1/2k}.|\eta|^{-s/k}).$$

Etablissons la minoration du lemme, la majoration s'obtenant de manière similaire en utilisant en outre (4.27).

Soit L la constante garantie par le lemme 4.10.
Soit $\varepsilon < \mathrm{Log}\ 2.$ tel que $4L\varepsilon < 1$; notons $\lambda' = \lambda(1)2L\varepsilon) > \frac{\lambda}{2}$.
Soit $\rho > 0$, et soit η tel que $2|\eta|^{2s} < \rho.\lambda$.

Si $\theta_\rho(\lambda',\eta) = T|\eta|$ on choisit les t_j de la manière suivante :

$$\begin{cases} t_j = 1/|\eta| \cdot e^{\varepsilon j} & j = 0,\dots.\nu \\ t_{\nu+1} = T \leq 1/|\eta|\, e^{\varepsilon(\nu+1)} \end{cases}$$

de sorte que $|\, t_{j+1} - t_j \,| < 2\varepsilon t_j$ et $\nu \leq 1/_\varepsilon \mathrm{Log}\ T|\eta|$. Ce choix est possible pourvu que $T|\eta| > 1$, c'est à dire $|\eta|$ assez grand. On applique le lemme 4.10 sur les intervalles $]t_j,\ t_{j+1}[$ et on obtient la minoration.

Si $\theta_\rho(\lambda',\eta) < T|\eta|$ on choisit les t_j :

$$\begin{cases} t_j = 1/|\eta|\, e^{\varepsilon j} & j = 0,\dots.\ \nu-1, \\ t_\nu = 1/|\eta| \cdot \theta_\rho(\lambda',\eta) \leq 1/|\eta|\, e^{\varepsilon\nu} \\ t_{\nu+1} = T\ . \end{cases}$$

Ce choix est possible puisque $2|\eta|^{2s} < \rho\lambda$ implique $|\eta|^{2s} < \rho\lambda'$ et $\theta_\rho(\lambda',\eta) > 1$. On applique le lemme (4.10) sur les intervalles $t_j,\ t_{j+1}$ pour $j = 0,\dots.\ \nu-1$ et le lemme (4.11) sur l'intervalle $]t_\nu,\ T[$: pour cela il suffit que $c_0\, t_\nu^{2r_k} . |\eta|^{2k} > \lambda$, ce qui, compte tenu du choix de t_ν , est satisfait dès que ρ est assez grand.

On introduit maintenant les fonctions :

$$\Psi_{R,\rho}(\lambda) = \int_{A_{R,\rho}(\lambda)} dt.d\xi.$$

où $A_{R,\rho}(\lambda)$ est l'ensemble des $(t,\xi) \in]0,T[\times \mathbb{R}^n$ qui vérifient, en notant $\xi = (\eta,\tau) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$:

$$(4.28) \qquad \begin{cases} R < |\eta| < (\rho\lambda)^{1/2s} \\ 1 < t.|\eta| \\ b(t,\xi) < \lambda \end{cases}$$

On a alors :

PROPOSITION. 4.13. - <u>Pour</u> R <u>et</u> ρ <u>assez grands les fonctions</u> $N(\lambda, V(X),\ b, L^2(X))$ <u>et</u> $(2\pi)^{-n}\, h^{(n-1)}\, \Psi_{R,\rho}(\lambda)$ <u>sont équivalentes au sens suivant</u> :

$$N_f^{\pm}(V(X),\ b,\ L^2(X)) = \frac{h^{n-1}}{(2\pi)^n} \cdot \lim \begin{matrix}\sup \\ \inf\end{matrix}\ \Psi_{R,\rho}(\lambda) / f(\lambda)$$

<u>pour toute fonction</u> f <u>de</u> $\mathcal{F}$ <u>vérifiant</u> :

$$\lambda^{(n-1)2s} = O(f(\lambda)) \qquad \text{si } r_k > 0$$
$$\lambda^{(n-1)2s}\,\mathrm{Log}\lambda = O(f(\lambda)) \qquad \text{si } r_k = 0$$

Démonstration : Soient μ_o et R_o les constantes du lemme 4.8 i).
Fixons $\rho > 1/\mu_o$ et $R > R_o$, de sorte que pour $|\eta| > (\rho\lambda)^{1/2s} > R$ on ait :

$$N(\lambda, V(0,T), b_\eta) = 0.$$

On choisit maintenant $\rho_1 > \mathrm{Sup}\,(2\rho, \rho_o)$ et on déduit du lemme 4.12 :

$$(4.29) \quad \begin{cases} \Phi_R(\lambda) \leq \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{R<|\eta|<(\rho\lambda)^{1/2s}} \Psi_{\rho_1}(\lambda(1+L\varepsilon),\eta)d\eta + O(\chi_1(\lambda) + \chi_2(\lambda)). \\ \Phi_R(\lambda) \geq \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{R<|\eta|<(\rho\lambda)^{1/2s}} \Psi_{\rho_1} \lambda(1-L\varepsilon),\eta)d\eta + O(\chi_2(\lambda)) \end{cases}$$

avec

$$\chi_1(\lambda) = \int_{R<|\eta|<(\rho\lambda)^{1/2s}} [1 + (\lambda|\eta|^{-2s})^{1/2k}]\, d\eta$$

et

$$\chi_2(\lambda) = \int_{R<|\eta|<(\rho\lambda)^{1/2s}} [1 + \mathrm{Log}\,\theta_{\rho_1}(\lambda,\eta)]\, d\eta .$$

On a les estimations :

$$\begin{cases} \chi_1(\lambda) = O(\lambda^{(n-1)/2s}) & \text{en général} \\ \chi_1(\lambda) = O(\lambda^{(n-1)/2s})\,\mathrm{Log}\lambda) & \text{si } n = 2 \text{ et } r_k = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \chi_2(\lambda) = O(\lambda^{(n-1)/2s}) & \text{si } r_k > 0. \\ \chi_2(\lambda) = O(\lambda^{(n-1)/2s}\,\mathrm{Log}\lambda) & \text{si } r_k = 0 \end{cases}$$

On déduit alors de 4.29 que $N(\lambda,V(X),b)$ est équivalente au sens indiqué dans la proposition 4.13 à la fonction $(2\pi)^{-n}.\ h^{(n-1)}.\displaystyle\int_{A_{R,\rho,\rho_1}(\lambda)} dt.d\xi$.

avec :

$$A_{R,\rho,\rho_1}(\lambda) = \{(t,\xi) \in A_{R,\rho}(\lambda) \ / \ t|\eta| < \theta_{\rho_1}(\lambda,\eta)\}$$

Remarquons alors que pour $(t,\xi) \in A_{R,\rho}(\lambda)$ on a $1 < t|\eta| < t(\rho\lambda)^{1/2s}$

et d'après la proposition 4.3 ii)

$$(4.30) \quad C_2[t^{2r_k}|\xi|^{2k} + t^{2r_m}|\xi|^{2m}] \leq \lambda\,(1 + \rho\lambda_1).$$

d'où :

$$t^{2r_k}|\eta|^{2k} \leq \lambda\,(1 + \rho\lambda_1)/C_2$$

et finalement :

$t|\eta| < \theta_{\rho'}(\lambda,\eta)$ si $\rho' > (1+\rho\lambda_1)/C_2$.

On voit donc que $A_{R,\rho,\rho_1}(\lambda) = A_{R,\rho}(\lambda)$ si ρ_1 est choisi assez grand devant ρ et ceci achève la démonstration de la proposition.

IV. - 5. Il nous reste maintenant à étudier le comportement asymptotique des fonctions $\Psi_{R,\rho}(\lambda)$ et on démontrera le

THÉORÈME 4.14. - Soit b une forme (4.1) vérifiant (4.7). Avec les notations (4.8). on a :

i) si $\frac{r_k}{k} < \frac{1}{n} < \frac{r_m}{m}$ alors :

$$N(\lambda,V(X),b) \sim .\lambda^{(n\delta-1)/2\sigma} \left\{ \frac{h^{n-1}}{(2\pi)^n} \int_0^\infty dt. \int_{b^1(t,\xi)<1} d\xi. \right\}$$

ii) si $\frac{r_m}{m} < \frac{1}{n}$

$$N(\lambda,V(X),b) \sim \lambda^{n/2m} \left\{ \frac{h^{n-1}}{(2\pi)^n} \int_0^T dt. \int_{b'^m(\xi)<t^{-2r_m}} d\xi. \right\}$$

iii) si $\frac{r_k}{k} = \frac{1}{n} < \frac{r_m}{m}$

$$N(\lambda,V(X),b) \sim \lambda^{n/2k} \operatorname{Log}\lambda \left\{ \frac{h^{n-1}}{(2\pi)^n} \left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{2\sigma}\right) \int_{b'^k(\xi)<1} d\xi \right\}$$

iV) si $\frac{r_k}{k} < \frac{1}{n} = \frac{r_m}{m}$

$$N(\lambda,V(X),b) \sim \lambda^{n/2m} \operatorname{Log}\lambda \left\{ \frac{h^{n-1}}{(2\pi)^n} \frac{1}{2\sigma} \int_{b'^m(\xi)<1} d\xi \right\}$$

V) si $\frac{r_k}{k} = \frac{1}{n} = \frac{r_m}{m}$ (et alors $k = m$).

$$N(\lambda,V(X),b) \sim \lambda^{n/2m} \operatorname{Log}\lambda. \left\{ \frac{h^{n-1}}{(2\pi)^n} . \frac{1}{2s} \int_{b'^m(\xi)<1} \right\} d\xi$$

Démonstration. -

i) Par le changement de variables $(t,\xi) \longrightarrow (t\lambda^{1/2\sigma}.\ \xi.\lambda^{-\delta/2\sigma})$ on obtient :

$$\Psi_{R,\rho}(\lambda) = \lambda^{(n\delta-1)/2\sigma} \int_{A'_{R,\rho}(\lambda)} dt\, d\xi\ ,$$

où $A'_{R,\rho}(\lambda)$ est l'ensemble des $(t,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\begin{cases} R.\lambda^{-\delta/2\sigma} < |\eta| < \rho^{1/2s}\ \lambda^{1/2s-\delta/2\sigma} \\ \lambda^{-(\delta-1)/2\sigma} < t|\eta| \quad ; \quad t < T\ \lambda^{1/2\sigma} \\ b_\lambda(t,\xi) < 1 \end{cases}$$

où l'on a posé :

$$b_\lambda(t,\xi) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|\leq m}} b_{\alpha\beta}\cdot \lambda^{-\sigma_{|\alpha|}-\sigma_{|\beta|}} \; t^{r_{|\alpha|}+r_{|\beta|}} \; \xi^{\alpha+\beta}$$

avec $\sigma_p = (\sigma + r_p - \delta.p)/2\sigma$ $\quad (p = 0,\ldots m)$.

On a donc : $b_\lambda(t,\xi) \longrightarrow b^1(t,\xi) \quad (\lambda \to +\infty)$.

D'autre part par (4.30) on a :

$$A'_{R,\rho}(\lambda) \subset \{(t,\xi) \quad / \quad t^{2r_k}|\xi|^{2k} + t^{2r_m}|\xi|^{2m} \leq C^{te}\}$$

et l'hypothèse $\frac{r_k}{k} < \frac{1}{n} < \frac{r_m}{m}$ implique que ce dernier ensemble est de mesure finie dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$. On peut donc appliquer le théorème de la convergence dominée. Si $r_k > 0$ on a $\frac{1}{2s} - \delta/2\sigma > 0$ et alors :

$$(4.31) \quad \int_{A'_{R,\rho}(\lambda)} dt.d\xi \underset{\lambda\to+\infty}{\longmapsto} \int_{b^1(t,\xi)<1} dt.d\xi$$

Si $r_k = 0$, $\frac{1}{2s} - \delta/2\sigma = 0$ et :

$$(4.32) \quad \int_{A'_{R,\rho}(\lambda)} dt.d\xi \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\substack{b^1(t,\xi)<1\\|\eta|<\rho^{2s}}} dt.d\xi$$

Remarquons alors que par la proposition (4.3) $b^1(t,\xi) < 1$. implique $|\eta|<|\xi|<C^{te}$ et donc si ρ est assez grand (4.32) est la même chose que (4.31).

Il reste à vérifier, pour appliquer la proposition 12, que $(n-1)/2s < (n\delta-1)2\sigma$; or cette inégalité équivaut à $nr_k < k$.

ii) On procède comme dans i) avec le changement de variable $(t,\xi) \to (t,\xi.\lambda^{-1/2m})$. On vérifie aussi que $(n-1)/2s < n/2m$ ce qui est impliqué par :

$$n(m-s) \leq nr_m < m$$

iii) Soit $\varepsilon > 0$. On a les majorations :

$$(4.33) \quad \int_{A_{R,\rho}(\lambda)\cap[|\xi|t^\delta > \varepsilon]} dt.d\xi = 0\,(\lambda^{n/2k}).$$

$$(4.34) \quad \int_{A_{R,\rho}(\lambda)\cap[t|\xi|<1/\varepsilon]} dt.d\xi = 0\,(\lambda^{n/2k}).$$

On utilise en effet (4.30) pour majorer les intégrales par :

$$\int_{\substack{\varepsilon<|\xi|t^\delta\\(t^\delta|\xi|)^{2m}<C^{te}.t^{2\sigma}\lambda}} dt\, d\xi \qquad \text{et} \qquad \int_{\substack{(t|\xi|)^{2k}\leq C^{te}\lambda\, t^{2s}\\1\leq t|\xi|<1/\varepsilon}} dt\, d\xi,$$

On remarque maintenant que pour $(\varepsilon t)^{-1} < |\xi| < \varepsilon t^{-\delta}$ on a :

$$t^{r_p}|\xi|^p < \varepsilon^{|p-k|}\, t^{r_k}|\xi|^k$$

et en utilisant la proposition 4.3 on en déduit :

$$(b(t,\xi) - t^{2r_k}\, b'^k(\xi))| \leq L\,\varepsilon\, t^{2r_k}\, b'^k(\xi)$$

avec une certaine constante L ne dépendant que des $b_{\alpha\beta}$ et de la suite r_p.

Notons $B_\varepsilon(\lambda)$ l'ensemble des $(t,\xi) \in]0,T[\times \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\begin{cases} R < |\eta| < (\rho^\lambda)^{1/2s} \\ 1 < t\,|\eta| \\ t|\xi| > 1/\varepsilon \quad t^\delta|\xi| < \varepsilon \\ t^{2r_k}\, b'^k(\xi) < \lambda \end{cases}$$

et on pose $\theta_\varepsilon(\lambda) = \int_{B_\varepsilon(\lambda)} dt.d\xi.$

Il résulte alors de (4.33) et (4.34) que :

$$(4.35)\quad \begin{cases} \Psi_{R,\rho}(\lambda) \leq \theta_\varepsilon\, (\lambda(1+L\varepsilon)) + O(\lambda^{n/2k}) \\ \\ \Psi_{R,\rho}(\lambda) \geq \theta_\varepsilon\, (\lambda(1-L\varepsilon)) + O(\lambda^{n/2k}) \end{cases}$$

On évalue $\theta_\varepsilon(\lambda)$ par le changement de variable $(t,\xi) \longrightarrow (t, \lambda^{-1/2k}\, t^{r_k/k}.\xi)$, et on obtient en tenant compte de ce que $nr_k = k$:

$$\theta_\varepsilon(\lambda) = \lambda^{n/2k} \int_{b'^k(\xi)<1} d\xi. \int_{B_\varepsilon(\lambda,\xi)} t^{-1}dt$$

où $B_\varepsilon(\lambda,\xi)$ est l'ensemble des $t \in]0,T[$ vérifiant :

$$\begin{cases} R^{2k}\, t^{2r} \leq |\eta|^{2k}\,\lambda \quad ; \quad t^{2r} > \rho^{-k/s}|\eta|^{2k}\,\lambda^{-r/s} \\ t^{2s}\, |\eta|^{2k}.\lambda \geq 1 \\ t^{2s}|\xi|^{2k}.\lambda \geq \varepsilon^{-2k} \quad ; \quad t^{2\sigma}|\xi|^{2k}\,\lambda < \varepsilon^{2k}. \end{cases}$$

On obtient alors que :

$$(4.36)\begin{cases} \int_{B_\varepsilon(\lambda,\xi)} t^{-1}\, dt \sim (\frac{1}{2s} - \frac{1}{2\sigma})\, \mathrm{Log}\, \lambda\, . \\ \text{et} \\ \int_{B_\varepsilon(\lambda,\xi)} t^{-1}\, dt \leq (\frac{1}{2s} - \frac{1}{2\sigma})\mathrm{Log}\, \lambda + O[\,|\mathrm{Log}|\xi||+1] \end{cases}$$

Par la proposition (4.3) l'ensemble des ξ vérifiant $b'^k(\xi) < 1$ est borné et on déduit de (4.36) par le théorème de la convergence dominée que :

$$\theta_\varepsilon(\lambda) \sim \lambda^{n/2k}\, \mathrm{Log}\, \lambda\, (\frac{1}{2s} - \frac{1}{2\sigma})\, .$$

On obtient alors iii) en reportant cette estimation dans (4.35), en passant à la limite en λ puis en ε, et en remarquant, pour appliquer la proposition 4.13, que $(n-1)/2s = n/2k$ mais que $r_k = k/n > 0$.

iV) On procède comme pour iii). En utilisant (4.30) on prouve que :

$$(4.37)\quad \int_{A_{R,\rho}(\lambda)\cap[|\xi| < 1/_\varepsilon\ t^{-\delta}]} dt.\, d\xi \quad = \; 0\,(\lambda^{n/2m})$$

Pour $t^\delta|\xi| > 1/_\varepsilon$ on a de même

$$|b(t,\xi) - t^{2r_m}\, b'^m(\xi)| < L.\varepsilon.t^{2r_m}\, b'^m(\xi).$$

On se ramène alors à étudier les fonctions :

$$\theta_\varepsilon(\lambda) \;=\; \int_{B_\varepsilon(\lambda)} dt.d\xi.$$

où $B_\varepsilon(\lambda)$ est l'ensemble des $(t,\xi)\in]0,T[\times \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\begin{cases} R < |\eta| < (\rho\lambda)^{1/2s} \\ 1 < t\ |\eta| \quad , \ t^\delta|\xi| \geq 1/\varepsilon \\ t^{2r_m}\, b'^m(\xi) < \lambda\ . \end{cases}$$

On conclut alors par le changement de variables $(t,\xi) \to (t,\lambda^{-1/2m}.\,t^{r_m/m}.\xi)$

$\ddot{V}$) On reprend la démonstration de IV) mais en utilisant (4.34) à la place de (4.37)

V. ÉTUDE SUR Ω.

V.1 Notations. On se donne comme au I l'ouvert Ω de frontière Γ, la fonction φ, la suite r_p définie en (1,2) et l'espace $W(\Omega)$ associé. On choisit comme espace variationnel l'un des deux espaces $W(\Omega)$ ou $\overset{\circ}{W}(\Omega)$; on le note $V(\Omega)$ et on convient comme au IV de noter V, en général, le symbole W ou $\overset{\circ}{W}$ choisi.

Soit a une forme hermitienne (1.3); on note $a^m(x,\xi)$ la fonction définie sur $T^*\,\Omega$ par :

$$a^m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x).\,\varphi(x)^{r_{|\alpha|}+r_{|\beta|}}\ \xi^{\alpha+\beta}$$

Nous allons introduire maintenant quelques notations. Précisons d'abord que pour $x\in\Gamma$, $T^*_x\ \Gamma$ est plongé dans $T^*_x\ \mathbb{R}^n$ en identifiant $T^*_x\Gamma$ aux covecteurs de $\mathbb{R}^n$ nuls sur la normale en x à Γ, ou ce qui revient de même, en idenfiant les espaces euclidiens à leur dual. On définit donc pour $(x,\xi)\in T^*\ \Gamma$ les formes à une variable.

$$a_{x,\xi}(u,v) = \int_0 \sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\ |\beta|\leq m}} a_{\alpha\beta}(x\ .t^{r_{|\alpha|}+r_{|\beta|}}(\xi+d\varphi(x)D_t)^\alpha u(t).\ \overline{(\xi+\ d\varphi(x)D_t)^\beta v(t)}\ dt.$$

$$a^{0}_{x,\xi}(u,v) = \int_0^\infty \sum_{\substack{\ell\leq|\alpha|\leq k\\ \ell\leq|\beta|\leq k}} a_{\alpha\beta}(x).\ t^{r_{|\alpha|}+r_{|\beta|}}\ (\xi+d\varphi(x)D_t)^{\alpha} u\ (t).\ \overline{(\xi + d\varphi(x)D_t.)^{\beta} v}.dt\ .$$

On note $\tilde{\Omega} = \Gamma \times \mathbb{R}_+$, $\tilde{x} = (x,t)$ la variable de $\tilde{\Omega}$, $\tilde{\xi} = (\xi,\tau)$ la variable duale dans $T_x\ \Gamma \times \mathbb{R}_+$.

On définit alors :

$$a^{1}(\tilde{x},\tilde{\xi}) = \sum_{\substack{k\leq|\alpha|\leq m\\ k\leq|\beta|\leq m}} a_{\alpha\beta}(x)\ t^{r_{|\alpha|}+r_{|\beta|}}\ (\xi + \tau\, d\varphi(x))^{\alpha+\beta}$$

$$a'^{k}(x,\tilde{\xi}) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} a_{\alpha\beta}(x).\ (\xi+\tau\ d\varphi(x))^{\alpha+\beta}$$

$$a'^{m}(x,\tilde{\xi}) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x).\ (\xi+\tau\ d\varphi(x))^{\alpha+\beta}$$

V.2. <u>Les résultats</u>. Nous pouvons maintenant énoncer :

THÉORÈME 5.1. - <u>Soit</u> a <u>une forme hermitienne</u> (1.3). <u>Pour que</u> a <u>soit coercitive sur</u> $V(\Omega)$, <u>il faut et il suffit que</u> :

i) a <u>soit elliptique</u> i.e : $\forall (x,\xi)\in T^{*}\Omega .\ a^{m}(x,\xi) > 0$

ii) <u>Il existe</u> $T>0$, $c_0 > 0$ <u>et</u> λ_0 <u>tels que</u> :

$\forall (x,\xi)\in T^{*}\Gamma, \forall u \in V(0,T)$:

$$a_{x,\xi}(u,u) \geq c_0 \|u\|^2_{W_{|\xi|}(0,T)} - \lambda_0 \|u\|^2_{L^2(0,T)}$$

THÉORÈME 5.2. - <u>Soit</u> a <u>une forme hermitienne</u> (1.3) <u>coercitive sur</u> $V(\Omega)$. <u>Alors</u> :

i) <u>Il existe</u> $c_1 > 0$ <u>telle que</u> :

$\forall (x,\xi) \in T^{*}\Gamma\backslash 0,\ \forall u \in V^{k}_{r_k}(\mathbb{R}_+)$.

$$a^{0}_{x,\xi}(u,u) \geq c_1 \|u\|^2_{W^{k}_{r_k,|\xi|}(\mathbb{R}_+)}$$

ii) <u>Il existe</u> $c_2 > 0$ <u>telle que pour</u> $(\tilde{x},\tilde{\xi})\in T^{*}\tilde{\Omega}$ <u>avec</u> $\tilde{x} = (x,t)$, <u>on ait</u> :

$$a^{1}(\tilde{x},\tilde{\xi}) \geq c_1\ [\, t^{2r_k}|\tilde{\xi}|^{2k} + t^{2r_m}|\tilde{\xi}|^{2m}\,]$$

$$a'^{k}(x,\tilde{\xi}) \geq c_1 |\tilde{\xi}|^{2k}$$

$$a'^{m}(x,\tilde{\xi}) \geq c_1 |\tilde{\xi}|^{2m} .$$

THÉORÈME 5.3. - <u>Soit</u> a <u>une forme</u> (1.3) <u>coercitive sur</u> $V(\Omega)$: <u>On a en notant</u>

$N(\lambda) = N(\lambda, V(\Omega), a, L^2(\Omega))$:

1. Si $\frac{r_k}{k} > 1/n$ alors :

$$N(\lambda) \sim \{(2\pi)^{1-n}\int_{T^*\Gamma} N(1, V^k_{r_k}(\mathbb{R}_+),\ a^o_{x,\xi}, L^2(\mathbb{R}_+))dx\, d\xi.\}\ \lambda^{(n-1)/2s}$$

2. Si $\frac{r_k}{k} < \frac{1}{n} < \frac{r_m}{m}$ alors

$$N(\lambda) \sim \{(2\pi)^{-n} \int_{a^1(\tilde{x},\tilde{\xi})<1} d\tilde{x}\, d\tilde{\xi}\ \}\ \lambda^{(n\delta-1)/2\sigma}$$

3. Si $\frac{r_m}{m} < \frac{1}{n}$

$$N(\lambda) \sim \{(2\pi)^{-n} \int_{a^m(x,\xi)<1} dx\, d\xi\ \}\ \lambda^{n/2m}.$$

4. Si $\frac{r_k}{k} = \frac{1}{n} < \frac{r_m}{m}$

$$N(\lambda) \sim \{(2\pi)^{-n}\left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{2\sigma}\right) \int_{a'^k(x,\tilde{\xi})<1} dx\, d\tilde{\xi}\ \}\ \lambda^{n/2k}\ \mathrm{Log}\ \lambda.$$

5. Si $\frac{r_k}{k} < \frac{1}{n} = \frac{r_m}{m}$

$$N(\lambda) \sim \{(2\pi)^{-n}\frac{1}{2\sigma} \int_{a'\ (x,\tilde{\xi})<1} dx\, d\tilde{\xi}\ \}\ \lambda^{n/2m}\ \mathrm{Log}\ \lambda.$$

6. Si $k = m$ et $\frac{r_m}{m} = 1/n$

$$N(\lambda) \sim \{(2\pi)^{-n}\cdot\frac{1}{2s} \int_{a'^m(x,\tilde{\xi})<1} dx\, d\tilde{\xi}\ \}\ \lambda^{n/2m}\ \mathrm{Log}\,\lambda$$

Remarque 1. Toutes les intégrales écrites sont finies grâce au théorème 5.2. et pour la première , grâce aussi à la proposition 3.4.

Remarque 2. D'après (1.2) la suite $\frac{r_p}{p}$ est strictement croissante pour $p \geq \ell$; on a donc envisagé tous les cas possibles.

Nous entreprenons simultanément la démonstration des trois théorèmes, le but étant après un certain nombre d'étapes intermédiaires de se ramener aux cas examinés en IV.

Une condition nécessaire, que nous supposerons désormais satisfaite, de coercitivité de a est l'ellipticité qui équivaut à la coercitivité de a sur les espaces $H^m_o(\Omega_o)$, Ω_o ouvert tel que $\overline{\Omega}_o \subset \Omega$ (cf p.exple [1])

V.3. Localisation. On notera pour 0 ouvert l'inclus dans Ω :

$$V(0) = \{u \in V(\Omega)\ /\ \mathrm{supp}\ u \subset \overline{0}\ \}.$$

LEMME 5.4. Soit a une forme (1.3) elliptique. Alors a est coercitive sur $V(\Omega)$, si et seulement si pour tout x de Γ il existe un voisinage 0_x de x tel que a soit coercitive sur $(\Omega \cap O_x)$

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Prouvons qu'elle est suffisante.

Soit $O_i (i = 1,\ldots\nu)$ un recouvrement de Γ tel que a soit coercitive sur $V(\Omega \cap O_i)$. Soit $O_o \subset \bar{O}_o \subset \Omega$: tel que $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=o}^{\nu} O_i)$; a est coercitive sur $V(O_o) = H_o^m(O_o)$.

Soient $\zeta_i \in \mathcal{D}(O_i)$ pour $i = 0,\ldots\nu$, telles que $\sum_{i=o}^{\nu} \zeta_i^2 = 1$ sur Ω.

On a alors :

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=o}^{\nu} \|\zeta_i u\|^2_{L^2(\Omega \cap O_i)}$$

(5.1)

$$a(u,u) = \sum_{i=o}^{\nu} a(\zeta_i u, {}_i u) + R(u,u)$$

avec

(5.2) $$| R(u,u) | \leq C^{te} \sum_{\substack{o<p<m \\ o<q<m}} \|u\|_{W^{p-1}_{r_p}(\Omega)} \cdot \|u\|_{W^q_{r_q}(\Omega)} .$$

Donc d'après la proposition 3.1 , pour tout ε il existe C_ε telle que :

$$\forall u \in V(\Omega) \qquad |R(u,u)| \leq \varepsilon\|u\|^2_{W(\Omega)} + C_\varepsilon \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Le lemme en résulte en remarquant que pour u dans $V(\Omega)$, $\zeta_i u$ est dans $V(\Omega \cap O_i)$ et que :

$$\|u\|^2_{W(\Omega)} \leq C^{te} \sum_{i=o}^{\nu} \|\zeta_i u\|^2_{W(\Omega)} .$$

Nous avons de même :

PROPOSITION 5.5. <u>Soit</u> a <u>une forme</u> (1.3) <u>coercitive sur</u> $V(\Omega)$. <u>Alors pour tout recouvrement de</u> $\bar{\Omega}$ <u>par des ouverts</u> O_i $(i = 0,\ldots\nu)$ <u>et pour toute fonction</u> f <u>de</u> $\mathcal{F}$, <u>on a</u> :

$$N_f^+(V(\Omega),a) \leq \sum_{i=\nu}^{\nu} N_f^+(V(\Omega \cap O_i), a)$$

Démonstration. Soient $\zeta_i \in \mathcal{D}(O_i)$ $(i = 0,\ldots\nu)$ telles que $\sum_{i=o}^{\nu} \zeta_i^2 = 1$ sur Ω. On considère l'isométrie $\mathcal{J}$ de $L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=o}^{\nu} L^2(\Omega \cap O_i)$, qui envoie $V(\Omega)$ dans $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=o}^{\nu} V(\Omega \cap O_i)$, définie par :

$$u = \bigoplus_{i=o}^{\nu} \zeta_i u.$$

On définit sur $\mathcal{V}$ la forme $\tilde{a}$ par :

$$\tilde{a}(\oplus u_i, \oplus v_i) = \sum_{i=o}^{\nu} a(u_i, v_i)$$

puis sur $V(\Omega)$ la forme $a_1(u,v) = \tilde{a}(\mathcal{J}u, \mathcal{J}v)$.

On a alors :

$$N(\lambda, V(\Omega), a_1) = N(\lambda, \mathcal{J}(V(\Omega)), \tilde{a}, \mathcal{H}) \leq N(\lambda, \mathcal{V}, \tilde{a}, \mathcal{H})$$

et

$$N(\lambda, \mathcal{V}, \tilde{a}, \mathcal{H}) = \sum_{i=0}^{\nu} N(\lambda, V(\Omega \cap O_i), a, L^2(\Omega \cap O_i)).$$

Mais (5.1) et (5.2) sont encore valables, et on conclut en appliquant la proposition 2.1 qui prouve que :

$$N_f^+(V(\Omega), a_1) = N_f^+(V(\Omega), a).$$

Inversement on a :

PROPOSITION 5.6. <u>Soit</u> a <u>une forme</u> (1.3) <u>coercitive sur</u> $V(\Omega)$. <u>Alors si les</u> Ω_i $(i = 0, \ldots, \nu)$ <u>sont des ouverts disjoints inclus dans</u> Ω, <u>on a pour toute fonction</u> f <u>de</u> $\mathcal{F}$

$$N_f^-(V(\Omega), a) \geq \sum_{i=0}^{\nu} N_f^-(V(\Omega_i), a).$$

<u>Démonstration</u>. Il suffit de remarquer que $\bigoplus_{i=0}^{\nu} V(\Omega_i) \subset V(\Omega)$.

Nous allons maintenant transformer le problème par carte locale. Pour cela on notera, pour $x \in \Gamma$, ν_x le vecteur normal à Γ en x tel que :

(5.3) $\qquad < d\varphi(x), \nu_x > = 1.$

Soit χ un C^∞-difféomorphisme jusqu'au bord d'un ouvert U' de $\mathbb{R}^{n-1}$ sur un ouvert O' de Γ. On définit pour T_0 assez petit, un difféomorphisme θ de $U' \times]-T_0, T_0[$ sur un ouvert O de $\mathbb{R}^n$, et de $U = U' \times]0, T_0[$ sur $O \cap \Omega$, par :

$$\theta(y,t) = \chi(y) + t\, \upsilon_{\chi(y)}$$

On déduit de (5.3) que :

(5.4) $\qquad \varphi \circ \theta(y,t) = t + O(t^2).$

On notera $\tilde{y} = (y,t)$ l'élément générique de U.

On pose $\Delta(\tilde{y}) = |\det d\theta\, (\tilde{y})|^{1/2}$.

Pour $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ avec supp $u \subset \bar{\Omega} \cap O$ on pose $v(\tilde{y}) = \Delta(\tilde{y})\, u \circ \theta(\tilde{y}) \in \mathcal{D}(\tilde{U})$ on a :

$$(D^\alpha u) \circ \theta = \Delta^{-1}. \{P_\alpha(\tilde{y}, D_{\tilde{y}})\, U\}$$

où P_α est un polynôme différentiel de partie principale :

$$P'_\alpha(\tilde{y}, \tilde{\eta}) = ({}^t d\theta(\tilde{y})^{-1}. \tilde{\eta})^\alpha$$

Avec ces notations on a :

$$(5.5) \quad \begin{cases} \|u\|^2_{L^2(\ )} = \|v\|^2_{L^2(U)} \\ a(u,u) = b(v,v) + R(v,v) \end{cases}$$

où l'on a définit la forme b par :

(5.6) $$b(v,v) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} \int_U a_{\alpha\beta} \circ \theta \, (\varphi\circ\theta)^{r|\alpha|+r|\beta|} . (P'_\alpha v). (P'_\alpha v) \, d\tilde{y}$$

et où R vérifie :

(5.7) $$| R(v,v) | \leq C^{te} \sum_{o<p\leq m} \sum_{o\leq q\leq m} \|v\|_{W^{p-1}_{r_p}(U)} \|v\|_{W^q_{r_q}(U)}$$

On déduit alors de (5.5) (5.7) et des propositions 2.1 et 3.1 :

LEMME 5.7. Pour que a soit coercitive sur $V(\Omega \cap 0)$ il faut et il suffit que b le soit sur $V(U)$; et alors pour tout ouvert $U_1 \subset U$ et toute fonction f de $\mathcal{F}$ on a :

$$N^{\pm}_f(V(U_1),b) = N^{\pm}_f (V(\theta(U_1)), a).$$

On "fige" les coefficients de b pour définir pour $y_0 \in U'$ les formes du type (4.1) suivantes :

(5.8) $$b_{y_0}(v,v) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} a_{\alpha\beta}\circ \theta(y_0) . \int_U t^{r|\alpha|+r|\beta|} P'_\alpha(y_0, D_{\tilde{y}}) v. \overline{P'_\beta (y_0, D_{\tilde{y}}) v.} \, d\tilde{y}$$

On déduit de la continuité des $a_{\alpha\beta}$ et de (5.4) que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h > 0$, tel que pour tout y_0 de U' et tout ouvert $U_1 = U'_1 \times]0,T[\subset U$ pour lequel $y_0 \in U'_1$ et $\mathrm{diam}(U_1) < h$, on ait :

$$\forall u \in V(U_1) \quad ; \quad |b(u,u) - b_{y_0}(u,u)| < \varepsilon \|u\|^2_{W(U)}$$

Il résulte de cette remarque les deux lemmes :

LEMME 5.9.

i) Si a est coercitive sur $V(\Omega)$ il existe des constantes $h_0 > 0$, $c_0 > 0$ et λ_0 telles que pour tout $U_1 = U'_1 \times]0,T[\subset U$ avec $\mathrm{diam}\, U_1 < h_0$ et pour tout $y_0 \in U'_1$ on ait :

$$\forall u \in V(U_1) \qquad b_{y_0}(u,u) \geq c_0 \|u\|^2_{W(U)} - \lambda_0 \|u\|^2_{L^2(U)} .$$

ii) Si pour $y_0 \in U'$, la forme b_{y_0} est coercitive sur un espace $V(U_1)$ avec $U_1 = U'_1 \times]0,T[$ et $y_0 \in U'_1$, il existe un voisinage 0_1 de $\chi(y_0)$ tel que a soit coercitive sur $V(\Omega \cap 0_1)$.

LEMME 5.10. Si a est coercitive sur $V(\Omega)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel que pour tout $U_1 = U'_1 \times]0,T[\subset U$ avec $\mathrm{diam}\, U_1 < h$ et pour tout $y_0 \in U'_1$, on ait pour toute fonction f de $\mathcal{F}$:

$$N_f^+(V(\theta(U_1)),\ a) \ \leq\ f^*(1+\varepsilon)\ N_f^+(V(U_1),\ b_{y_0})$$
$$N_f^-(V(\theta(U_1)),a) \ \geq\ f^*(1-\varepsilon)\ N_f(V(U_1),\ b_{y_0})$$

b_{y_0} étant une forme du type (4.1) on lui associe par (4.2) les formes b_{y_0} et $b^o_{y_0,\eta}$ pour $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$ et par (4.8) les fonctions $b^1_{y_0}$, $b'^k_{y_0}$ et $b'^m_{y_0}$.

Notant $x_0 = \chi(y_0)$, $\tilde{x} = (x_0,t) \in \tilde{\Omega}$, et pour $\tilde{\eta} = (\eta,\tau) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, $\xi = ({}^t d\chi(y_0))^{-1}.\eta \in T^*_{x_0}\Gamma$ et $\tilde{\xi} = (\xi,\tau) \in T^*_{\tilde{x}}\tilde{\Omega}$ on a avec les notations du § V-1 :

$$(5.9)\qquad \begin{cases} b_{y_0,\eta} = a_{x_0,\xi} \ ; \ b^o_{y_0,\eta} = a^o_{x_0},\ \xi \\ b^1_{y_0}(t,\tilde{\eta}) = a^1(\tilde{x},\tilde{\xi}) \\ b'^k_{y_0}(\tilde{\eta}) = a'^k(x_0,\tilde{\xi}) \\ b'^m_{y_0}(\tilde{\eta}) = a'^m(x_0,\tilde{\xi}) \end{cases}$$

Compte tenu des lemmes 5.4 et 5.9 les théorèmes 5.1 et 5.2 résultent alors des propositions 4.2, 4.3 et 4.6.

V.4. <u>Démonstration du théorème 5.3</u>.

Oubliant un instant notre problème sur Ω, on énonce :

PROPOSITION.5.11. Soit $J' = (]0,h[)^{n-1}$ pavé de $\mathbb{R}^{n-1}$ qu'on identifie à un ouvert du tore $X' = \mathbb{R}^{n-1}/_{h.\mathbb{Z}^{n-1}}$; Soient $J = J' \times]0,T[$ et $X = X' \times]0,T[$; soit enfin b une forme (4.1) vérifiant (4.7). Alors pour $f \in \mathcal{F}$ on a :

$$N_f^{\pm}(V(J),b) \ = \ N_f^{\pm}(V(X),b)$$

où $N_f^{\pm}(V(X),b)$ est donné par les théorèmes 4.9 et 4.14.

<u>Démonstration</u>. Notons f_0 la fonction λ^ω où λ^ω Log λ telle que

$$N(\lambda,V(X),b) \sim \text{Cte}.f_0(\lambda).$$

On déduit de l'inclusion $V(J) \subset V(X)$ que

$$N^{\pm}_{f_0}(V(J),\ b) \leq N^{\pm}_{f_0}(V(X),b)$$

et de manière générale que, si J'_1 est un pavé de $\mathbb{R}^{n-1}$ de côté h_1, on a :

$$(5.10)\qquad N^{\pm}_{f_0}(V(J'_1 \times]0,T[)) \leq C^{te}.\ h_1^{n-1}.$$

Remarquons alors que la proposition 5.5 reste vraie si on y remplace Ω par X et a par b; la démonstration étant dans ce cas parfaitement identique.
On recouvre alors X'/J' par des pavés dont la somme des mesures est arbitrairement petite, et on conclut par (5.10) que $N_{f_0}^{+}(V(X),b) - N^{+}_{f_0}(V(J).b)$ est arbitrairement petit, donc nul.

Revenons a notre problème sur Ω, pour démontrer le théorème 5.3 d'abord dans le cas où ${}^{r}m/_{m} \geq {}^{1}/n$

Notons f_0 la fonction λ^{ω} ou $\lambda^{\omega}\text{Log}\lambda$ à laquelle on veut comparer $N(\lambda,V(\Omega),a)$, et mettons la formule à démontrer sous la forme :

$$N^{+}_{f_0}(V(\Omega),a) = N^{-}_{f_0}(V(\Omega),a) = \int_{T^{*}\Gamma} c(x,\xi).dx\, d\xi$$

Remarquons tout d'abord que pour $0_0 \subset \overline{0_0} \subset \Omega$ on a (cf [2], [7])

$$N(\lambda,H^{m}_{0}(0_0),a) = O(\lambda^{n/2m})$$

et

$$N^{\pm}_{f_0}(V(0_0),\ a) = 0. \tag{5.11}$$

On considère des difféomorphismes χ_i pour $i = 1,\ldots\nu$, d'ouverts U'_i de $\mathbb{R}^{n-1}$ sur des ouverts $0'_i$ de Γ, recouvrant Γ. On définit comme plus haut les θ_i difféomorphismes de $U'_i \times]-T_0,T_0[$ sur 0_i et de $U_i = U'_i \times]0,T_0[$ sur $\Omega \cap 0_i$.
On considérera aussi des ouverts $U''_i \subset \overline{U''_i} \subset U'_i$ tels que les $\chi_i(U''_i)$ recouvrent Γ.

Soit $\varepsilon > 0$. Soient h_i $(i = 1,\ldots\ \nu)$ les réels dont l'existence est assurée par le lemme 5.10. Soit enfin $T < {}^{1}/_{2} \operatorname{Inf}_{i} h_i$.

Si J' est un pavé de côté $< {}^{h_i}/_{2}$ inclus dans U'_i, on note

$J = J' \times]0,T[$, $\Sigma = \theta(J)$ et $\Delta = \chi(J')$. On déduit du lemme 5.10 que pour tout y_0 de J' on a :

$$\left\{\begin{array}{l} N^{+}_{f_0}(V(\Sigma),\ a) \leq f^{*}_{0}(1+\varepsilon)\ N^{+}_{f}(V(J),\ b_{y_0}) \\ N^{-}_{f_0}(V(\Sigma),\ a) \geq f^{*}_{0}(1-\varepsilon) N^{-}_{f}\ (V(J),\ b_{y_0}). \end{array}\right. \tag{5.12}$$

où b est la forme déduite de a par θ_i comme en (5.6) et b_{y_0} comme en 5.8. b_{y_0} est une forme du type (4.1) et la coercitivité de a implique b_{y_0} vérifie (4.7) (Théorème 5.1).

Il résulte de la proposition 5.11 que :

$$N^{\pm}_{f_0}(V(J),\ b_{y_0}) = \int_{T^{*}J'} d(y_0,\eta)dy\, d\eta \tag{5.13}$$

La fonction $d(y,\eta)$ étant donnée par les théorèmes 4.9 ou 4.14. Or il résulte directement de (5.9) que :

$$d(y,\eta) = c\ (\chi(y),\ \ {}^{t}d\chi(y)^{-1}.\ \eta) \tag{5.14}$$

Reportant l'estimation (5.13) dans (5.12), intégrant par rapport à y_0, et effectuant le changement de variable $(y,\eta) \longrightarrow (\chi(y)\ \ {}^{t}d\chi(y)^{-1}.\eta)$ on obtient compte tenu de (5.14) :

$$\left\{\begin{array}{l} N^{+}_{f_0}(V(\Sigma),\ a) \leq f^{*}_{0}\ (1+\varepsilon)\int_{T^{*}\Delta} c(x,\xi)dx.d\xi. \\ N^{-}_{f_0}(V(\Sigma),\ a) \geq f^{*}_{0}(1-\varepsilon) \int_{T^{*}\Delta} c(x,\xi)dx.d\xi \end{array}\right. \tag{5.15}$$

On recouvre alors les U''_i par des pavés $J'_{i,p}$ de côté $h_{i/2}$. Exhayant de $\{\chi_i(J'_{i,p})\}_{i,p}$ un sous recouvrement noté $\{\Gamma_j\}_{j\in J}$, de Γ, on déduit, par la proposition 5.5, de (5.11) et de (5.15) :

$$N^+_{f_0}(V,(\Omega), a) \leq f^*_0(1+\varepsilon). \sum_j \int_{T^*\Gamma_j} c(x,\xi)dx\, d\xi$$

et finalement :

$$(5.16) \qquad N^+_{f_0}(V(\Omega), a) \leq f^*_0(1+\varepsilon) \int_{T^*\Gamma} c(x,\xi)dx\, d\xi.$$

De même, en utilisant des partitions à la place des recouvrements, on obtient :

$$(5.17) \qquad N^-_{f_0}(V(\Omega), a) \geq f^*_0(1-\varepsilon)\int_{T^*\Gamma} c(x,\xi)\, dx\, d\xi.$$

et le théorème découle immédiatement de (5.16) et (5.17)

Il nous reste à étudier le cas $n\, r_m < m$.

On sait que pour Ω_0 assez régulier, relativement compact dans Ω on a ([2],[7])

$$N(\lambda,V(\Omega_0), a) \sim \lambda^{n/2m} \quad \{(2\pi)^{-n}\int_{\Omega_0} dx \,. \int_{a^m(x,\xi)<1} d\xi \quad \}$$

Il résulte maintenant du § V.3 et du théorème 4.14 que si ω_ε désigne l'ouvert

$$\omega_\varepsilon = \{x\in\Omega \;/\; \varphi(x) < \varepsilon\}$$

on a :

$$N(\lambda,V(\omega_\varepsilon), a)) = 0\,(\varepsilon^{1-n\, r_m/m} \,.\, \lambda^{n/2m})$$

et on conclut en appliquant la proposition 5.5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGMON. - Elliptic boundary value problems ; Van Nostrand.

[2] BEALS. - Asymptotic behaviour of the Green's function and spectral function of an elliptic operator ; J of Func. Anal. 5 (1970) p.483.

[3] BOLLEY-CAMUS. - Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids; Publications des Séminaires de Mathématiques de l'Université de Rennes (1968-69).

[4] BOUTET DE MONVEL-GRISVARD. - Le comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur; C.R.Ac.Sc t 272 (1971) p.23.

[5] COURANT-HILBERT. - Methods of Mathematical Physics ; New York Interscience.

[6] EL KOLLI. - n-ième épaisseur dans les espaces de Sobolev avec poids; C.R.Ac.Sc. 272 (1971) p.537.

[7] FLECKINGER-METIVIER. - Théorie spectrale des opérateurs uniformément elliptiques sur quelques ouverts irréguliers ; C.R.Ac.Sc. t 276 (1973) p.913.

[8] GEYMONAT-GRISVARD - Problemi ai limiti lineari ellitici negli spazi di Sobolev con peso ; Le Mathematische vol XXII, Fasc.2 (1967).

[9] GUILLEMOT-TESSIER. - Propriétés spectrales de certains opérateurs elliptiques dégénérés ; C.R.Ac.Sc. t 278 (1974) p.137.

[10] KATO. - Perturbation Theory for linear operators ; Springer Verlaq (1966).

[11] KOLMOGOROV. - Uber die beste Annäherunq von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse. Ann of Math 37 (1936) p.107

[12] LORENTZ. - Approximation of functions; Holt and Rinehart and Winston.

[13] NEČAS. - Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique voisine de la variationnelle ; Ann Scuola Norm. Sup Pisa. 16 (1962) p 305.

[14] NORDIN. - The asymptotic distribution of the eigenvalues of a degenerate elliptic operator ; Arkiv für Mat 10 (1972) p.9.

[15] PHAM THE LAÏ. - Comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés non nécessairement autoadjoints ;

[16] PHAM THE LAÏ. - Noyaux d'Agmon, Séminaire Jean Leray; Collège de France (1973).

[17] SOLOMJACK-VULIS. - Spectral asymptotics of degenerate elliptic operators ; Soviet Math Dokl vol. 13 (1972) p.1484.

Guy MÉTIVIER
Département de Mathématiques
Université de Nice
Parc Valrose
06034 NICE CEDEX