Journées Équations aux dérivées partielles

Alain Grigis

Hypoellipticité et paramétrix pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles

Journées Équations aux dérivées partielles (1975), p. 183-205

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1975____183_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 34-35 (1976) p.183-205

HYPOELLIPTICITÉ ET PARAMÉTRIX POUR DES OPÉRATEURS PSEUDODIFFÉRENTIELS A CARACTÉRISTIQUES DOUBLES

par

Alain GRIGIS

O. - INTRODUCTION. ÉNONCÉ DU RÉSULTAT.

Dans [1], L. Boutet de Monvel a construit une algèbre d'opérateurs pseudodifférentiels $OPS^{m,k}(X,\Sigma)$ qui contient les paramétrix d'opérateurs tels que :

$$P_1 = \sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_n} \text{ ou } P_2 = \sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 + \left(\sum_1^{n-1} x_j^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 + i\lambda \frac{\partial}{\partial x_n}$$

(λ non entier impair).

Ces opérateurs sont à caractéristiques doubles sur une surface C^∞ conique Σ (pour les analogues de P_1 , Σ est involutive, i.e. l'idéal des fonctions nulles sur Σ est stable par crochets de Poisson ; pour les analogues de P_2 , Σ est symplectique, i.e. la restriction à Σ de la 2-forme canonique $\Sigma d\xi_j \wedge dx_j$ est non dégénérée). Nous considérons ici des opérateurs P tels que

$$P_3 = \sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 + \left(\sum_1^{p} x_j^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 + i\lambda \frac{\partial}{\partial x_n} \ (\mathrm{Re}\,\lambda < 1 \ \text{ si } \ \mathrm{Im}\,\lambda = 0) \quad (0 \leq p \leq n-1)$$

c'est-à-dire, des opérateurs à caractéristiques doubles sur une surface Σ telle que la restriction à Σ de la 2-forme canonique soit de rang constant.

Nous donnons une condition nécessaire et suffisante d'hypoellipticité avec perte d'une dérivée exprimée à l'aide d'invariants liés à l'opérateur P sur la surface Σ, et si cette condition est vérifiée, nous construisons une paramétrix pour P dans la classe sus-citée.

Nous énonçons maintenant le résultat précis.

Soit X une variété réelle, C^∞, paracompacte, de dimension n, et soit $\dot{T}^*(X)$ son fibré cotangent privé de la section nulle. Nous notons la variable de $\dot{T}^*X$ $(x,\xi) = (x_1,\ldots,x_n, \xi_1,\ldots,\xi_n)$. L'action de $\mathbb{R}^+$ sur $\dot{T}^*X$, $\lambda \circ (x,\xi) \longmapsto (x,\lambda,\xi)$ munit $\dot{T}^*X$ d'une structure de cône C^∞. On note $\omega = \Sigma\, d\xi_j \wedge dx_j$ la 2-forme canonique.

Nous considérons une surface conique C^∞, Σ, contenue dans $\dot{T}^*X$. Soit ν sa codimension $(o < \nu < 2n)$. Donc, Σ peut être définie localement par réelles C^∞ homogènes

$$v_1 = \ldots = v_\nu = 0$$

telles que les différentielles $dv_j (j=1,\ldots,\nu)$ soient linéairement indépendantes.

Nous supposons que Σ vérifie les conditions suivantes :

(H_1) En tout point de Σ, les différentielles dv_j $(j=1,\ldots,\nu)$ et la 1-forme canonique $\Sigma\xi_j\, dx_j$ sont linéairement indépendantes.

(H_2) Le rang de la matrice des crochets de Poisson $(\{v_i,v_j\})$ est constant sur Σ.

Nous notons $2\nu'$ ce rang et nous posons $\nu = 2\nu' + \nu''$.

Maintenant, nous considérons un opérateur pseudo-différentiel P de degré m "classique", c'est-à-dire dont le symbole admet localement un développement asymptotique

$$p(x,\xi) = \sum_{j \in \mathbb{N}} p_{m-j}(x,\xi)$$

où p_{m-j} est positivement homogène de degré $m-j$.

On suppose que P est elliptique en dehors de Σ et que son symbole principal $\sigma(P) = p_m$ s'annule à l'ordre 2 sur Σ. Au voisinage de Σ, on peut écrire :

$$p_m = \sum_{1 \leq i,j \leq \nu} a_{ij}\, v_i\, v_j$$

à l'aide de fonctions a_{ij} C^∞ homogènes, vérifiant $a_{ij} = a_{ji}$.

On suppose de plus, qu'en tout point $\rho = (x,\xi)$ de Σ, la forme quadratique sur $\mathbb{R}^\nu$ de matrice (a_{ij}) est non dégénérée et que ses valeurs forment un angle convexe Γ, d'ouverture strictement inférieure à π, de $\mathbb{C}$. (Si $\nu = 2$, ceci est équivalent à dire que l'indice d'enroulement de la forme quadratique est nul - voir J. Sjostrand [13]).

On considère en $\rho = (x,\xi) \in \Sigma$ la forme quadratique Q et la matrice fondamentale A définies comme dans Melin [11] par :

$$p_m(x+y,\ \xi+\eta) = Q((y,\eta),\ (y,\eta)) + o(|(y,\eta)|^2)$$

et, notant q la forme polaire de Q

$$q((y,\eta),\ (y',\eta')) = \omega((y,\eta),\ A(y',\eta')).$$

En tout point ρ de Σ la forme quadratique Q prend ses valeurs dans Γ et on peut associer à P les invariants suivants :

- le symbole sous-principal ou second invariant :

$$I_2(P) = p_{m-1} - \frac{1}{2i} \Sigma \frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi_j \, \partial x_j}$$

- l'angle Γ défini ci-dessus
- les nombres complexes λ_j $(j=1,\ldots, \nu')$ appartenant à Γ-{o} tels que les valeurs propres non nulles de A (répétées selon leur multiplicité) soient $\pm \lambda_j$ $(j=1,\ldots, \nu')$
- l'angle Γ' convexe, inclus dans Γ :

$$\Gamma' = \{q((\overline{y,\eta}), (y,\eta)) \quad ; \quad A^{2n}(y,\eta) = o\} .$$

THÉORÈME 0.1. - Soit P un opérateur pseudo-différentiel vérifiant les hypothèses ci-dessus. Les propositions sont équivalentes :

a) P a une paramétrix $P' \in OPS^{-m,-2}(X,\Sigma)$

b) En tout point ρ de Σ , pour tout multi-indice $(\alpha_1,\ldots, \alpha_{\nu'})$

$$\sum_{j=1}^{\nu} (2\alpha_j + 1) \lambda_j + I_2(P) \notin - \Gamma'$$

c) Pour toute distribution f

$$Pf \in H^s_{loc} \Longrightarrow f \in H^{s+m-1}_{loc}$$

(hypoellipticité avec perte d'une dérivée).

Si $\nu' = o$, la variété Σ est involutive, on retrouve le théorème ([1], (7.3)) de L. Boutet de Monvel. Les angles Γ et Γ' sont confondus et il n'y a pas de valeur spectrales λ_j .

Si $\nu' = o$, la variété Σ est symplectique, on retrouve le théorème [1], (8.6) de L. Boutet de Monvel (le résultat est dû initialement à J. Sjöstrand ([13],1.6,1.7) ; voir aussi L. Boutet de Monvel - F. Treves [3]). L'angle Γ' est réduit alors à {o}.

Remarque 0.2. - Si p_m est réel, l'angle Γ est égal à $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}^-$ et si Σ n'est pas symplectique, Γ' est égal à Γ. La condition b) s'énonce alors : $I_2(P)$ n'appartient pas à la demi-droite

$$- \sum_1^{\nu'} \lambda_j - \operatorname{sgn} (\sum_1^{\nu'} \lambda_j) \ \mathbb{R}^+ .$$

On retrouve ainsi certains résultats de E.V. Radkevic [12].

Nous avons adopté le point de vue et les méthodes de L. Boutet de Monvel, nous rappelons en III.1 les propriétés de $OPS^{m,k}(X,\Sigma)$. Nous utilisons les opérateurs intégraux de Fourier définis par L. Hörmander [8] et nous adoptons les notations de L. Boutet de Monvel [1] pour les opérateurs pseudo-différentiels.

Nous signalons que L. Hörmander démontre dans [9], par d'autres méthodes, l'équivalence de b) et c) sans faire les hypothèses (H_1) et (H_2) sur la surface Σ.

D'autre part, le théorème 0.1, sans les hypothèses (H_1) et (H_2) est démontré dans L. Boutet de Monvel - A. Grigis - B. Helffer, à paraître.

Nous avons placé au § I : l'étude d'algèbre linéaire, au § 2 : celle des invariants, et au § 3 : la démonstration du théorème.

I. ALGÈBRE LINÉAIRE.

Dans cette partie, nous avons placé l'étude algébrique qui nous permettra ensuite de définir les invariants, et de mettre l'opérateur étudié sous une forme simple, adaptée à la démonstration du théorème.

Nous nous plaçons donc dans le cadre suivant :

Soit E un espace vectoriel réel symplectique, de dimension $2n$, de forme symplectique ω (ω est une forme bilinéaire sur E, antisymétrique non dégénérée).

Soit Q une forme quadratique à coefficients complexes sur E, de forme polaire q.

On note $E_c = E \otimes C$ le complexifié de E, et A l'endomorphisme de E_c défini par :

$$q(u,v) = \omega(u, Av) \qquad \forall\ u, v \in E_c$$

A est antisymétrique :

$$\omega(u, Av) = -\omega(Au, v) \quad \forall\ u, v \in E_c .$$

On considère le sous-espace de E_c, Rad Q = Ker A. On note Rad $Q^{\perp}$ son orthogonal pour la forme ω et on pose :

$$\begin{cases} \dim\ (\mathrm{Rad}\ Q \cap \mathrm{Rad}\ Q^{\perp}) = m \\ \dim\ (\mathrm{Rad}\ Q) = m+2q \\ \dim\ (\mathrm{Rad}\ Q^{\perp}) = m+2p \end{cases}$$

(on a : $m+p+q=n$ puisque $\dim E = \dim E_c = \dim\ (\mathrm{Rad}\ Q) + \dim\ (\mathrm{Rad}\ Q^{\perp})$.

Enfin, on pose $E_\lambda = \mathrm{Ker}\ (A-\lambda)^{2n}$ de sorte que $E_c = \oplus E_\lambda$ est la décomposition spectrale de E_c relativement à A.

PROPOSITION 1.1. - <u>On suppose que</u> $Q(E)$ <u>est un angle</u> Γ <u>de</u> $\mathbb{C}$, <u>convexe d'ouverture strictement inférieure à</u> π .

1) E_0 <u>est de dimension</u> $2(m+q)$, <u>et on a</u> $A^2(E_0) = \{0\}$.

2) <u>Il existe</u> p <u>nombres</u> λ_j $(j=1,\dots,p)$ <u>distincts ou confondus</u>, <u>appartenant à</u> $\Gamma - \{0\}$ <u>tels que les valeurs propres non nulles de</u> A, <u>répétées selon leurs multiplicités</u>, <u>soient</u> $\{\pm\ i\lambda_j \quad j=1,\dots, p\}$.

3) <u>Il existe un système de coordonnées symplectiques réelles</u> $x_j, x_j'(j=1,\dots,p)$, y_k, y_k' $(k=1,\dots, m+q)$ (i.e. $\omega = \Sigma\ dx_j \wedge dx_j' + \Sigma\ dy_k \wedge dy_k'$) <u>telles qu'on ait</u>, <u>avec</u> $z_j = x_j + ix_j'$:

$$(1.2) \qquad Q = \sum_{1 \le i,j \le p} a_{ij} z_i \overline{z_j} + b_{ij} \overline{z}_i \overline{z}_j + \sum_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le k \le m}} c_{ik} \overline{z_i}\, y_k + \sum_{1 \le k,\ell \le m} d_{k\ell}\, y_k\, y_\ell$$

et un système de la même forme tel que l'on ait :

(1.3) $$Q = \sum_{1 \le i,j \le p} a'_{ij}\bar{z}_i z_j + b'_{ij} z_i z_j + \sum_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le k \le m}} c'_{ik} z_i y_k + \sum_{1 \le k,\ell \le m} d'_{k\ell}\, y_k\, y_\ell .$$

4) L'ensemble des valeurs de la forme $\Sigma\, d_{k\ell}\, y_k\, y_\ell$ ($\Sigma\, d'_{k\ell}\, y_k\, y_\ell$) est l'angle Γ' égal à $\{q(\bar{w},w) \quad w \in E_0\}$.

Les valeurs propres de la matrice (a_{ij}) $((a'_{ij}))$ sont les nombres $\lambda_j (j=1,\ldots,p)$.

Cette proposition et notamment le 3) généralisent les études de [1] § 8 et de [3] (voir aussi [13]).

Démonstration. -

1) Le radical de Q et E_0.

Par définition, le radical de Q, Rad Q, qui est égal au noyau de A, Ker A, est le sous-espace des $w \in E_c$ tels que $q(w,w') = 0$ pour tout $w' \in E_c$.

Soit R l'ensemble des $u \in E$ tels que $Q(u) = 0$.

D'après la forme de Γ on déduit :

- Si $u \in E$, et $Q(u) = 0$, on a $Q(u+\lambda v) = 2\lambda q(u,v) + \lambda^2 Q(v)$ pour tout $v \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, donc $q(u,v) = 0$ et $u \in \text{Rad } Q$.

- Si $w = u+iv \in E_c$, avec $u \in E$ et $v \in E$, on a $q(\bar{w},w) = Q(u) + Q(v)$. Donc $q(\bar{w},w) = 0$ implique $Q(u) = Q(v) = 0$, d'où $u \in \text{Rad } Q$ et $v \in \text{Rad } Q$, et finalement $w \in \text{Rad } Q$; inversement, on a : $q(\bar{w},w) = 0$ si $w \in \text{Rad } Q$.

Donc Rad Q est le complexifié R_c de R et est égal à l'ensemble des $w \in E_c$ tels que $q(\bar{w},w) = 0$.

Comme A est antisymétrique, $A(E_c)$ est l'orthogonal de $\text{Ker } A = R_c$: ainsi $A(E_c) = R_c^{\perp}$ est réel (i.e. égal à son conjugué).

Si $A^2 u \in R_c$, on a $q(\overline{Au},Au) = \omega(\overline{Au}, A^2u) = 0$ puisque $\overline{Au} \in \overline{R_c^{\perp}} = R_c^{\perp}$, donc $Au \in R_c$ et $A^2u = 0$. On a donc $A^2(E_0) = \{0\}$.

Enfin, comme $\text{Ker } A = R_c \subset E_0$ est de dimension $m+2q$ et $A(E_0) = A(E_c) \cap R_c = R_c \cap R_c^{\perp}$ est de dimension m, E_0 est de dimension $2(m+q)$.

2) Les valeurs propres non nulles.

Comme A est antisymétrique, E_λ est orthogonal à E_μ (pour ω et Q), sauf si $\lambda + \mu = 0$, et comme ω est non dégénérée, elle met en dualité séparée E_λ et $E_{-\lambda}$.

Si $\lambda \neq 0$ est valeur propre, et $w = u+iv \neq 0$ vecteur propre correspondant, on a $q(\bar{w},w) \neq 0$ (sinon $w \in \text{Rad } Q$, et $\lambda = 0$). Donc $q(\bar{w},w) = Q(u) + Q(v) = \omega(\bar{w},Aw) = \lambda(\bar{w},w) = 2i\omega(u,v)$, de sorte qu'on a $\omega(u,v) \in \mathbb{R} - \{0\}$, et $\lambda \in \pm i\Gamma - \{0\}$.

On pose $E_\pm = \bigoplus_{\lambda \in \pm i\Gamma - \{0\}} E_\lambda$, de sorte que $E_\pm$ est isotrope, d'orthogonal $E_\pm \oplus E_0$. On a $\dim E_+ = \dim E_- = p$ puisque E_+ et E_- sont en dualité par ω -donc de même dimension- , et $\dim E_0 = 2(m+q) = 2(n-p) = \operatorname{codim} E_+ \oplus E_-$.

Si $\lambda \in i\Gamma - \{0\}$ et si $w = u + iv \neq 0$ est vecteur propre correspondant, on a $i\omega(\overline{w},w) = \frac{i}{\lambda}\, q(\overline{w},w) > 0$ (car $q(\overline{w},w) \in \Gamma$ et $\frac{\lambda}{i} \in \Gamma$). Il s'ensuit qu'on a $i\omega(\overline{w},w) > 0$ si $w \in E_+ - \{0\}$ lorsque A est semi-simple, et un argument de perturbation montre que c'est vrai dans tous les cas. De même, on a $i\omega(\overline{w},w) < 0$ si $w \in E_- - \{0\}$.

3) Coordonnées adaptées.

On a : $\omega(\overline{w},w) \neq 0$ si $w \in E_+ - \{0\}$, donc $\overline{E_+}$ est linéairement disjoint de $E_+^{\perp} = E_+ \oplus E_0$. L'espace $E_+ + \overline{E_+}$ est donc de dimension $2p$ (la somme est directe) ; il est réel, donc son orthogonal est réel et est ainsi le complexifié F_c d'un sous-espace F de E. R_c est réel, orthogonal à E_+ donc aussi à $\overline{E_+}$, donc $R \subset F$.

On peut alors choisir des coordonnées symplectiques réelles $x_j x_j'$, $j=1,\dots,p$, $y_k y_k'$, $k=1,\dots,m+q$ ($\omega = \Sigma\, dx_j \wedge dx_j' + \Sigma\, dy_k \wedge dy_k'$) de sorte que :

$E_+ \oplus \overline{E_+}$ soit défini par $y_k = y_k' = 0$ $(k=1,\dots, m+q)$

F soit défini par $x_j = x_j' = 0$ $(j=1,\dots, p)$

E_+ soit défini dans $E_+ \oplus \overline{E_+}$ par $\overline{z_j} = x_j - ix_j' = 0$ $(j=1,\dots,p)$

(ceci parce que $i\omega(\overline{w},w) > 0$ pour $w \in E_+ - \{0\}$) et

R soit défini dans F par $y_k = 0$ $(k=1,\dots,m)$

(ceci parce que $R \quad F = R \quad R$ est isotrope, de dimension m) .

Dans ce système de coordonnées, Q s'écrit sous la forme :

$$Q = \sum_{1 \leq i,j \leq p} a_{ij} z_i \overline{z_j} + b_{ij} \overline{z_i z_j} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq k \leq m}} c_{ik}\, \overline{z_i} y_k + \sum_{1 \leq k,\ell \leq m} d_{k\ell}\, y_k y_\ell$$

(comme R est défini par $z_j = \overline{z_j} = y_k = 0$, $j=1,\dots,p$, $k=1,\dots,m$, seules figurent ces fonctions coordonnées dans Q ; en outre, E_+ est totalement isotrope pour Q, donc $Q = 0$ si $\overline{z_j} = y_k = 0$, et Q ne contient pas de terme mixte $z_i z_j$ ou $z_i y_k$).

De manière analogue, nous obtenons la $2^{\text{ème}}$ écriture de Q en choisissant des coordonnées telles que dans $E_- \oplus \overline{E_-}$, E_- soit défini par $z_j = x_j + ix_j' = 0$ $(j=1,\dots,p)$.

4) Maintenant, remarquons qu'on a : $E_+ \oplus F_c = E_+ = E_+^{\perp} \oplus E_0$, si bien que $E_+ \oplus F_c$ est stable par A (comme E_+ et E_0).

La projection $w \longmapsto w_F$ de E_c sur F_c parallèlement à $E_+ \oplus \overline{E_+}$ induit une bijection de E_0 sur F_c.

Si $w \in E_0$, on a $Aw \in R_c \subset F_c$, et comme $A(w - w_F) \in E_+$, on a $Aw = (Aw_F)_F$. Par suite :

$q(\overline{w},w) = \omega(\overline{w},Aw) = \omega(\overline{w_F} , (Aw_F)_F) = \omega(\overline{w_F} , Aw_F) = q(\overline{w_F} , w_F)$.

Ainsi, l'angle convexe $\Gamma' = Q(F) \subset \Gamma$ est égal à l'ensemble des nombres $q(\overline{w},w)$, $w \in E_0$, et aussi à l'ensemble des nombres $q(\overline{y},y)$, $y \in F_c$.

Enfin, soit ε_j le vecteur de E_+ défini par $z_i\, \varepsilon_j = \delta_{ij}$: on a $2i\omega(\overline{\varepsilon_j} , \varepsilon_{j'}) = \delta_{jj'}$, de sorte que dans la base ε_j , la matrice de A est $(\alpha_{jj'})$ avec

$$\alpha_{jj'} = 2i\omega(\overline{\varepsilon_{j'}}, A\varepsilon_j) = 2iq(\overline{\varepsilon_{j'}}, \varepsilon_j) = ia_{jj'},$$

et les valeurs propres de (a_{ij}), répétées selon leurs multiplicités, sont les nombres λ_j, $j=1,\dots,p$.

De la même manière, nous montrons que Γ' est aussi égal à $Q(F')$ où $F' = E \cap (E_- \oplus \overline{E_-})^{\perp}$, et que les valeurs propres de la matrice (a'_{ij}) sont aussi les nombres λ_j. Ainsi, la proposition est complètement démontrée.

Terminons par deux remarques :

Remarque 1.4. - Si les formes ω et Q dépendent toutes deux de manière C^∞ d'un paramètre μ, de façon que pour toute valeur de μ les hypothèses de la proposition 1.1. soient vérifiées, avec m, p, q constants, alors les fonctions symétriques élémentaires des nombres $\lambda_j (j=1,\dots,p)$ dépendent de manière C^∞ de μ et on peut écrire Q sous la forme (1.2) (ou (1.3)) tous les termes de l'expression dépendant de manière C^∞ de μ.

Remarque 1.5. - On peut choisir les coordonnées $x_j x'_j$ de façon que la matrice (a_{ij}) (ou (a'_{ij})) soit triangulaire pour une valeur fixée du paramètre.

II. DESCRIPTION DES INVARIANTS.

Dans ce paragraphe, nous définissons les invariants associés en un point de la surface caractéristique Σ, à l'opérateur P étudié. Puis, nous les mettons en évidence en écrivant P dans un système de coordonnées locales bien choisi.

II.1. Rappels. Le symbole sous-principal.

Soit P un opérateur pseudo-différentiel ; nous savons que son symbole principal $\sigma(P)$ est invariant par transformation à l'aide d'un opérateur intégral de Fourier elliptique :

Soit Φ une transformation canonique homogène

$$\Phi = \dot{T}^* X \longrightarrow \dot{T}^* Y$$

et F un opérateur intégral de Fourier elliptique associé à Φ ; on a :

$$\sigma(FPF^{-1}) \circ \Phi = \sigma(P).$$

Maintenant, nous supposons que P est un opérateur pseudo-différentiel classique de degré m. On a $\sigma(P) = p_m$. Comme dans [13], nous allons définir le symbole sous-principal de P en un point critique ρ de p_m et montrer qu'il est invariant.

La formule de Taylor montre qu'on peut écrire au voisinage de ρ

$$p_m = \Sigma\, q_{ij}\, v_i v_j$$

à l'aide de fonctions C^∞ homogènes, avec $q_{ji} = q_{ij}$ et les fonctions v_i nulles en ρ et ayant leurs différentielles linéairement indépendantes.

On choisit des opérateurs pseudo-différentiels classiques Q_{ij}, V_i, ayant pour symboles principaux respectifs q_{ij}, v_i, et on peut écrire :

$$P = \Sigma\, Q_{ij}\, V_i V_j + R$$
où R est classique de degré m-1.

PROPOSITION (définition) II.1.1. - Le symbole principal de R est un invariant associé à P au point ρ. On l'appelle symbole sous-principal de P (ou second invariant) et on note $I_2(P)\rho$. Dans un système de coordonnées locales, le symbole de P a un développement asymptotique $p = p_m + p_{m-1} + \dots$ et $I_2(P)$ a pour expression :

$$I_2(P) = p_{m-1} - \frac{1}{2i} \sum_k \frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi_k\, \partial x_k}\ .$$

Il suffit de calculer le symbole principal de R dans le système de coordonnées à l'aide de la formule usuelle donnant le développement du symbole du composé de deux opérateurs

$$\sigma(R) = p_{m-1} - \frac{1}{i} \sum_{i,j,k} q_{ij}\, \frac{\partial v_i}{\partial \xi_k}\, \frac{\partial v_j}{\partial x_k}$$

$$\sigma(R) = p_{m-1} - \frac{1}{2i} \sum_k \frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi_k\, \partial x_k}\ .$$

Donc, $\sigma(R)$ ne dépend ni deu choix des fonctions v_i, ni du choix du système de coordonnées. D'autre part, transformons P par un opérateur intégral de Fourier elliptique :

$$FPF^{-1} = \Sigma(FQ_{ij}F^{-1})\ (FV_i\ F^{-1})\ (FV_jF^{-1}) + FRF^{-1}\ .$$

On sait que le symbole principal est invariant, donc

$$\sigma(P)\circ\Phi^{-1} = \sigma(FPF^{-1}) = \Sigma\sigma(FQ_{ij}F^{-1})\,\sigma(FV_iF^{-1})\,\sigma(FV_jF^{-1}) = \Sigma(\sigma(Q_{ij})\circ\Phi^{-1})(\sigma(V_i)\circ\Phi^{-1})\ (\sigma(V_j)\circ\Phi)$$

et par suite

$$I_2(FPG)_{\Phi(\rho)} = \sigma(FRF^{-1})_{\Phi(\rho)} = \sigma(R)_\rho = I_2(P)_\rho$$

ce qui achève la démonstration.

II.2. Les invariants liés au hessien de p_m et à la matrice fondamentale.

DÉFINITION 2.2.1. - Soit ρ un point critique de p_m. On appelle hessien de p_m en ρ la forme quadratique Q_P définie sur $T_\rho\, \dot{T}^*X$ par :

$$Q_P(u) = Y(Yp_m)|_\rho$$

où Y est un champ de vecteurs sur $\dot{T}^*X$ défini au voisinage de ρ et égal à u en ρ.

On vérifie aisément que Q_P est une forme quadratique (on note q_P la forme polaire). Si

$$p_m = \Sigma\, q_{ij}\, v_i v_j$$

comme en II.1, on a :

$$Q_P = \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{\partial^2 p_m}{\partial v_i \partial v_j}\, dv_i\, dv_j = \Sigma\, q_{ij}\, dv_i\, dv_j\ .$$

D'autre part, si $D\Phi$ est la différentielle de Φ on a :

$$Q_{FPF^{-1}} \circ D\Phi = Q_P\ .$$

On peut donc associer à P un nouvel invariant : le cône Γ inclus dans C formé des valeurs prises par le hessien de p_m en ρ.

DÉFINITION 2.2.2. - Soit ρ un point critique de p_m. On appelle matrice fondamentale de P en ρ (définie à une similitude près) la matrice de l'endomorphisme A_P de $(T_\rho \dot{T}^* X) \otimes C$ défini par :

$$q_P(u,v) = \omega(u,A_P v) \quad \forall\ u,\ v \in (T_\rho \dot{T}^* X) \otimes C.$$

On a immédiatement :

$$A_{FPF^{-1}} = D\Phi \circ A_P \circ (D\Phi)^{-1} .$$

On suppose que Γ est un angle convexe d'ouverture strictement inférieure à π. On applique la proposition 1.1 à l'espace $T_\rho \dot{T}^* X$ et à la forme quadratique Q_P et on peut donc définir les invariants suivants :

- p nombres complexes $\lambda_j \in \Gamma\ (j=1,\ldots,p)$ tels que les valeurs propres non nulles de A_P soient $\pm\, i\lambda_j$ $(j=1,\ldots,p)$
(où $p = \frac{1}{2}(\dim \operatorname{Ker} A_P^{\perp} - \dim \operatorname{Ker} A_P \cap \operatorname{Ker} A_P^{\perp}))$

- l'angle convexe $\Gamma' \subset \Gamma$ égal à $\{q_P(\overline{w},w),\ w \in E_0\}$ (où $E_0 = \operatorname{Ker} A_P^{2n}$).

II.3. Propriétés des invariants.

PROPOSITION 2.3.1. - Soit P vérifiant les hypothèses précédentes. Les invariants associés à P^* sont les conjugués de ceux associés à P.

On sait que $\sigma(P^*) = \overline{\sigma(P)}$ et $I_2(P^*) = \overline{I_2(P)}$, on en déduit $Q_{P^*} = \overline{Q_P}$ et $A_{P^*} = \overline{A_P}$ et par suite la proposition.

PROPOSITION 2.3.2. - Soit P vérifiant les hypothèses précédentes. Soit P' un opérateur pseudo-différentiel classique tel que ρ soit zéro de p'_{m-1} et zéro d'ordre 3 au moins de p'_m. Alors $P+P'$ a les mêmes invariants que P au point ρ.

C'est immédiat.

II.4. Coordonnées adaptées.

On suppose maintenant que P vérifie les hypothèses énoncées au paragraphe 0. L'opérateur P est donc à caractéristiques doubles sur une variété régulière conique Σ de codimension ν, telle que la restriction à Σ de la forme symplectique canonique ω soit de rang constant $2(n-\nu+\nu')$.

PROPOSITION 2.4.1. - On peut écrire localement au voisinage de Σ, P sous la forme :

$$P = \sum_{1\leq i,j\leq \nu'} A_{ij}Z_iZ_j^* + B_{ij}Z_i^*Z_j^* + \sum_{\substack{1\leq i\leq \nu' \\ 1\leq k\leq \nu''}} C_{ik}Z_i^*Y_k + \sum_{1\leq k,\ell\leq \nu''} D_{k\ell}Y_kY_\ell + R \tag{2.4.2}$$

à l'aide d'opérateurs pseudo-différentiels classiques, A_{ij}, B_{ij}, C_{ik}, $D_{k\ell}$, R de degré m-1, Z_j, Y_k de degré $\frac{1}{2}$, ayant pour symboles principaux respectifs $a_{ij},\ldots,\ z_j = x_j + x'_j,\ y_k$ $(x_j,\ x'_j,\ y_k$ réels), de façon que :

1) Σ soit définie localement par les équations :

$$x_j = x'_j = y_k = 0 \qquad \begin{matrix} 1 \leq j \leq \nu' \\ 1 \leq k \leq \nu'' \end{matrix}$$

2) Les relations suivantes entre les crochets de Poisson des fonctions z_j, y_k soient satisfaites sur Σ :

$$\frac{1}{2i}\{\bar{z}_j , z_{j'}\} - \delta_{jj'} = \{z_j , z_{j'}\} = \{z_j , y_k\} = \{y_k , y_\ell\} = 0.$$

De plus, on a en tout point ρ de Σ

3) Les valeurs propres de la matrice (a_{ij}) sont les invariants λ_j associés à P.

4) L'ensemble des valeurs de la forme quadratique $\sum_{1 \leq k,\ell \leq \nu''} d_{k\ell}\, dy_k\, dy_\ell$ est l'invariant Γ'.

5) Le symbole principal de R est un invariant associé à P, égal à

$$I_2(P) + \sum_{j=1}^{\nu'} \lambda_j .$$

Démonstration. - D'abord, on constate que $\operatorname{Rad} Q_P = T_\rho \Sigma$ donc on a

$$\nu' = \tfrac{1}{2}(\dim \operatorname{Ker} A_P^\perp - \dim \operatorname{Ker} A_P \cap \operatorname{Ker} A_P^\perp)$$

et par conséquent, il y a ν' nombres λ_j associés à P en tout point de Σ.

On considère maintenant la variété C^∞ conique Σ dans un ouvert U que l'on restreindra autant que nécessaire. On peut trouver des fonctions réelles C^∞ homogènes de degré $\frac{1}{2}$, ayant leurs différentielles linéairement indépendantes dans U

$$v_1 , \dots , v_{2n}$$

telles que Σ soit définie par :

$$v_1 = \quad = v_\nu = 0.$$

On peut écrire :

$$p_m = \sum_{1 \leq i,j \leq \nu} q_{ij}\, v_i\, v_j$$

les fonctions q_{ij} étant C^∞ homogènes de degré $m-1$.

Considérons l'espace R^{2n} muni de la forme symplectique de matrice $(\{v_i,v_j\})^{-1}$ et de la forme quadratique de matrice (q_{ij}) (on pose $q_{ij} = 0$ si i ou $j > \nu$). Ces deux formes dépendent de manière C^∞ du paramètre μ appartenant à U. Quitte à restreindre U on peut utiliser la remarque 1.4, si bien que l'on obtient des fonctions $z_j = x_j + ix'_j$ $(1 \leq j \leq \nu')$ et y_k $(1 \leq k \leq \nu'')$ combinaisons linéaires à coefficients C^∞ homogènes de $v_1, \dots, v_\nu$ telles que :

$$p_m = \sum_{1 \leq i,j \leq \nu'} a_{ij} z_i \bar{z}_j + b_{ij} \bar{z}_i \bar{z}_j + \sum_{\substack{1 \leq i \leq \nu' \\ 1 \leq k \leq \nu''}} c_{ik} \bar{z}_i y_k + \sum_{1 \leq k,\ell \leq \nu''} d_{k\ell}\, y_k\, y_\ell$$

Si $w_k = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{kj} v_j$, on a sur Σ

$$dw_k = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{kj}\, dv_j$$

et $\omega^*(dw_k, dw_\ell) = \{w_k, w_\ell\} = \sum_{1\le i,j\le\nu} \alpha_{ki}\,\alpha_{\ell j}\,\{v_i, v_j\}$ et on en déduit 1, 2, 3, 4 immédiatement.

D'autre part, comme en II.1. on calcule $r=\sigma(R)$ dans des coordonnées locales, on obtient :

$$I_2'(P) = \sigma(R) = I_2(P) + \operatorname{tr}(a_{ij})$$
$$I_2'(P) = I_2(P) + \sum_{j=1}^{\nu'} \lambda_j$$

c'est donc un invariant. La proposition est démontrée.

A. Melin a considéré $I_2'(P)$ dans [11].

PROPOSITION 2.4.3. - Soit P vérifiant les hypothèses de la proposition 2.4.1. On peut écrire :

$$(2.4.4)\qquad P = \sum_{1\le i,j\le\nu'} A'_{ij}Z_iZ_j^* + B'_{ij}Z_iZ_j + \sum_{\substack{1\le i\le\nu'\\ 1\le k\le\nu''}} C'_{ik}Z_iY_k + \sum_{1\le k,\ell\le\nu''} D'_{k\ell}\,y_k\,y_\ell + R'$$

avec les propriétés analogues à celles énoncées dans 2.4.1.

C'est clair.

PROPOSITION 2.4.5. - Soit ρ un point de Σ. On peut écrire P dans un voisinage de ρ, sous la forme 2.4.2 (2.4.4) avec en plus la matrice (a_{ij}) $((a'_{ij}))$ triangulaire au point ρ.

Cela résulte de la remarque (1.5).

III. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME.

III.1. L'algèbre $OPS^{m,k}(X,\Sigma)$. Preuve de a) $\Longrightarrow$ c).

Nous allons introduire l'algèbre $OPS^{m,k}(X,\Sigma)$ qui a été définie et étudiée dans [1]. Nous renvoyons à cet article pour les démonstrations des propriétés énoncées ici.

Nous introduisons d'abord un espace de symboles. On considère un cône C^∞ (au sens de [4] (2.1.1)) U et un sous-cône Σ de U. On définit une fonction r (>0) C^∞ homogène de degré un sur U et on pose $U = U' \times \mathbb{R}$ (U' est appelée base de U). On note $f \underset{\sim}{<} g$ si dans tout cône inclus dans U à base compacte dans U', pour tout $\varepsilon > 0$, on a $f \le Cg$ pour $r > \varepsilon$ (constante positive). On définit une fonction d_Σ dont le carré est la somme d'une fonction >0 homogène de degré -1 et d'une fonction >0 hors de Σ et nulle à l'ordre 2 exactement sur Σ, homogène de degré 0.

DÉFINITION ([1] (1.9)). On note $S^{m,k}(U,\Sigma)$ (ou $S^{m,k}$) l'espace de Fréchet de toutes les fonctions C^∞ sur U telles que, quels que soient les champs de vecteurs

$X_1 \dots X_p$, $Y_1 \dots Y_q$ à coefficients C^∞ , homogènes de degré 0 , avec les X_j tangents à Σ , on ait :

$$|X_1 \dots X_p , Y_1 \dots Y_q \, a| \lesssim r^m \, d_\Sigma^{k-q} .$$

L'application $(a,b) \longmapsto ab$ est continue de $S^{m,k} \times S^{m',k'}$ dans $S^{m+m',k+k'}$ et on a $S^{m,k} \subset S^{m',k'}$ si et seulement si $m \leq m'$ et $m - \frac{1}{2} k \leq m' - \frac{1}{2} k'$.

Localement, on peut supposer $U = \mathbb{R}_x^\nu \times \mathbb{R}_y^{\mu-\nu} \times \mathbb{R}_r^+$, Σ étant définie par $x = o$; $a \in S^{m,k}$ vérifie pour tout entier p et tous multi-indices α, β

$$|(\tfrac{\partial}{\partial x})^\alpha (\tfrac{\partial}{\partial y})^\beta (\tfrac{\partial}{\partial r})^p \, a| \lesssim r^{m-p} \, d_\Sigma^{k-|\alpha|} .$$

Dans le cas où U est le cône $\dot{T}^* X$ $(r = |\xi|)$, nous notons $S^{m,k}(X,\Sigma)$ (ou $S^{m,k}$) l'espace ainsi défini, et on lui associe un espace d'opérateurs pseudo-différentiels $OPS^{m,k}(X,\Sigma)$ $(OPS^{m,k})$ de la manière usuelle.

Notons le calcul symbolique pour ces opérateurs ; si $A \in OPS^{m,k}$, $B \in OPS^{m',k'}$ sont proprement supportés, on a $A^* \in OPS^{m,k}$ et $A \circ B \in OPS^{m+m',k+k'}$.

DÉFINITION 3.1.1. - On dit qu'un opérateur pseudo-différentiel classique P de degré m , s'annule à l'ordre k (entier) sur Σ si P_{m-j} s'annule à l'ordre $k-2j$ sur Σ pour $j \leq \frac{1}{2} k$.

PROPOSITION (lemme (1.4) de [1]). - Les opérateurs pseudo-différentiels classiques de degré m , s'annulent à l'ordre k (≥ 0) sur Σ , appartiennent à $OPS^{m,k}(X,\Sigma)$.

Notons le bon comportement sous une transformation par un opérateur intégral de Fourier elliptique.

PROPOSITION ((3.12) de [1]). - (Avec les notations de II.1)

$$A \in OPS^{m,k}(X,\Sigma) \Longrightarrow FAF^{-1} \in OPS^{m,k}(Y,\Phi(\Sigma)).$$

Il y a des espaces de Sobolev qui s'associent naturellement à ces opérateurs ([1] § 4). Notons seulement qu'on a pour les espaces de Sobolev usuels

PROPOSITION 3.1.2. - Si A proprement supporté appartient à $OPS^{m,k}$ avec $k \leq 0$, A est continu pour tout s réel de H^s_{comp} dans $H^{s-m+\frac{1}{2}k}_{loc}$.

Nous introduisons maintenant les espaces suivants ([1] § 5)

$$OP\mathscr{K}^m(X,\Sigma) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} OPS^{m-j,-2j}(X,\Sigma)$$

dont les symboles sont dans

$$\mathscr{K}^m(X,\Sigma) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} S^{m-j,-2j}(X,\Sigma).$$

Ces opérateurs sont régularisant en dehors de Σ . Notons le calcul : si $A \in OP\mathscr{K}^m(X,\Sigma)$, $B \in OPS^{m',k'}(X,\Sigma)$ sont proprement supportés, on a $A^* \in OP\mathscr{K}^m(X,\Sigma)$ et $A \circ B$, $B \circ A \in OP\mathscr{K}^{m+m'-\frac{1}{2}k'}(X,\Sigma)$.

Donnons deux résultats d'approximations successives sur les symboles.

PROPOSITION ([1] (1.11)).

i) Soit $a_j \in S^{m-j,k}$ $(j=0,1,\dots)$. Il existe $a \in S^{m,k}$ tel que pour tout N,

$a - \sum_{j<N} a_j \in S^{m-N,k}$. Deux de ces symboles diffèrent par un symbole de degré $-\infty$ (au sens de [8]).

ii) Soit $a_j \in S^{m-j/2,k-j}$ $(j=0,\dots)$. Il existe $a \in S^{m,k}$ tel que pour tout N,

$a - \sum_{j<N} a_j \in S^{m-N/2,k-N}$. Deux de ces symboles diffèrent par un symbole de $\mathcal{H}^{m-k/2}$.

On en déduit facilement la proposition, très importante pour la suite :

PROPOSITION ([1] (6.1)). L'opérateur $P \in OPS^{m,k}$ a une paramétrix à droite $Q \in OPS^{-m,-k}$ si et seulement si :

i) $\exists Q_1 \in OPS^{-m,-k}$, $PQ_1 = I \pmod{OPS^{-\frac{1}{2},-1}}$

ii) $\forall A \in OP\mathcal{H}^0$, $\exists B \in OP\mathcal{H}^{-m+k/2}$; $PB = A \pmod{OP\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}}$.

Nous utiliserons cette proposition avec $k=2$ pour démontrer b) $\Longrightarrow$ a). Faisons tout de suite la

Remarque 3.1.3. - Soit $P \in OPS^{m,k}$ $P' \in OPS^{m,k+1}$. P vérifie ii) $\Longleftrightarrow$ $P'+P$ vérifie ii).

Preuve de a) $\Longrightarrow$ c). - La paramétrix (bilatère) de P est continue de H^s_{comp} dans H^s_{loc} pour tout s. On en déduit c).

III.2. Choix de coordonnées canoniques adaptées.

Nous savons maintenant que notre problème se transpose bien si on transforme P à l'aide d'un opérateur intégral de Fourier elliptique. Nous sommes donc amenés à énoncer la

PROPOSITION 3.2.1. - On suppose que P vérifie les hypothèses du § 0. Posons :

$$\mathbb{R}^n_x = \mathbb{R}^{\nu'}_t \times \mathbb{R}^{n-\nu'}_y$$

et notons l'espace dual :

$$\mathbb{R}^n_\xi = \mathbb{R}^{\nu'}_\tau \times \mathbb{R}^{n-\nu'}_\eta = \mathbb{R}^{\nu'}_\tau \times \mathbb{R}^{\nu''}_{\eta'} \times \mathbb{R}^{n-\nu'-\nu''}_{\eta''} .$$

Il existe une transformation canonique homogène $\Phi : T^*X \longrightarrow T^*\mathbb{R}^n$ transformant localement Σ en la surface Σ' d'équation

$$t = \tau = \eta' = 0$$

et un opérateur intégral de Fourier elliptique F associé à Φ tel que FPF^{-1} s'écrive sous la forme :

$$FPF^{-1} = \sum_{1\le ij\le\nu'} A_{ij} Z_i Z_j^* + B_{ij} Z_i^* Z_j^* + \sum_{\substack{1\le i\le\nu' \\ 1\le k\le\nu''}} C_{ik} Z_i^* Y_k + \sum_{1\le k\ell\le\nu''} D_{k\ell} Y_k Y_\ell + R \tag{3.2.2}$$

$$\text{(modulo } OPS^{m,3}(\mathbb{R}^n, \Sigma'))$$

avec $\quad Z_j = (|D_y|)^{-\frac{1}{2}} \left(- i \dfrac{\partial}{\partial t_j} + i\ t_j\ |D_y|\right)$

$\qquad Y_k = (|D_y|)^{-\frac{1}{2}} \left(-i \dfrac{\partial}{\partial y_k}\right).$

Remarque 3.2.3. - On a aussi la même proposition avec Z et Z^* échangés dans l'expression (3.2.2).

Nous donnons d'abord quelques propriétés de la surface Σ.

LEMME 3.2.4. - *Soit Σ une sous-variété de T^*X, telle que la restriction à Σ de la 2-forme canonique ω soit de rang constant. Le champ de plans tangents à Σ, $T\Sigma \cap T\Sigma^{\perp\omega}$, est intégrable.*

Preuve. - Considérons la variété Σ munie de la forme ω induite, qui est fermée. Les plans $T\Sigma \cap T\Sigma^{\perp\omega}$ sont de dimension constante. On a :

$$X \in T\Sigma \cap T\Sigma^{\perp\omega} \iff \omega(X,Y) = 0 \quad \forall\ Y \in T\Sigma \iff i_X\,\omega = 0.$$

(On note sur la variété Σ, i_X le produit intérieur par le champ X, $\mathcal{L}_X$ la dérivée de Lie, d la différentiation extérieure des formes différentielles ; rappelons la formule $\mathcal{L}_X = di_X + i_X d$).

On déduit de la formule :

$$d\omega(X,Y,Z) = \tfrac{1}{3}\left[\mathcal{L}_X\omega(Y,Z) + \mathcal{L}_Y\omega(Z,X) + \mathcal{L}_Z\omega(X,Y) - \omega([X,Y],Z) - \omega([Z,X],Y) - \omega([Y,Z],X)\right]$$

et du fait que ω est fermée, l'implication

$$X,Y \in T\Sigma \cap T\Sigma^{\perp\omega} \Longrightarrow [X,Y] \in T\Sigma \cap T\Sigma^{\perp\omega}.$$

Donc, le théorème de Frobénius donne le résultat.

LEMME 3.2.5. - *Soit ρ un point d'un ouvert U de $\dot{T}^*X$. On considère une surface conique régulière Σ contenant ρ et définie dans U par*

$$x_j = x_j' = y_k = 0 \quad (j=1,\dots,\nu') \quad (k=1,\dots,\nu'').$$

Les fonctions x_j, x_j', y_k sont supposées réelles C^∞, homogènes de degré $\frac{1}{2}$, et les différentielles dx_j, dx_j', dy_k et la 1-forme canonique linéairement indépendantes. On suppose de plus que sur Σ sont vérifiées les relations :

$$\{x_j, x_{j'}\} = \{x_j, x_{j'}'\} - \delta_{jj'} = \{x_j', x_{j'}'\} = \{x_j, y_k\} = \{x_{j'}', y_k\} = \{y_k, y_\ell\} = 0.$$

Alors, on peut trouver des fonctions $\tilde{y}_k$ combinaisons linéaires à coefficients C^∞ homogènes de degré 0 des y_k telles que Σ soit définie par

$$x_j = x_j' = \tilde{y}_k = 0 \qquad j=1,\dots,\nu' \ ,\ k=1,\dots,\nu''$$

les fonctions $x_j, x_j', \tilde{y}_k$ vérifiant les mêmes relations que plus haut mais en plus

$$\{\tilde{y}_k, \tilde{y}_\ell\} \ \text{nul à l'ordre 2 sur } \Sigma \quad 1 \le k,\ell \le \nu''.$$

Preuve. - Les champs hamiltoniens H_{y_k} et le champ de Liouville (radial) $r\frac{\partial}{\partial r}$ sont linéairement indépendants. D'autre part, soit u une fonction nulle sur Σ ; on a $\{y_k, u\}$ $(k=1,\dots,\nu'')$ nul sur Σ. On en déduit que les champs H_{y_k} forment en tout point de $\Sigma \cap U$ une base de $T\Sigma \cap T\Sigma^{\perp\omega}$. D'après le lemme (3.2.4), ils vérifient le critère d'intégrabilité de Frobénius. Considérons une sous-variété V de Σ telle qu'en tout point de V on ait :

$$T\Sigma = TV \oplus \dot{T}\Sigma \cap T\Sigma^{\perp\omega} \oplus \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right).$$

Sur la sous-variété de Σ, V' engendrée par les courbes intégrales partant de V des champs de $T\Sigma \cap T\Sigma^{\perp\omega}$ il existe un système de champs, $X_1, \ldots, X_{\nu''}$, qui commutent et qui forment en tout point de V' une base de $T\Sigma \cap T\Sigma^{\omega}$ avec :

$$X_\ell = \Sigma\, \alpha_{\ell k}\, H_{y_k}$$

les coefficients $\alpha_{\ell k}$ étant C^∞.

On prolonge les fonctions $\alpha_{\ell k}$ à U en des fonctions $\tilde{\alpha}_{\ell k}$, C^∞, homogènes de degré 0. On pose :

$$\tilde{y}_\ell = \Sigma\, \tilde{\alpha}_{\ell k}\, y_k .$$

On a : $d\tilde{y}_\ell = \Sigma\, \alpha_{\ell k}\, dy_k$ sur V' donc les $d\tilde{y}_\ell$ engendrent le même espace que les dy_k en tout point de V' et, par homogénéité, en tout point de Σ. D'autre part, $\{y_\ell, y_{\ell'}\} = \Sigma\, \alpha_{\ell k}\, \alpha_{\ell' k'}\, \{y_k, y_{k'}\} = 0$ sur V' et donc sur Σ et comme $H_{\{y_\ell, y_{\ell'}\}} = [X_\ell, X_{\ell'}] = 0$ sur V', on a $d\{y_\ell, y_{\ell'}\} = 0$ sur V' et donc sur Σ. Le lemme est démontré.

Ce lemme (3.2.5) montre que l'on peut appliquer à P la proposition (2.4.1) en imposant $\{y_k, y_\ell\}$ $1 \leq k, \ell \leq \nu''$ nul à l'ordre 2 sur Σ. La proposition (3.2.1) découle alors immédiatement des deux lemmes suivants :

LEMME 3.2.6. - <u>Soit</u> ρ <u>un point de</u> Σ, U <u>un voisinage de</u> ρ <u>dans</u> $\dot{T}^*X$. <u>On considère des opérateurs pseudo-différentiels classiques réels de degré</u> $\frac{1}{2}$, X_j, X'_j, Y_k $(j=1,\ldots,\nu')$ $(k=1,\ldots,\nu'')$ <u>définis dans</u> U, <u>nuls à l'ordre un sur</u> Σ. <u>On suppose que les champs hamiltoniens</u> $H_{\sigma(X_j)}$, $H_{\sigma(X'_j)}$, $H_{\sigma(Y_k)}$ <u>et le champ radial</u> $r\frac{\partial}{\partial r}$ <u>sont linéairement indépendants, et d'autre part que les opérateurs</u>

$$[X_j, X_{j'}],\ [X'_j, X'_{j'}],\ [X'_j, X_{j'}] + i\delta_{jj'}I,\ [X_j, Y_k],\ [X'_j, Y_k]$$

<u>s'annulent à l'ordre un sur</u> Σ <u>et</u> $[Y_k, Y_\ell]$ <u>à l'ordre deux</u>.

<u>Alors, il existe des opérateurs pseudo-différentiels classiques réels définis dans un voisinage</u> $U' \subset U$ <u>de</u> ρ $\tilde{X}_j, \tilde{X}'_{j'}, \tilde{Y}_k$ <u>tels que</u> $\tilde{X}_j - X_j, \tilde{X}'_j - X'_j, \tilde{Y}_k - Y_k$ <u>s'annulent à l'ordre deux sur</u> Σ <u>et dans</u> U' :

$$(3.2.7)\qquad [\tilde{X}_j, \tilde{X}_{j'}] \sim [\tilde{X}'_j, \tilde{X}'_{j'}] \sim [\tilde{X}'_j, \tilde{X}_{j'}] + i\delta_{jj'}I \sim [\tilde{X}_j, \tilde{Y}_k] \sim [\tilde{X}_{j'}, \tilde{Y}_k] \sim [\tilde{Y}_k, \tilde{Y}_\ell] \sim 0$$

(<u>On écrit</u> $P \sim Q$ <u>si</u> $P-Q$ <u>est régularisant</u>).

<u>Preuve</u>. - Ce lemme est semblable au lemme (10.10) de [1]. Nous procédons de la même manière et nous utilisons donc une récurrence.

On pose $\tilde{X}_1 = X_1$. Supposons que nous ayons construit $\tilde{X}_j, \tilde{X}'_{j'}$ $(j<p,\ j'<q)$, et que $[\tilde{X}_j, X_p]$ $(j<p)$ et $[\tilde{X}'_{j'}, X_p] + i\delta_{j'p}I$ $(j'<q)$ soient de degré $-N$ et s'annulent à l'ordre $1-2N$ sur Σ. Alors, il existe R classique de degré $-N+\frac{1}{2}$, s'annulant à l'ordre $2-2N$ sur Σ, tel que $[\tilde{X}_j, X_p + R]$ et $[X'_{j'}, X_p + R] + i\delta_{j'p}I$

soit de degré -N-1. Pour cela, on construit le symbole r de R tel que :

$$\{\sigma(\tilde{X}_j), r\} = -i\,\sigma([\tilde{X}_j, X_p])$$

$$\{\sigma(\tilde{X}'_j), r\} = -i\,\sigma([X'_{j'}, X_p] + i\delta_{j'p} I).$$

C'est possible car d'une part les champs hamiltoniens des $\sigma(\tilde{X}_j)$, $\sigma(\tilde{X}'_{j'})$ commutent et engendrent un espace linéairement disjoint de $T\Sigma$ en tout point de Σ ; d'autre part, les seconds membres d'annulent à l'ordre 1-2N sur Σ et satisfont les relations d'intégrabilité (cela découle de l'identité de Jacobi).

Ainsi, par approximations successives, nous obtenons $\tilde{X}_p$. De même, nous pouvons construire $\tilde{X}'_q$ et par récurrence comme dans le lemme (10.10) de [1] nous obtenons les opérateurs $\tilde{X}_j$, $\tilde{X}_{j'}$ $j=1,\dots,\nu'$ et $\tilde{Y}_1$.

Nous pouvons obtenir de la même façon $\tilde{Y}_2,\dots,\tilde{Y}_{\nu''}$ car dans le système différentiel à résoudre, les champs hamiltoniens des $\sigma(\tilde{Y}_k)$ peuvent être tangents à Σ mais les seconds membres correspondants sont nuls à l'ordre 2-2N sur Σ.

Le lemme est ainsi démontré.

LEMME 3.2.8. - <u>Soit comme dans le lemme 3.2.6 des opérateurs</u> $\tilde{X}_j, \tilde{X}'_j, \tilde{Y}_k$ ($j=1,\dots,\nu'$) ($k=1,\dots,\nu''$) <u>vérifiant les relations (3.2.7) et tels que les champs</u> $H_{\sigma(\tilde{X}_j)}$ $H_{\sigma(\tilde{X}'_j)}$ $H_{\sigma(Y_k)}$ <u>et</u> $r\frac{\partial}{\partial r}$ <u>soient linéairement indépendants</u>. <u>Il existe un opérateur intégral de Fourier elliptique transformant</u> $\tilde{Z}_j = \tilde{X}_j + i\tilde{X}'_j$ <u>en</u> $(|D_y|)^{-\frac{1}{2}}(-i\frac{\partial}{\partial t_j} + i\, t_j|D_y|)$ <u>et</u> $\tilde{Y}_k$ <u>en</u> $(|D_y|)^{-\frac{1}{2}}(-i\frac{\partial}{\partial y_k})$.

Nous laissons la preuve au lecteur. Il suffit de suivre la démonstration du lemme (10.18) de [1].

III.3. <u>Opérateurs de Hermite</u>.

Nous allons définir les opérateurs de Hermite qui sont étudiés dans |1| § 5.

Désormais, nous utilisons les notations suivantes. Nous supposons a priori que ν' et ν'' ne sont pas nuls, nous ferons les rectifications convenables si l'un ou l'autre est nul.

<u>Notations 3.3.1</u>. - On pose :

$$X = \mathbb{R}^n_x = \mathbb{R}^{\nu'}_t \times \mathbb{R}^{n-\nu'}_y \qquad Y = \mathbb{R}^{n-\nu'}_y$$

$$T^*X = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^{\nu'}_\tau \times \mathbb{R}^{n-\nu'}_\eta$$

$$T^*Y = \mathbb{R}^{n-\nu'}_y \times \mathbb{R}^{n-\nu'}_\eta = \mathbb{R}^{n-\nu'}_y \times \mathbb{R}^{\nu''}_{\eta'} \times \mathbb{R}^{n-\nu'-\nu''}_{\eta''}.$$

U est le sous-cône de $\dot{T}^*X$ d'équation $\tau = 0$, Σ est le sous-cône de $\dot{T}^*X$ d'équation

$$t = \tau = \eta' = 0$$

qui peut être aussi considéré comme sous-cône de $\dot{T}^*Y$ d'équation $\eta' = 0$.

D'autre part, on note les opérateurs :

$$Z_j = (|D_y|)^{-\frac{1}{2}}(-i\frac{\partial}{\partial t_j} + i\, t_j\, |D_y|)$$

$$Y_k = (|D_y|)^{-\frac{1}{2}} \left(-i \frac{\partial}{\partial y_k}\right)$$

(on note de la même façon Y_k opérateur pseudo-différentiel sur X ou sur Y).

DÉFINITION 3.3.2. - <u>On appelle opérateur de Hermite de degré</u> m, <u>un opérateur</u> $H = H' + R : C_0^\infty(Y) \longrightarrow C^\infty(X)$ <u>où</u> R <u>est un opérateur à noyau</u> C^∞ <u>et</u> H' <u>a une représentation intégrale</u>

$$H'f(x) = (2\pi)^{-n+\nu'} \int e^{iy\eta}\, h(y,t,\eta)\, \hat{f}(\eta)\, d\eta$$

<u>avec</u> $h \in \mathcal{H}^{m+\frac{\nu'}{4}}(U, \dot{T}^*X)$.

Notons que H est continu de $H^s_{comp}(Y)$ dans $H^s_{loc}(X)$ pour tout s réel.

D'autre part, soit Q un opérateur pseudo-différentiel de degré m_1 sur Y, $A \in OPS^{m_2,k}(X,\dot{T}^*Y)$, et H et H' des opérateurs de Hermite de degrés respectifs m et m', tous proprement supportés. Alors, $H \circ Q$ et $A \circ H$ sont des opérateurs de Hermite de degré respectifs $m+m_1$ et $m+m_2 - \frac{1}{2}k$, $H^* \circ H'$ est un opérateur pseudo-différentiel sur Y de degré $m+m'$ et $H \circ H'^*$ appartient à $OP\mathcal{H}^{m+m'}(X,\dot{T}^*Y)$.

LEMME 3.3.3. - <u>Soit</u> H <u>un opérateur de Hermite de degré</u> 0 <u>et</u> A <u>un opérateur pseudo-différentiel classique de degré</u> m <u>sur</u> X <u>(tous deux proprement supportés). Il existe un opérateur pseudo-différentiel classique</u> B <u>de degré</u> m <u>sur</u> Y <u>tel que</u> $AH - HB$ <u>soit un opérateur de Hermite de degré</u> $m - \frac{1}{2}$ <u>et qu'on ait</u> $\sigma(B) = \sigma(A)|_{T^*Y}$.

<u>Démonstration</u>. - On remarque qu'on peut écrire $A = A_0 + A_1$, A_0 et A_1 étant des opérateurs pseudo-différentiels classiques tels que le symbole de A_0 soit indépendant de t et τ et A_1 appartienne à $OPS^{m,1}(X,T^*Y)$. On choisit B comme un opérateur pseudo-différentiel sur Y ayant pour symbole le symbole de A_0. On a donc : $\sigma(B) = \sigma(A)|_{T^*Y}$ et d'autre part A_1H et A_0H-HB sont des opérateurs de Hermite de degré $m-\frac{1}{2}$, d'où le résultat.

Nous utiliserons particulièrement les opérateurs de Hermite suivants.

DÉFINITION 3.3.4. - <u>On note</u> $H_\alpha (\alpha \in \mathbb{N}^{\nu'})$ <u>l'opérateur de Hermite de degré</u> 0 <u>défini ainsi</u> :

$$h_k(u) = \pi^{-\frac{1}{4}} (2^k k!)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial u} - u\right)^k \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \quad k \in \mathbb{N}$$

<u>est la k-ième fonction de Hermite</u>. <u>On pose</u> :

$$h_\alpha(t,\eta) = |\eta|^{\frac{\nu'}{4}} h_{\alpha_1}(t_1|\eta|^{\frac{1}{2}}) \ldots h_{\alpha_{\nu'}}(t_{\nu'}|\eta|^{\frac{1}{2}})$$

$$H_\alpha f(x) = (2\pi)^{\nu'-n} \int e^{iy\eta}\, h_\alpha(t,\eta)\, \hat{f}(\eta)\, d\eta .$$

Les opérateurs H_α sont des isométries de $L^2(Y)$ sur $L^2(X)$ et on a les relations :

$$(3.3.5)\qquad \begin{aligned} &H_\alpha^* \,.\, H_\beta = \delta_{\alpha\beta}\ \mathrm{Id} \\ &Z_j\ H_\alpha = (2\ (\alpha_j + 1))^{\frac{1}{2}}\ i\ H_{\alpha+<j>} \\ &Z_j^*\ H_\alpha = (2\ \alpha_j)^{\frac{1}{2}}\ i\ H_{\alpha-<j>} \\ &Y_k\ H_\alpha = H_\alpha\ Y_k \end{aligned}$$

($<j>$ est le multi-indice $(0,\dots 1 \dots 0)$ avec 1 à la $j^{\text{ème}}$ place).

Rappelons que les fonctions de Hermite forment une base de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ des fonctions à décroissance rapide et que

$$a = \Sigma\ a_k\ h_k \in \mathcal{S}$$

si et seulement si la suite (a_k) appartient à l'espace de Schwartz $\mathscr{s}$.

Les opérateurs de Hermite vont nous permettre de décomposer les opérateurs de $OP\,\mathcal{H}^m(X,\Sigma)$.

DÉFINITION 3.3.5. - La suite $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^p}$ d'opérateurs de $OP\mathcal{H}^m(Y,\Sigma)$ est dite à décroissance rapide si pour toute semi-norme N définissant la topologie de $\mathcal{H}^m$, la suite $N(\sigma(A_\alpha))$ appartient à $\mathscr{s}$.

PROPOSITION. -

i) Soit $(A_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^{\nu'} \times \mathbb{N}^{\nu'}}$ une suite à décroissance rapide d'opérateurs de $OP\mathcal{H}^m(Y,\Sigma)$. Il existe une suite $B_{\alpha\beta}$ avec $B_{\alpha\beta} \sim A_{\alpha\beta}$ telle que l'opérateur $\Sigma\ H_\alpha\ B_{\alpha\beta}\ H_\beta^* \in OP\ \mathcal{H}^m(X,\Sigma)$.

ii) Soit $A \in OP\ \mathcal{H}^m(X,\Sigma)$; il existe une suite à décroissance rapide d'opérateurs de $OP\mathcal{H}^m(Y,\Sigma)$, $A_{\alpha\beta}$ avec $A_{\alpha\beta} \sim H_\alpha^*\ A\ H_\beta$ telle que $A - \Sigma\ H_\alpha\ A_{\alpha\beta}\ H_\beta^*$ ait un noyau C^∞.

Preuve. -

i) On choisit $B_{\alpha\beta} \sim A_{\alpha\beta}$ tel que les opérateurs $B_{\alpha\beta}$ soient uniformément proprement supportés.

Le symbole de $H_\alpha\ B_{\alpha\beta}\ H_\beta^*$ est

$$P_{\alpha\beta}(x,\xi) = ((2\pi)^{\nu'-n} \int e^{iz\zeta}\ h_\alpha(t,\eta+\zeta)\ b_{\alpha\beta}(y-z,\eta)\ dz\ d\zeta)\, i^{-|\alpha|}\ h_\beta(\tau,\eta|\eta|^{-2})\ e^{-it\tau}$$

On voit que $H_\alpha\ B_{\alpha\beta}\ H_\beta^* \in OP\ \mathcal{H}^m(X,\Sigma)$ et qu'on peut donner un sens à la somme $\Sigma\, H_\alpha\, B_{\alpha\beta}\, H_\beta^* \in OP\,\mathcal{H}^m(X,\Sigma)$.

ii) On calcule le symbole de $H_\alpha^*\ A\ H_\beta$

$$q_{\alpha\beta}(y,\eta) = \int e^{i<y-y',\hat{\eta}-\eta>+t.\tau}\, h_\alpha(t,\hat{\eta})\, i^{-|\beta|}\ h_\beta(\tau,\eta|\eta|^{-2})\ a(t,y',\tau,\eta)\,dy'\,dt\,d\tilde{\eta}\,d\tau.$$

On en déduit que $(H_\alpha^*\ A\ H_\beta)$ est une suite à décroissance rapide d'opérateurs de $OP\ \mathcal{H}^m(X,\Sigma)$. On choisit les opérateurs $A_{\alpha\beta} \sim H_\alpha^*\ A\ H_\beta$ uniformément proprement supportés et on peut considérer $\Sigma\ H_\alpha\ A_{\alpha\beta}\ H_\beta^*$. De l'égalité $I = \Sigma\ H_\alpha\ H_\alpha^*$, on déduit que $A - \Sigma\ H_\alpha\ A_{\alpha\beta}\ H_\beta^*$ a un noyau C^∞ .

Remarque. - Si $\nu''=0$ on a la même proposition en remplaçant $OP\,\mathcal{H}^m(Y,\Sigma)$ par $OPS^m(Y)$ (les opérateurs de type 1,0 sur Y, voir [8]).

III.4. Nécessité des conditions c) ⟹ b).

Nous utilisons les notations (3.3.1).

Cas $\nu'=0$.

La surface $\Sigma \subset \dot{T}^*X = \dot{T}^*Y$ est alors involutive. Ce cas a été étudié dans [1] § 7. On se ramène à l'étude d'un opérateur quasi-homogène ; ceux-ci ont été étudiés dans [10]. Donnons quelques définitions

On dit qu'une fonction $a(y,\eta',\eta'')$ est (1,2) quasi-homogène de poids m si pour tout $\lambda>0$

$$a(y,\lambda\eta',\lambda^2\eta'') = \lambda^m a(y,\eta',\eta'').$$

Un ouvert est dit (1,2) quasi-conique s'il est stable sous les dilatations $\lambda.(y,\eta',\eta'') \longrightarrow (y,\lambda\eta',\lambda^2\eta'')$.

On dit qu'un opérateur pseudo-différentiel Q est quasi-homogène de degré m, si son symbole total admet un développement asymptotique

$$q(y,\eta) = \sum_{j\in\mathbb{N}} q_{m-j}(y,\eta)$$

les fonctions q_{m-j} étant (1,2) quasi-homogènes de poids $m-j$ (pour une définition d'opérateurs quasi-homogènes plus généraux voir [10]).

On note $\sigma'(Q)=q_m$ le symbole principal quasi-homogène de Q et si $\sigma'(Q)$ est non nul, Q est dit quasi-homogène elliptique.

Remarque 3.4.1. - Un opérateur (1,2)-quasi-homogène de degré m appartient à $OPS^{\frac{1}{2}m+1,2}(Y,\Sigma)$.

LEMME 3.4.2. - *Soit A un opérateur pseudo-différentiel classique de degré m sur Y. On peut écrire :*

$$A = A_0 + A_1$$

avec A_0 (1,2) quasi-homogène de degré $2m$

$$A_1 \in OPS^{m,1}(Y,\Sigma).$$

Preuve. - On décompose le symbole principal a_m de A de la manière suivante :

$$a_m(y,\eta',\eta'') = a_0(y,\eta'') + \eta' a_1(y,\eta',\eta'')$$

A_0 est déterminé par son symbole a_0 et on vérifie que $A_1 = A - A_0 \in OPS^{m,1}(Y,\Sigma)$ en notant $OPS^{m-1,0} \subset OPS^{m,1}$.

Grâce à ce lemme, nous pouvons supposer que P est un opérateur (1,2) quasi-homogène de degré $2m-2$ dans un voisinage de ρ. Son symbole principal quasi-homogène est, avec les notations de (2.4.1) :

$$\sigma'(P) = r(y,0,\eta'') + \sum_{1\le k,\ell\le\nu''} d_{k\ell}(y,0,\eta'')\,|\eta''|^{-1}\,\eta'_k\,\eta'_\ell\,.$$

Remarque 3.4.3. - Quel que soit le voisinage conique U de $\rho=(y_0,0,\eta''_0)$, quel que soit $\eta'_0 \in R^{\nu''}$ il existe un voisinage (1,2) quasi-conique V de (y_0, η'_0, η''_0) tel que pour C assez grand :

$$V \cap \{|\eta| > C\} \subset U \cap \{|\eta| > C\} .$$

La condition b) exprime que P est quasi-homogène elliptique dans un voisinage conique de ρ.

La proposition (7.5) de [1] montre que si la condition b) n'est pas vérifiée, il existe une distribution u dont le front d'onde est concentré sur l'axe passant par ρ telle que $Pu \in H^{\varepsilon}_{loc}$ pour un $\varepsilon > 0$ mais $u \notin H^{m-1}_{loc}$ ce qui contredit c).

En fait, L. Hörmander [9] démontre qu'on a alors une perte d'au moins 9/8 dérivées.

Cas $\nu' \neq 0$.

PROPOSITION 3.4.4. - Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^{\nu'}$ on peut écrire

$$PH_\alpha = \Sigma\, H_\beta\, Q_{\alpha\beta} \text{ (mod Hermite } m-3/2)$$

les opérateurs sur Y, $Q_{\alpha\beta}$ étant (1,2) quasi-homogènes de degré 2m-2 avec

- $Q_{\alpha\beta} = 0$ si $|\beta| \neq |\alpha|, |\alpha| - 1, |\alpha| - 2$
- la matrice $\sigma'(Q_{\alpha\beta})$ (on ordonne les $\alpha(\beta)$ par longueur croissante et à longueur égale par ordre lexicographique) est triangulaire inférieure au point ρ
- $\sigma'(Q_{\alpha\alpha}) = 2 \sum_1^{\nu'} \alpha_j\, \lambda_j(y,0,\eta'') + r(y,0,\eta'') + \sum_{1 \leq k,\ell \leq \nu''} d_{k\ell}\,(y,0,\eta'')\, |\eta''|^{-1}\, \eta'_k\, \eta_\ell$ (avec les notations de (2.4.1)).

Preuve. - Elle découle immédiatement des propositions 2.4.1, 2.4.5 et 3.2.1, des relations 3.3.5 et des lemmes 3.3.3. et 3.4.2.

Remarque 3.4.5. - Si $\nu'' = 0$ on a la même proposition, les opérateurs $Q_{\alpha\beta}$ étant alors classiques de degré m-1 avec

$$\sigma(Q_{\alpha\alpha}) = 2 \sum_1^{\nu'} \alpha_j\, \lambda_j(y,\eta) + r(y,\eta).$$

Supposons que la condition b) ne soit pas vérifiée en $\rho = (y_0, 0, \eta''_0)$. Cela signifie qu'il existe un multi-indice α_0 tel que $\sigma'(Q_{\alpha_0\alpha_0})$ s'annule en un point (y_0, η'_0, η''_0).

On suppose que α_0 est le premier de ces multi-indices pour l'ordre défini plus haut (3.4.4) et on considère le système d'opérateurs pseudo-différentiels $Q = (Q_{\beta\alpha})_{|\alpha|,|\beta| \leq |\alpha_0|}$ (noter l'ordre β, α). Au point ρ la matrice $Q_{\beta\alpha}$ est donc triangulaire supérieure modulo $OPS^{m,3}(Y,\Sigma_\rho)$ (Σ_ρ est l'axe passant par ρ). On peut trouver une distribution (à valeurs vectorielles) $U = (u_\alpha)_{|\alpha| \leq |\alpha_0|}$ appartenant à $H^0(Y)$ mais n'appartenant pas à $H^{\varepsilon}(Y)$ pour tout $\varepsilon > 0$ et telle que $QU \in H^{-m+1+\frac{1}{8}}$. En effet, on prend $u_\alpha = 0$ pour $\alpha > \alpha_0$, on construit u_{α_0} comme dans le lemme (7.5) de [1] et ensuite, on obtient u_α pour $\alpha < \alpha_0$ par récurrence utilisant le fait que $Q_{\alpha\alpha}$ est quasi-homogène elliptique pour $\alpha < \alpha_0$.

On pose alors $u = \sum_{|\alpha| \leq |\alpha_0|} H_\alpha u_\alpha$, et on a donc $u \in H^0(X)$. Les opérateurs de Hermite de degré $m - \frac{3}{2}$ envoyant $H^0(Y)$ dans $H^{-m+\frac{3}{2}}(X)$, nous pouvons les oublier. On a

$$Pu = \sum_{|\alpha| \leq |\alpha_0|} \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} H_\beta Q_{\alpha\beta} u_\alpha = \sum_{|\beta| \leq |\alpha_0|} H_\beta \sum_{|\alpha| \leq |\alpha_0|} Q_{\alpha\beta} u_\alpha = \sum_{|\beta| \leq |\alpha_0|} H_\beta (QU)_\beta$$

Donc, $Pu \in H^{-m+1+\frac{1}{8}}$ dans un voisinage ouvert conique de ρ, alors que u n'appartient pas à H^ε pour tout $\varepsilon > 0$ (car $u_\alpha = H^*_\alpha u$ et $(u_\alpha) \notin H^\varepsilon$) dans n'importe quel voisinage ouvert conique de ρ .

Nous avons montré c) $\Longrightarrow$ b).

Dans le cas $\nu'' = 0$, on considère un système Q d'opérateurs pseudo-différentiels classiques de degré $m-1$ et on obtient alors une perte d'au moins $\frac{3}{2}$ dérivées (voir [1], § 8).

III.5. Suffisance des conditions b) $\Longrightarrow$ a).

On remarque d'après la proposition (2.3.1) que P vérifie la condition b) si et seulement si P^* la vérifie. Il nous suffit donc de montrer que P a une paramétrix à droite.

Nous utilisons la proposition (6.1) de [1] que nous avons rappelée en III.1. Montrons d'abord que P vérifie la condition i) de [1] (6.1).

LEMME 3.5.1. - Il existe $Q \in OPS^{-m,2}(X,\Sigma)$ tel que

$$PQ = I \mod OPS^{-\frac{1}{2},-1} .$$

Preuve. - Il suffit de construire un symbole $q \in S^{-m,2}(X,\Sigma)$ tel que $p.q = 1 \mod S^{-\frac{1}{2},-1}$. On utilise des partitions de l'unité. En dehors de Σ, il n'y a pas de problème, on peut poser $q = (p_m)^{-1}$. Soit ρ un point de Σ ; il existe un voisinage conique U de ρ tel que pour (x,ξ) dans U, $p_m(x,\xi)$ reste dans un cône Γ de $\mathbb{C}$ (d'après l'hypothèse sur le hessien de p_m). Soit $\theta \in \Gamma - \{0\}$ et b un symbole réel elliptique positif de degré $m-1$. D'après la remarque (1.5) de [1], on a

$$q = (p_m + b\theta)^{-1} \in S^{-m,-2}.$$

D'autre part, $p' = p - p_m - b\theta \in S^{m-1,0}$ et donc

$$p'(p_m + b\theta)^{-1} = pq-1 \in S^{-1,-2} \subset S^{-\frac{1}{2},-1} .$$

Comme pq est égal au symbole de $P \circ Q$ modulo $S^{-\frac{1}{2},-1}$, le lemme est démontré.

Dans le cas $\nu' = 0$, on se ramène comme en III.4 à un opérateur quasi-homogène que la condition b) affirme elliptique dans un voisinage conique de ρ. On pose $q = (\sigma'(P))^{-1}$ et on obtient

$$PQ = 1 \mod OPS^{-\frac{1}{2},0} .$$

La propositon [1] (1.11) i) donne alors une paramétrix à droite pour P. On a donc montre b) = a) dans ce cas.

On suppose maintenant $\nu' \neq 0$ et d'après la remarque 3.1.3, on pourra négliger les opérateurs de Hermite de degré $m - \frac{3}{2}$ pour montrer que P vérifie la condition ii) de [1] (6.1).

PROPOSITION 3.5.2. - <u>Pour tout multi-indice</u> $\alpha \in \mathbb{N}^{\nu'}$ <u>on peut écrire</u>

$$PH_\alpha = \Sigma\, H_\beta\, Q_{\alpha\beta} \ \underline{(\text{mod Hermite}}\ m - \tfrac{3}{2})$$

<u>les opérateurs</u> $Q_{\alpha\beta}$ <u>étant</u> (1,2) <u>quasi-homogènes de degré</u> 2m-2 <u>sur</u> Y, <u>avec</u>

- $Q_{\alpha\beta} = 0$ <u>si</u> $|\beta| \neq |\alpha|,\ |\alpha| + 1,\ |\alpha| + 2$
- <u>la matrice</u> $\sigma'(Q_{\alpha\beta})$ <u>triangulaire supérieure au point</u> ρ
- $\sigma'(Q_{\alpha\alpha}) = 2 \sum_{1}^{\nu'} \alpha_j\, \lambda_j(y, 0, \eta'') + r(y, 0, \eta'') +$

$$+ \sum_{1 \leq k,\ell \leq \nu''} d_{k\ell}(y, 0, \eta'')\, |\eta''|^{-1}\, \eta'_k\, \eta'_\ell\ .$$

Cette proposition s'obtient comme la proposition 3.4.4.

La condition b) exprime que les opérateurs $Q_{\alpha\alpha}$ sont quasi-homogènes elliptiques, dans un voisinage conique de ρ et donc que les systèmes $Q_p = (Q_{\beta\alpha})_{|\alpha|,|\beta| \leq p}$ sont inversibles dans un voisinage conique de ρ. En remarquant que $\sigma'(Q_{\alpha\alpha})$ tend vers l'infini quand $|\alpha|$ tend vers l'infini, et que la matrice est "presque triangulaire", on peut voir que ce voisinage peut être pris indépendant de p.

On veut résoudre l'équation

$$PB = A \ (\text{mod}\ \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}).$$

Utilisant la proposition (3.3.7), on obtient pour les décompositions de A et de B

$$\sum_{\alpha,\gamma} P\, H_\alpha\, B_{\alpha\gamma}\, H^*_\gamma = \sum_{\beta,\gamma} H_\beta\, A_{\beta\gamma}\, H^*_\gamma$$

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma} H_\beta\, Q_{\alpha\beta}\, B_{\alpha\gamma}\, H^*_\gamma = \sum_{\beta,\gamma} H_\beta\, A_{\beta\gamma}\, H^*_\gamma\ .$$

Il suffit donc de résoudre le système

$$\sum_{|\alpha| \leq |\beta|} Q_{\alpha\beta}\, B_{\alpha\gamma} = A_{\beta\gamma}$$

ce qui est équivalent à inverser Q_p, pour tout p, dans un voisinage conique de ρ indépendant de p.

Comme $\sigma'(Q_{\alpha\alpha})$ tend vers l'infini quand $|\alpha|$ tend vers l'infini la solution $(B_{\alpha\gamma})$ obtenue est à décroissance rapide.

On a montré b) $\Longrightarrow$ a).

RÉFÉRENCES

[1] BOUTET DE MONVEL L. - Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators. Comm. on P. and A. Math. 27 (1974), p. 585-639.

[2] BOUTET DE MONVEL L. et TREVES F. - On a class of pseudo-differential operators with double characteristics. Invent. Math. 24 (1974), p. 1-34.

[3] BOUTET DE MONVEL L. et TREVES F. - On a class of systems of pseudo-differential operators. Comm. on P. and A. Math. 27 (1974), p. 59-89.

[4] DUISTERMAAT J.J. - Fourier integral operators. Courant Institute of Math. N.Y.U. (1973).

[5] DUISTERMAAT J.J. et HÖRMANDER L. - Fourier integral operators II. Acta Math. 128 (1972), p. 183-269.

[6] GRUŠIN V.V. - On a class of hypoelliptic operators. Mat. Sbornik 83 (1970), p. 456-473. (Math. USSR Sbornik 12 (1970), p. 458-476).

[7] GRUŠIN V.V. - On a class of hypoelliptic pseudo-differential operators degenerate on a manifold. Mat. Sbornik 84 (1971), p. 163-195. (Math. USSR Sbornik 13 (1971) p. 155-185).

[8] HÖRMANDER L. - Fourier integral operators I. Acta Math. 127 (1971) p. 79-183.

[9] HÖRMANDER L. - A class of hypoelliptic pseudo-differential operators with double characteristics. (1975), à paraître.

[10] LASCAR R. - Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-différentielles quasi-homogènes. Thèse 3ème cycle. Univers. Paris VI.

[11] MELIN A. - Lower bounds for pseudo-differential operators. Arkiv for Mat. 9 (1971), p. 117-140.

[12] RADKEVIC E.V. - A priori estimates and hypoelliptic equations with multiple characteristics. Dokl. Akad. Nauk SSSR 187 (1969), p. 274-277. (Soviet Math. Dokl. 10 (1969), p. 849-853).

[13] SJÖSTRAND J. - Parametrices for pseudo-differential operators with multiple characteristics. Arkiv for Mat. 12 (1974), p. 85-130.

Alain GRIGIS

Mathématiques - Bâtiment 425
Université de Paris XI
91405 ORSAY