

DOMINIQUE GOUYOU-BEAUCHAMPS

BERNARD VAUQUELIN

Deux propriétés combinatoires des nombres de Schröder

Informatique théorique et applications, tome 22, n° 3 (1988),
p. 361-388

http://www.numdam.org/item?id=ITA_1988__22_3_361_0

© AFCET, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Informatique théorique et applications » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DEUX PROPRIÉTÉS COMBINATOIRES DES NOMBRES DE SCHRÖDER (*)

par Dominique GOUYOU-BEAUCHAMPS ⁽¹⁾ et Bernard VAUQUELIN ⁽¹⁾

Communiqué par R. CORI

Résumé. - Nous montrons que le nombre de Schröder $R_n = \sum_{i=0}^n \binom{2n-i}{i} C_{n-i}$ (où C_n est le nombre de Catalan $(2n)!/n!(n+1)!$) peut s'exprimer sous la forme

$$R_{n+1} = 2 \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 3^{n-2i} 2^i \binom{n}{2i} C_i$$

Nous en déduisons qu'une classe de chemins sous-diagonaux colorés est énumérée par $(R_n R_{n+2} - R_{n+1} R_{n+1})/2$. Les preuves présentées sont purement bijectives et utilisent comme objets intermédiaires des arbres ou des chemins dans le plan.

Abstract. - We establish that the Schröder number $R_n = \sum_{i=0}^n \binom{2n-i}{i} C_{n-i}$ (where C_n is the Catalan number $(2n)!/n!(n+1)!$) satisfies the formula:

$$R_{n+1} = 2 \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 3^{n-2i} 2^i \binom{n}{2i} C_i$$

As a corollary we prove that $(R_n R_{n+2} - R_{n+1} R_{n+1})/2$ counts a family of coloured lattice paths. Proofs are purely bijective and use intermediate objects as trees and paths in the plane.

I. INTRODUCTION

Lorsqu'on étudie les arbres ou les chemins sous-diagonaux, on rencontre souvent trois suites de nombres : les nombres de Catalan, les nombres de Motzkin et les nombres de Schröder.

(*) Reçu septembre 1986, forme révisée juin 1987.

⁽¹⁾ Université de Bordeaux-I, U.E.R. de Mathématiques et Informatique, Unité associée au C.N.R.S. n° 226, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France.

Les nombres de Catalan $C_n = (2n)!/n!(n+1)!$ sont les plus connus et ont fait l'objet d'une abondante littérature (cf. les bibliographies de Alter [1], Brown [2] et Gould [11]). Ils énumèrent les mots de longueur $2n$ du langage algébrique D sur l'alphabet $\{x, \bar{x}\}$ dont l'équation est :

$$D = 1 + x D \bar{x} D \quad (1)$$

[ce qui par passage en commutatif donne la série énumératrice $d(x) = 1 + x d^2(x)$]. Ce langage est appelé *langage de Dyck* et est relié au *langage de Lukasiewicz* L_2 par la relation $L_2 = D\bar{x}$ (L_2 est le langage des expressions arithmétiques préfixées où l'on se restreint à un seul opérateur binaire x et à un seul type d'opérande \bar{x}).

Les nombres de Motzkin $M_n = \sum_{i=0}^{n/2} \binom{n}{2i} C_i$ sont aussi connus mais la bibliographie les concernant est moins abondante (cf. [6, 4, 5, 17, 24, 28]). Ils énumèrent les mots de longueur n du langage algébrique M , dit de Motzkin, sur l'alphabet $\{x, \bar{x}, y\}$ dont l'équation est :

$$M = 1 + y M + x M \bar{x} M \quad (2)$$

[ce qui par passage en commutatif donne la série énumératrice $m(x) = 1 + x m(x) + x^2 m^2(x)$]. On retrouve les nombres de Motzkin dans l'énumération de différentes familles d'arbres (zig-zag trees [4], branch-reduced plane trees [4], Y-branching plane trees [4], arbres de degré maximal 3 [17], arbres avec boucles [6], arbres sans sommet d'arité 1 [4]), des partitions d'un polygone [24], de chemins sous-diagonaux avec pas diagonal [6, 22], de familles de graphes bipartis [6], de certains parenthésages [5], d'animaux dirigés à une seule source [45, 14].

Quant aux nombres de Schröder $R_n = \sum_{i=0}^n \binom{2n-i}{i} C_{n-i}$, bien qu'aussi anciens que les précédents, ils apparaissent beaucoup moins dans la littérature (cf. [31, 33, 34, 20, 21, 22]). Ils énumèrent les mots de longueur $2n$ du langage algébrique R sur l'alphabet $\{x, \bar{x}, y\}$ dont l'équation est :

$$R = 1 + y y R + x R \bar{x} R \quad (3)$$

ce qui par passage en commutatif donne la série énumératrice

$$r(x) = 1 + x r(x) + x r^2(x). \quad (4)$$

Ces nombres comptent aussi certains chemins sous-diagonaux [29, 20, 21], des arbres avec boucles [29], des « hiérarchies de segments » [21], certaines partitions d'un cycle [20], les arbres dont les feuilles sont bicolorées [33], des permutations que l'on peut trier avec une file à double entrée [18, 34]. A la suite R_n est associée la suite S_n définie par $S_0 = 1$ et $2S_n = R_n$. C'est cette suite comptant certains parenthésages d'expressions arithmétiques qui est due à Schröder (1870 [37]) (cf. aussi Riordan [26]). Elle correspond à la série génératrice $s(x)$ vérifiant

$$s(x) = 1 + xs(x)(2s(x) - 1). \tag{5}$$

Les premiers termes de la suite R_n sont :

$$1, 2, 6, 22, 90, 394, 1806, 8558, 41586, 206098, \dots$$

et ceux de la suite S_n :

$$1, 1, 3, 11, 45, 197, 903, 4279, 20793, 103049, \dots$$

Si on résout les équations (4) et (5), on obtient pour les séries $r(x)$ et $s(x)$ les expressions :

$$r(x) = \frac{(1-x) - (x^2 - 6x + 1)^{1/2}}{2x} \quad \text{et} \quad s(x) = \frac{(1+x) - (x^2 - 6x + 1)^{1/2}}{4x},$$

ce qui permet de calculer les valeurs suivantes pour R_n et S_n :

$$R_n = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{3^{2i}} \binom{n-i+1}{i} C_{n-i}$$

et

$$S_n = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{3^{2i}} \binom{n-i+1}{i} C_{n-i} \quad \text{pour } n \geq 1$$

et $S_0 = 1$. R_n apparaît donc comme une somme dont les termes, à signes alternés, sont interprétés combinatoirement dans [21], p. 17-18.

Le but de cet article est une étude bijective des nombres de Schröder, en liaison avec celle des nombres de Motzkin, et basée sur la notion de « buisson ». Il présente une formule proche de la précédente pour R_n :

$$R_{n+1} = 2 \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 3^{n-2i} 2^i \binom{n}{2i} C_i \quad \text{pour } n \geq 0. \tag{6}$$

Cette formule est démontrée ici de manière bijective mais elle revient à donner de développement en fraction continuée de Jacobi de la série génératrice des nombres de Schröder. Cette étude poursuit celle de Donaghey, Rogers et Shapiro [6, 31, 33, 30, 34, 29]. On pourra remarquer que la formule (6) peut être rapprochée de la formule de Touchard ([40, 35]) :

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^{n-2i} \binom{n}{2i} C_i.$$

Ainsi après avoir rappelé un certain nombre de définitions au paragraphe 2, nous allons donner une bijection entre une classe d'arbres que nous appellerons buissons (bushes) ayant $2n-i+1$ arêtes et $n+1$ feuilles et les mots du langage de Motzkin M ayant $n-i$ lettres x et i lettres y . Cette bijection directe est due à R. Cori et peut être reconstruite en composant des bijections dues à Donaghey [4], Rogers [30, 31], Rogers et Shapiro [33, 34]. Nous montrons en outre qu'elle prouve aussi que les nombres de Schröder comptent les arbres ayant leurs feuilles colorées avec deux couleurs. D'autres preuves de ce résultat peuvent être trouvées dans [4, 31, 33 et 34]. Comme la répartition des arbres selon le nombre de feuilles est la même que celle des arbres suivant le nombre d'arêtes de hauteur impaire (cf. par exemple [42] et [43]) nous pouvons, dans le troisième paragraphe, en utilisant [8] et [43], donner un développement en fraction continuée de type Stieltjes pour $r(x)$ et la valeur du déterminant de Hankel :

$$H_n = \begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_n \\ R_1 & R_2 & \dots & R_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_n & R_{n+1} & \dots & R_{2n} \end{bmatrix}$$

Au quatrième paragraphe nous démontrons bijectivement la formule (6) et nous en tirons la fraction continuée de type Jacobi pour la série $t(x) = (s(x) - 1)/x$. Enfin, au cinquième paragraphe, nous démontrons que le nombre de chemins sous-diagonaux de longueur $2n$, partant de l'origine et y retournant en utilisant uniquement des pas Nord, Sud, Est et Ouest avec une coloration qui dépend du point de départ de chaque pas, est égal à $(R_n R_{n+2} - R_{n+1}^2)/2$. Cette dernière étude est à rapprocher d'une étude analogue faite pour les nombres de Catalan dans [13].

II. DÉFINITIONS ET RAPPELS

Le *shuffle* de deux mots f et g d'un monoïde A^* est le sous-ensemble noté $f \sqcup g$ de tous les mots h tels que $h = f_1 g_1 f_2 g_2 \dots f_n g_n$, tous les f_i et g_i appartenant à A^* , et $f = f_1 f_2 \dots f_n$, $g = g_1 g_2 \dots g_n$. Ce produit (quelquefois appelé *produit d'intercalement*) est étendu aux langages de la façon suivante : pour deux langages B et C sur A^* , $B \sqcup C = \bigcup_{\substack{f \in B \\ g \in C}} f g$.

On appelle *langage de Schröder* le langage algébrique R vérifiant l'équation (3). Le langage de Motzkin M défini par l'équation (2) peut être vu comme le shuffle du langage de Dyck D avec le langage y^* :

$$M = D \sqcup y^*. \tag{7}$$

Il est facile de mettre en bijection les mots de longueur $2n$ ayant $2i$ lettres y du langage de Schröder avec les mots de longueur $2n-i$ ayant i lettres y du langage de Motzkin : il suffit de remplacer chaque y d'un mot de Motzkin par deux y consécutifs.

De la définition de M par (7) on peut tirer que le nombre de mots de Motzkin de longueur $2n-i$ ayant i lettres y est $\binom{2n-i}{i} C_{n-i}$; on obtient ainsi que le nombre R_n de mots de Schröder de longueur $2n$ est

$$R_n = \sum_{i=0}^n \binom{2n-i}{i} C_{n-i}.$$

On appelle *buissons* (branch reduced plane trees ou bushes dans [4]) les arbres ayant au moins une arête et dont aucun sommet, sauf éventuellement la racine, n'est de degré 2 (on appelle degré d'un sommet le nombre d'arêtes dont ce sommet est une des extrémités).

LEMME 1 : *Il existe une bijection entre les buissons ayant $2n-i+1$ arêtes et $n+1$ feuilles et les mots de Motzkin de longueur $2n-i$ ayant i lettres y .*

Preuve : Nous allons donner une preuve de ce résultat due à R. Cori.

On code les buissons en les parcourant suivant l'ordre préfixe et en écrivant une lettre x lorsqu'on rencontre une arête pour la première fois et une lettre \bar{x} lorsqu'on rencontre une arête pour la deuxième fois. On obtient ainsi un mot f du langage de Dyck ayant $4n-2i+2$ lettres si le buisson a $2n-i+1$ arêtes. Cependant tous les mots du langage de Dyck ne codent pas un buisson puisqu'ils codent les arbres généraux. Pour qu'un mot de Dyck $f \neq 1$ code un

buisson il faut et suffit qu'il ne contienne pas de facteur f' de la forme $xxf''\bar{x}\bar{x}$ avec f'' appartenant à D .

Soit L le langage formé par les mots qui codent un buisson. Soit A un buisson et f le mot codant A , 4 cas peuvent alors se présenter :

- Cas 1 : A est réduit à une seule arête, ce qui implique que $f = x\bar{x} \in L$.
- Cas 2 : A est de la forme (fig. 1) :

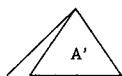


Figure 1

ce qui veut dire que la racine de A possède au moins deux fils et que son premier fils est une feuille. A' est encore un buisson codé par f' ; donc $f = x\bar{x}f'$ avec $f' \in L$. Ainsi $x\bar{x}L \subset L$.

- Cas 3 : Soit A est de la forme (fig. 2) :

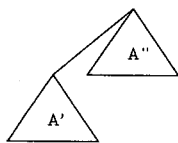


Figure 2

avec A'' non vide, ce qui veut dire que la racine de A possède au moins deux fils et que le premier fils n'est pas une feuille. A' et A'' sont encore des buissons. Mais on remarque que la racine de A' ne doit pas être de degré 1, c'est-à-dire que A' ne doit pas être de la forme (fig. 3) :

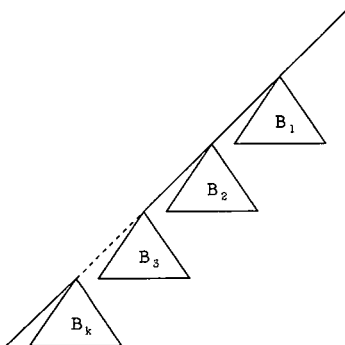


Figure 3

avec $k \geq 0$ et les B_i étant des buissons. Donc si A' est codé par f' , A'' par f'' et B_i par g_i , f s'écrit $f = xf' \bar{x} f''$ avec f' ne pouvant être de la forme $f' = xx^k \bar{x} g_k \bar{x} g_{k-1} \dots \bar{x} g_1 \bar{x}$ où f' , f'' , g_1, \dots, g_{k-1} et g_k appartiennent à L . Ainsi on a :

$$(xL\bar{x}L - xx(\sum_{k \geq 0} x^k(\bar{x}L)^k)\bar{x}\bar{x}L) \subset L,$$

— Cas 4 : Soit A est de la forme (fig. 4) :

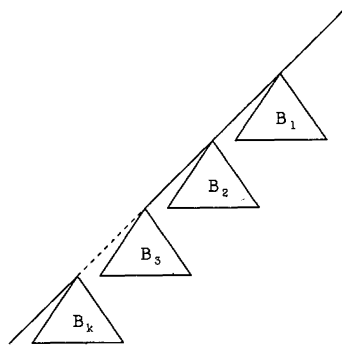


Figure 4

avec $k > 0$ et les B_i étant des buissons, ce qui veut dire que A possède au moins deux arêtes et que sa racine est de degré 1. Donc si B_i est codé par g_i , f s'écrit $f = x^{k+1} \bar{x} g_k \bar{x} g_{k-1} \dots \bar{x} g_1 \bar{x}$ avec g_1, \dots, g_{k-1} et g_k dans L . Ainsi on a :

$$x(\sum_{k > 0} x^k(\bar{x}L)^k)\bar{x} \subset L.$$

Pour chacun des cas, la décomposition de A en sous-arbres est unique. On obtient alors, pour L , l'équation :

$$L = x\bar{x} + x\bar{x}L + xL\bar{x}L + x(\sum_{k > 0} x^k(\bar{x}L)^k)\bar{x} - xx(\sum_{k \geq 0} x^k(\bar{x}L)^k)\bar{x}\bar{x}L.$$

Si on note L_n le nombre de mots de L de longueur $2n+2$, on remarque que L_n est égal à M_n . En effet le nombre de mots de longueur $2n$ de $x(\sum_{k > 0} x^k(\bar{x}L)^k)\bar{x}$ est égal au nombre de mots de longueur $2n$ de $xx(\sum_{k \geq 0} x^k(\bar{x}L)^k)\bar{x}\bar{x}L$. Ceci est évident si l'on constate que le premier langage est en bijection avec le second par permutation du dernier \bar{x} et du dernier L ,

ce qui correspond à l'opération bijective suivante (fig. 5) :

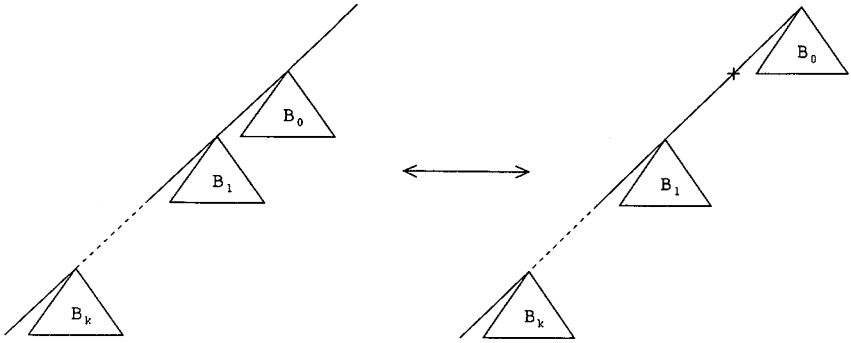


Figure 5

Les nombres L_n et M_n suivent alors la même loi de récurrence :

$$L_n = L_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} L_i L_{n-2-i} \quad \text{et} \quad L_0 = 1, \quad L_{-1} = 0$$

$$M_n = M_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} M_i M_{n-2-i} \quad \text{et} \quad M_0 = 1, \quad M_{-1} = 0.$$

Nous allons donc construire une bijection φ entre les mots de L et ceux du langage de Motzkin. Notons que le langage L ne contient pas le mot vide.

On peut remarquer que le nombre de facteurs $x\bar{x}$ d'un mot de L est égal au nombre de feuilles de l'arbre qu'il code. On peut alors mettre en bijection les mots de L de longueur $4n-2i+2$ ayant $n+1$ facteurs $x\bar{x}$ et les mots de longueur $2n-i$ du langage M défini par (2) qui ont $n-i$ lettres x et i lettres y . Soit φ la bijection définie par les relations de récurrence suivantes :

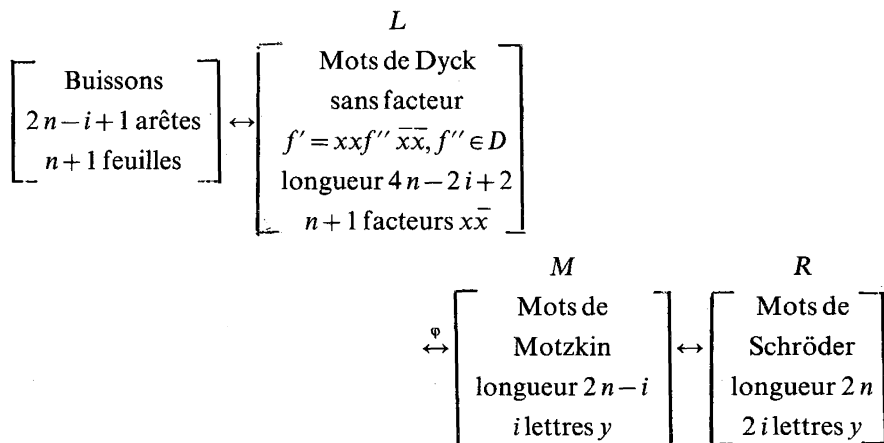
- $\varphi(x\bar{x}) = 1$ (cas 1),
- $\varphi(x\bar{x}f) = y \varphi(f)$ (cas 2),
- $\varphi(xf\bar{x}f') = x \varphi(f) \bar{x} \varphi(f')$ avec $f, x\bar{x}$ et f' dans L (cas 3),
- $\varphi(xx\bar{x}f'\bar{x}) = x \varphi(x\bar{x}) \bar{x} \varphi(f')$ avec $f, x\bar{x}$ et f' dans L (cas 4),
- $\varphi(xx\bar{x}f\bar{x}) = x\bar{x} \varphi(f)$ avec f dans L (cas 4).

On remarque que tous les sous-cas s'excluent car tout mot de L contient au moins deux lettres.

Il est facile de vérifier par récurrence que φ respecte bien la condition sur le nombre de lettres. De plus φ est une bijection car on vérifie que φ^{-1} est définie par les récurrences suivantes :

- $\varphi^{-1}(1) = x\bar{x}$,
- $\varphi^{-1}(yf) = x\bar{x}\varphi^{-1}(f)$,
- $\varphi^{-1}(xf\bar{x}f') = x\varphi^{-1}(f)\bar{x}\varphi^{-1}(f')$ avec $f \neq 1$, f et f' dans M et si $\varphi^{-1}(f)$ n'est pas de la forme $\varphi^{-1}(f) = xf''\bar{x}$ avec f'' dans L ,
- $\varphi^{-1}(xf\bar{x}f') = x\varphi^{-1}(f)\varphi^{-1}(f')\bar{x}$ avec $f \neq 1$, f et f' dans M et si $\varphi^{-1}(f)$ est de la forme $\varphi^{-1}(f) = xf''\bar{x}$ avec f'' dans L ,
- $\varphi^{-1}(x\bar{x}f) = xx\bar{x}\varphi^{-1}(f)\bar{x}$.

Il est facile alors de vérifier que $\varphi^{-1}(\varphi(f)) = f$ pour $f \in L$. En résumé nous avons le diagramme suivant :



Le lemme est donc démontré.

Comme le nombre de mots de M de longueur $2n-i$ ayant $n-i$ lettres x et i lettres y est égal à $\binom{2n-i}{i} C_{n-i}$, ce nombre énumère aussi les buissons ayant $2n-i+1$ arêtes et $n+1$ feuilles.

Nous avons ainsi les 2 corollaires :

COROLLAIRE 2 : *Le nombre de buissons ayant $n+1$ arêtes est égal à M_n .*

COROLLAIRE 3 : *Le nombre de buissons ayant $n+1$ feuilles est égal à R_n .*

On peut noter que les nombres $\binom{2n-i}{i} C_{n-i}$ apparaissent dans les livres de Jordan [16] et de Sloane [38].

La bijection φ introduite au cours de la démonstration du lemme 1 est définie par récurrence. On peut la définir directement d'une façon plus intuitive en utilisant la notion d'arbres à feuilles coloriées. Cette définition est utilisée dans le lemme 4.

Nous appellerons AFC les arbres dont les feuilles sont coloriées avec deux couleurs (0 et 1 par exemple).

LEMME 4 (cf. [30]) : φ est une bijection entre les buissons ayant $n+1$ feuilles et $n-i+1$ sommets internes et entre les AFC ayant n arêtes et i feuilles coloriées 0.

Preuve : Soit A un buisson ayant $n+1$ feuilles et $n-i+1$ sommets internes (et donc $2n-i+1$ arêtes). Pour chacun des $n-i+1$ sommets internes, on marque l'arête la plus à droite qui en est issue.

Pour chaque arête (x, y) marquée (y étant le fils le plus à droite de x), on appelle A' le sous-arbre issu de y . Si A' est différent de l'arbre vide (c'est-à-dire non réduit au sommet y), on marque 1 la feuille la plus à gauche de A' et on contracte l'arête (x, y) , c'est-à-dire qu'on la supprime et qu'on « accroche » A' à la droite du sommet x (cf. fig. 6). Si A' est vide, supprime l'arête (x, y) .

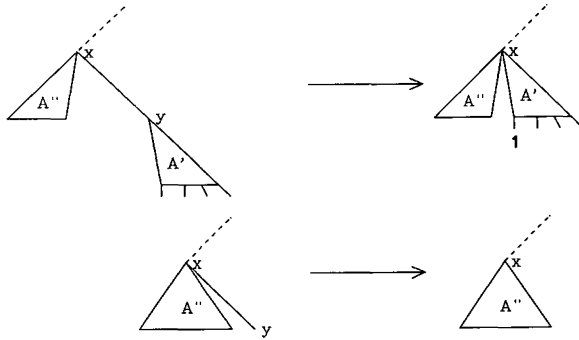


Figure 6

Ensuite toutes les feuilles non marquées sont marquées 0. On obtient bien ainsi un arbre ayant n arêtes et dont les feuilles sont coloriées avec les deux couleurs 0 et 1. Les buissons n'ayant pas de sommet de degré deux, sauf la racine, les feuilles de l'arbre obtenu ne sont coloriées qu'une fois.

On peut aussi constater que, sur le buisson A , il y a une bijection entre les sommets internes (ou les arêtes marquées) et les feuilles qui seront supprimées ou qui seront coloriées 1. Si l'arête marquée est une arête pendante le sommet interne qui est à une de ses extrémités correspond à la feuille qui est à l'autre,

et si l'arête marquée n'est pas une arête pendante le sommet interne qui est le plus proche de la racine correspond à la feuille la plus à gauche (coloriée 1) du sous-arbre qui est accroché à l'autre extrémité. L'arbre obtenu aura donc $(n-1) - (n-i+1) = i$ feuilles coloriées 0.

Cet algorithme décrit donc une correspondance entre les deux familles d'arbres. La correspondance inverse est donnée par l'algorithme suivant :

Soit A un AFC ayant n arêtes et donc i feuilles sont coloriées avec la couleur 0. On prend successivement toutes les feuilles f coloriées 1, par exemple en les parcourant dans l'ordre préfixe. Soit x l'ancêtre de f le plus proche de f vérifiant la condition : x possède un fils y qui est soit un ancêtre de f soit f lui-même et le sommet y a au moins un frère à sa gauche.

Si x n'existe pas c'est que f est la feuille la plus à gauche de l'arbre. Dans ce cas on crée une nouvelle racine r' , on ajoute une arête reliant r' à l'ancienne racine r et on marque r .

Si, par contre, x existe soit A' le sous-arbre de A formé par x et par tous les sous-arbres issus de y et de ses frères plus à droite. On « détache » A' de A , on crée une nouvelle arête reliant x à la racine de A' et on marque la racine de A' qui est maintenant le fils le plus à droite de x (cf. fig. 7).

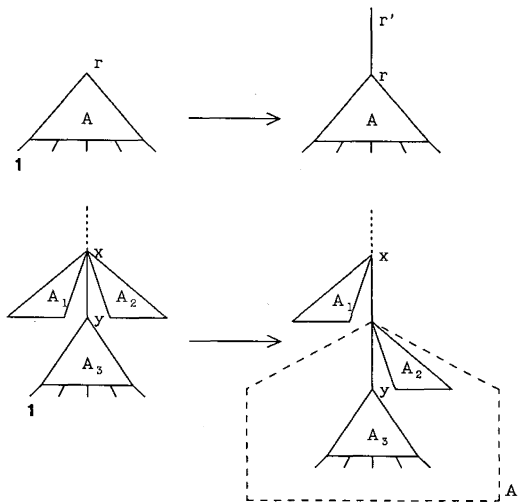


Figure 7

Lorsque toutes les feuilles marquées 1 ont été traitées, on rajoute un fils à droite à tous les sommets internes dont le fils le plus à droite n'est pas

marqué. On obtient ainsi un buisson ayant $n+1$ feuilles et $n-i+1$ sommets internes car tous les sommets internes, sauf la racine, ont un degré supérieur à deux.

Il est facile de voir que la bijection décrite ici est la bijection φ du lemme 1. En effet si on code l'AFC en le parcourant suivant l'ordre préfixe et en écrivant une lettre x lorsqu'on rencontre une arête pour la première fois et une lettre \bar{x} lorsqu'on rencontre une arête pour la deuxième fois sauf pour les arêtes pendantes coloriées 0 que l'on code y au lieu de $x\bar{x}$, on obtient un mot de Motzkin de longueur $2n-i$ ayant i lettres y . La contraction des arêtes marquées correspond à la suppression d'une paire $x\bar{x}$ dans les cas 1 et 4 de la définition de φ .

Le lemme 4 est donc démontré.

Il est bien connu que le nombre d'arbres ayant n arêtes et k feuilles est donné par le nombre de Narayana $n^{-1} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}$ que Kreweras appelle aussi distribution β (voir [7, 11, 16, 17, 18, 24, 14, 3, 30]) et qui est aussi appelé parfois « Runyon number ». On obtient donc le corollaire suivant :

COROLLAIRE 5 : R_n est égal à

$$\sum_{k=1}^n 2^k n^{-1} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1} \quad \text{pour } n > 0.$$

Remarque : Si dans un mot de Schröder de longueur $2n$ on remplace les facteurs yy par le facteur $x\bar{x}$ colorié avec la couleur 1, on obtient un mot de Dyck de longueur $2n$ dont les facteurs $x\bar{x}$ sont coloriés avec deux couleurs : 1 pour les anciens facteurs yy et 0 pour les anciens facteurs $x\bar{x}$. Inversement à tout mot de Dyck de longueur $2n$ dont les facteurs $x\bar{x}$ sont bicoloriés on peut faire correspondre un unique mot de Schröder. Comme il est bien connu que le nombre de Narayana compte les mots de Dyck ayant $2n$ lettres et k facteurs $x\bar{x}$, on obtient ainsi très facilement le corollaire 5.

III. NOMBRES DE SCHRÖDER ET CHEMINS DE DYCK VALUÉS

On considère les chemins dans le quart de plan des coordonnées entières positives. Les pas unitaires sont dits Nord-Est (resp. Sud-Est, resp. Est) ssi ils vont d'un point de coordonnées (x, y) à un point de coordonnées $(x+1, y+1)$ (resp. $(x+1, y-1)$, resp. $(x+1, y)$).

Un chemin est une suite de pas élémentaires avec bien entendu la condition que l'extrémité d'un pas soit l'origine du suivant. Un chemin ω est dit *de Motzkin* ssi il satisfait les trois conditions suivantes :

- (i) les pas élémentaires de ω ont l'un des trois types : Nord-Est, Sud-Est et Est,
- (ii) les coordonnées des points par où passe le chemin sont positives ou nulles,
- (iii) le chemin part de $(0, 0)$ et arrive à $(n, 0)$. Dans ce cas le chemin est dit de longueur n .

La figure 8 donne un exemple de chemin de Motzkin.

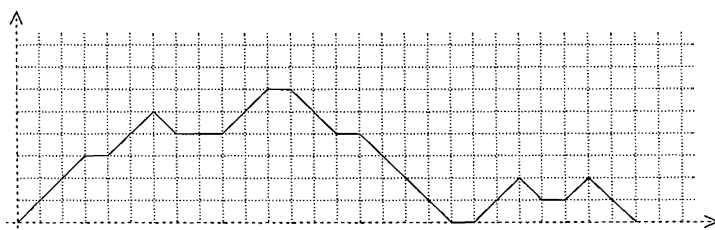


Figure 8

On définit une *valuation sur les chemins de Motzkin* :

- la valuation d'un pas élémentaire Nord-Est (resp. Est, resp. Sud-Est) dont le niveau du point de départ est k est égale à 1 (resp. b_k , resp. λ_k);
- la valuation $v(\omega)$ d'un chemin ω est le produit des valuations des pas élémentaires qui le composent.

Un *chemin de Dyck* est un chemin de Motzkin n'ayant pas de pas élémentaire Est ($b_k=0$ pour tout $k \geq 0$).

Flajolet [8] et Viennot [38] se sont intéressés à la suite $\{u_n\}_{n \geq 0}$ définie par

$$u_n = \sum_{|\omega|=n} v(\omega) \quad (8)$$

où la sommation est étendue à tous les chemins de Motzkin de longueur n . Lorsque les b_k et les λ_k sont des nombres entiers, u_n peut être vu comme le nombre de chemins de Motzkin de longueur n dont les pas Sud-Est (resp. Est) pour lesquels le point de départ est au niveau k sont coloriés avec λ_k (resp. b_k) couleurs. C'est pourquoi, par abus de langage, nous dirons que u_n compte les chemins de Motzkin de longueur n valués par λ_k et b_k .

La profondeur d'une arête dans un arbre est la distance de cette arête à la racine. Ainsi la profondeur des arêtes issues de la racine est 1, la profondeur des arêtes issues des fils de la racine est 2, etc. Nous allons étudier les arbres pour lesquels les arêtes de profondeur impaire sont coloriées avec deux couleurs. On appellera de tels arbres des APIC.

LEMME 6 : *Il existe une bijection entre les buissons ayant $n + 1$ feuilles et les APIC ayant n arêtes.*

Preuve : Nous allons établir une bijection Ψ entre les buissons ayant $n + 1$ feuilles et les APIC ayant n arêtes. Les arbres de cette dernière famille peuvent être codés par des mots sur l'alphabet $\{x, \bar{x}, \bar{x}_0, \bar{x}_1\}$ tels que si on remplace dans ces mots chaque lettre \bar{x}_0 et \bar{x}_1 par \bar{x} on obtient un mot de Dyck. Les \bar{x} correspondent aux arêtes de profondeur paire, les \bar{x}_0 aux arêtes de profondeur impaire coloriées 0 et les \bar{x}_1 aux arêtes de profondeur impaire coloriées 1.

Pour un APIC A , trois cas peuvent se produire :

Cas 1 : A est l'arbre vide, c'est-à-dire qu'il est réduit à sa racine. Dans ce cas $\Psi(1) = x\bar{x}$.

Cas 2 : A n'est pas l'arbre vide et l'arête la plus à gauche issue de la racine est coloriée 0. Le code f de A est alors de la forme : $f = xx f_1 \bar{x} x f_2 \bar{x} \dots x f_k \bar{x} \bar{x}_0 f_{k+1}$, les f_i étant des codes d'APIC pour $1 \leq i \leq k + 1$ et $k \geq 0$.

Dans ce cas $\Psi(f) = x^{k+1} \bar{x} \Psi(f_1) \bar{x} \Psi(f_2) \bar{x} \dots \Psi(f_k) \bar{x} \Psi(f_{k+1})$.

Cas 3 : A n'est pas l'arbre vide et l'arête la plus à gauche issue de la racine est coloriée 1. Le code f de A est de la forme : $f = xx f_1 \bar{x} \bar{x} f_2 \bar{x} \dots x f_k \bar{x} \bar{x}_1 f_{k+1}$, les f_i étant des codes d'APIC pour $1 \leq i \leq k + 1$ et $k \geq 0$.

Dans ce cas $\Psi(f) = x^{k+2} \bar{x} \Psi(f_1) \bar{x} \Psi(f_2) \bar{x} \dots \Psi(f_k) \bar{x} \Psi(f_{k+1}) \bar{x}$.

La figure 9 résume la bijection Ψ .

Quelque soit l'APIC A , $\Psi(A)$ est toujours un arbre non vide. Comme l'image par Ψ d'un APIC est construite récursivement à partir d'autres images d'APIC toujours placées à droite d'une arête existante, on ne peut obtenir de sommets de degré 2 (sauf éventuellement la racine). Donc quelque soit l'APIC A , $\Psi(A)$ est un buisson.

Ψ^{-1} est définie de la façon suivante :

Cas 1 : $\Psi^{-1}(x\bar{x}) = 1$.

Cas 2 : Si f est de la forme $x f' \bar{x} f''$, ($x f' \bar{x}$ et f'' codant des buissons, et f' étant soit le mot vide soit le code d'un buisson) c'est-à-dire si le buisson codé par f a une racine de degré au moins 2, alors $f = x^{k+1} \bar{x} f_1 \bar{x} f_2 \bar{x} \dots f_k \bar{x} f_{k+1}$

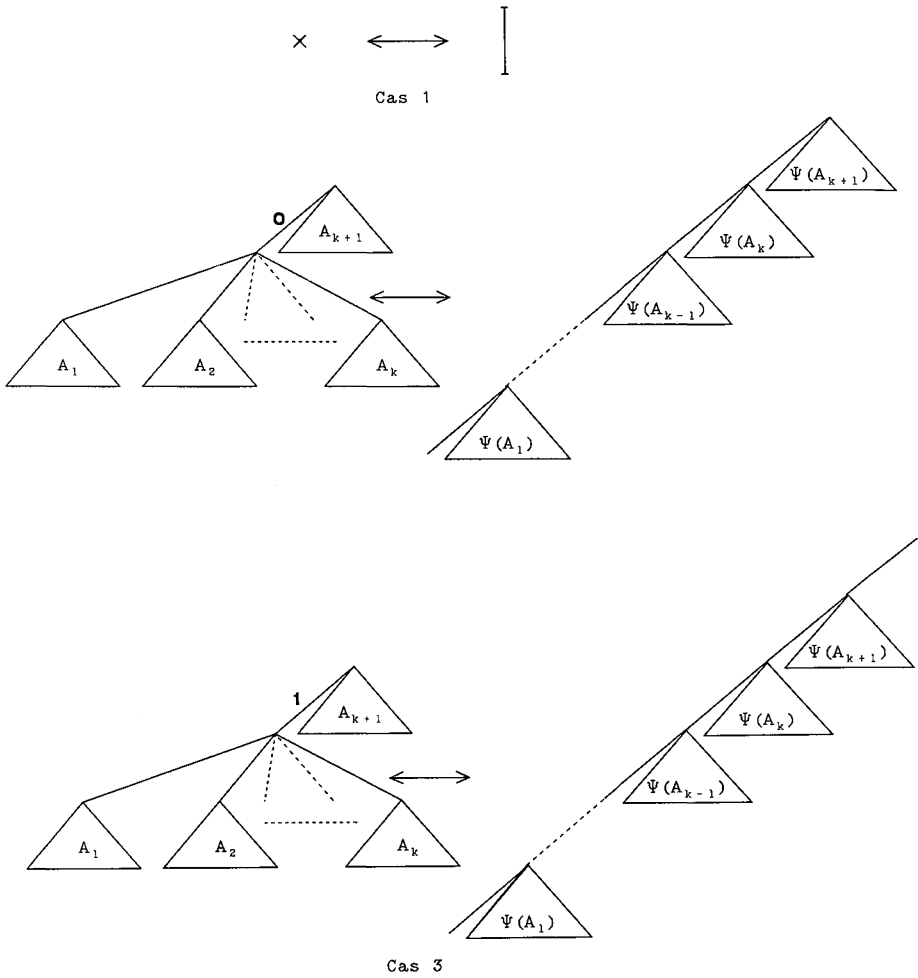


Figure 9

avec les f_i codant des buissons ($1 \leq i \leq k+1$ et $k \geq 0$). Alors :

$$\psi^{-1}(f) = xx \Psi^{-1}(f_1) \bar{x}x \Psi^{-1}(f_2) \bar{x} \dots x \Psi^{-1}(f_k) \bar{x}x_0 \Psi^{-1}(f_{k+1}).$$

Cas 3 : Si f est de la forme $xf' \bar{x}$, f' codant un buisson, c'est-à-dire si le buisson codé par f a une racine de degré 1, alors $f = x^{k+2} \bar{x}f_1 \bar{x}f_2 \bar{x} \dots f_k \bar{x}f_{k+1} \bar{x}$,

les f_i codant des buissons ($1 \leq i \leq k+1$ et $k \geq 0$). Alors :

$$\Psi^{-1}(f) = x x \Psi^{-1}(f_1) \bar{x} x \Psi^{-1}(f_2) \bar{x} \dots x \Psi^{-1}(f_k) \bar{x} x_1(f_{k+1}).$$

Il est facile de vérifier par récurrence que $\Psi^{-1}(\Psi(f)) = f$. Le lemme 6 est donc démontré.

COROLLAIRE 7 : *La suite $\{u_n\}_{n \geq 0}$ définie par (8) est égale à la suite $\{R_n\}_{n \geq 0}$ pour $b_k = 0$, $\lambda_{2k+2} = 1$ et $\lambda_{2k+1} = 2$ ($k \geq 0$).*

Preuve : On peut constater que tout APIC ayant n arêtes correspond à un chemin de Dyck de longueur n où les pas Sud-Est sont coloriés avec deux couleurs lorsque leurs points de départ sont à un niveau impair. Il suffit de coder x les pas Nord-Est et \bar{x} les pas Sud-Est. On retrouve bien la définition d'un chemin de Dyck ($b_k = 0$) pour $\lambda_{2k+2} = 1$ et $\lambda_{2k+1} = 2$ ($k \geq 0$).

Ce corollaire aurait pu être établi d'une autre façon car il est déjà connu que le nombre d'arbres ayant n arêtes et $k+1$ feuilles est le même que le nombre d'arbres ayant n arêtes dont $k+1$ de hauteurs impaires (cf. [43] ou [41] pour une preuve bijective). Ce résultat pourrait aussi se déduire analytiquement en combinant des résultats de [8], [10] et un théorème classique de contraction des fractions continuées transformant une fraction de type Stieltjes en type Jacobi (voir par exemple [15] ou [38], ch. V). On peut considérer que la combinaison des bijections φ et Ψ donne une nouvelle preuve de ce résultat.

Du corollaire 7, on peut déduire alors les corollaires 8, 9 et 10 en utilisant les résultats de Flajolet [8] et Viennot [43].

COROLLAIRE 8 : *La série $r(x)$ définie par (4) admet le développement en fraction continuée de type Stieltjes suivant :*

$$r(x) = \frac{1}{2x} \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 - \cfrac{2x}{\dots \cfrac{2x}{1 - \cfrac{x}{\dots}}}}}$$

Pour $r(x)$ on peut alors définir deux familles $P_x(x)$ et $Q_k(x)$ de pôlynomes orthogonaux par les récurrences :

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x,$$

$$Q_0(x) = 1,$$

$$Q_1(x) = x$$

et pour $k \geq 0$

$$P_{2k+2}(x) = x P_{2k+1}(x) - 2 P_{2k}(x),$$

$$P_{2k+3}(x) = x P_{2k+2}(x) - P_{2k+1}(x),$$

$$Q_{2k+2}(x) = x Q_{2k+1}(x) - Q_{2k}(x),$$

$$Q_{2k+3}(x) = x Q_{2k+2}(x) - 2 Q_{2k+1}(x).$$

Les réduites $r_k(x)$ (ou convergents) de niveau k de $r(x)$ vérifient alors l'égalité : $r_k(x^2) = Q_k(1/x)/x P_{k+1}(1/x)$. En raison de la bijection entre les APIC et les chemins de Dyck avec valuation $\lambda_{2k+1} = 2$ et $\lambda_{2k+2} = 1$, on peut alors énoncer :

COROLLAIRE 9 : *Les APIC de profondeur au plus k ($k \geq 0$) ont $r_k(x)$ pour série énumératrice en fonction de leur nombre d'arêtes.*

Soit H_n le déterminant de Hankel :

$$H_n = \begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_n \\ R_1 & R_2 & \dots & R_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_n & R_{n+1} & \dots & R_{2n} \end{bmatrix}$$

COROLLAIRE 10 : *Le déterminant de Hankel H_n est égal à :*

$$H_n = (\lambda_1 \lambda_2)^n (\lambda_3 \lambda_4)^{n-1} \dots (\lambda_{2n-1} \lambda_{2n})^1 = 2^p$$

avec $p = n(n+1)/2$.

Remarque : On peut faire les mêmes calculs pour la suite S_n . Dans ce cas, on obtient $\lambda_{2k+1} = 1$ et $\lambda_{2k+2} = 2$ pour $k \geq 0$.

IV. NOMBRES DE SCHRÖDER ET CHEMINS DE MOTZKIN VALUÉS

Nous allons étudier maintenant des mots de Motzkin sur l'alphabet $\{x, \bar{x}_1, \bar{x}_2, y_1, y_2, y_3\}$. Rappelons que les mots du langage de Motzkin M défini par (2) codent les arbres avec boucles (les x et \bar{x} codant les arêtes et les y codant les boucles) (cf. [6]).

Soit T le langage vérifiant l'équation :

$$T = 1 + y_1 T + y_2 T + y_3 T + x T \bar{x}_1 T + x T \bar{x}_2 T.$$

Les mots de T codent les arbres avec boucles qui sont coloriés avec trois couleurs sur les boucles et deux couleurs sur les arêtes (cf. fig. 10).

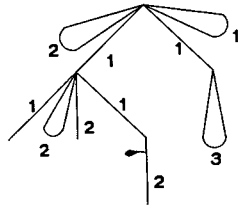


Figure 10. — Arbre colorié avec boucles codé par $y_2 x x \bar{x}_1 y_2 x \bar{x}_2 x x \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_1 x y_3 \bar{x}_1 y_1$.

D'autre part nous allons utiliser une classe particulière d' AFC : les AFC qui ont au moins une arête et dont la feuille la plus à droite est coloriée 1. Les arbres de cette classe seront appelés AFCT. Il est évident que le nombre d'AFCT ayant n arêtes ($n > 0$) est $R_n/2 = S_n$.

LEMME 11 : *Le nombre d'AFCT ayant $n + 1$ ($n \geq 0$) arêtes est égal au nombre de mots de T de longueur n .*

Preuve : Nous allons établir une bijection Θ entre d'une part les couples formés d'une couleur 1 ou 2 et d'un mot de T et d'autre part les AFC. Pour définir Θ nous avons six cas à considérer. La lettre i représente une couleur qui est 1 ou 2. On a vu que les feuilles correspondent aux facteurs $x\bar{x}$ dans le codage d'un arbre par un mot de Dyck. Aussi les AFC seront codés par des mots de Dyck, les lettres \bar{x} portant en indice la couleur des feuilles correspondantes.

- $\Theta(i, 1) = x\bar{x}_i$,
- $\Theta(i, y_1 f) = x\bar{x}_1 \Theta(i, f)$,

- $\Theta(i, y_2 f) = x\bar{x}_2 \Theta(i, f)$,
- $\Theta(i, y_3 f) = x \Theta(i, f) \bar{x}$,
- $\Theta(i, xf\bar{x}_1 f') = x \Theta(1, f) \bar{x} \Theta(i, f')$ avec f et f' dans T ,
- $\Theta(i, xf\bar{x}_2 f') = x \Theta(2, f) \bar{x} \Theta(i, f')$ avec f et f' dans T .

La figure 11 résume la bijection Θ .

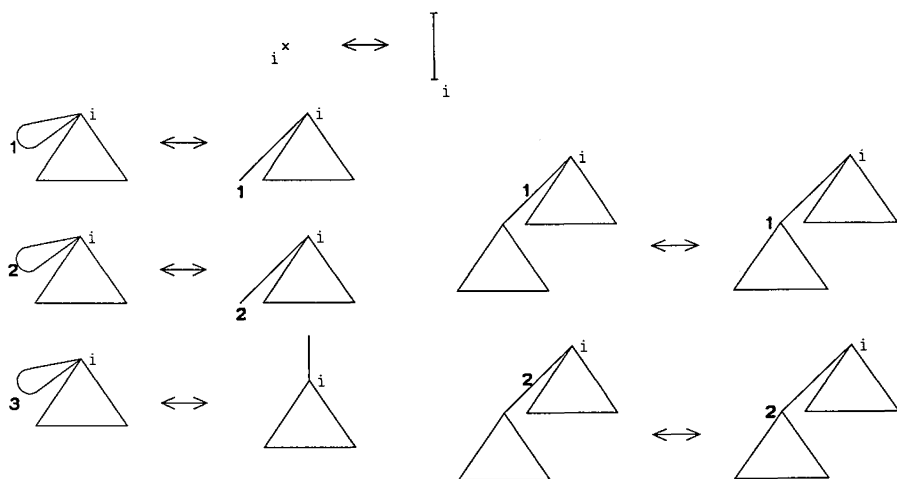


Figure 11

Θ envoyant tout mot de T sur un AFC qui a au moins une arête, il est facile de vérifier par récurrence dans les six cas que d'une part $\Theta(i, f)$ est un AFC pour tout f dans T et que d'autre part $\Theta(i, f)$ a sa feuille la plus à droite coloriée avec la couleur i . De plus Θ est bien une bijection et Θ^{-1} est définie par :

- $\Theta^{-1}(x\bar{x}_i) = (i, 1)$,
- $\Theta^{-1}(x\bar{x}_1 f) = (i, y_1 g)$ si $\Theta^{-1}(f) = (i, g)$,
- $\Theta^{-1}(x\bar{x}_2 f) = (i, y_2 g)$ si $\Theta^{-1}(f) = (i, g)$,
- $\Theta^{-1}(xf\bar{x}) = (i, y_3 g)$ si f code un AFC et si $\Theta^{-1}(f) = (i, g)$,
- $\Theta^{-1}(xf\bar{x}f') = (i, xg\bar{x}_j g')$ si f et f' codent des AFC et si $\Theta^{-1}(f) = (j, g)$ et $\Theta^{-1}(f') = (i, g')$.

Il est évident que $\Theta^{-1}(\Theta(i, f)) = (i, f)$. De plus Θ établit une bijection entre $\{(1, f)/f \in T\}$ et les AFCT. Et comme on peut vérifier par récurrence que la condition sur les longueurs est conservée, le lemme 11 est démontré.

COROLLAIRE 12 : Les nombres S_{n+1} et $R_{n+1}/2$ sont égaux à :

$$\sum_{i=0}^{n/2} 2^i 3^{n-2i} \binom{n}{2i} C_i.$$

Le résultat est trivial puisque, d'après le lemme 11, S_{n+1} compte les mots de Motzkin de longueur n pour lesquels les lettres y sont coloriées avec trois couleurs et les lettres \bar{x} avec deux couleurs.

COROLLAIRE 13 : La suite $\{u_n\}_{n \geq 0}$ définie par (8) est égale à la suite $\{S_{n+1}\}_{n \geq 0}$ pour $b_k = 3, \lambda_{k+1} = 2 (k \geq 0)$.

En effet, tout AFCT ayant $n + 1$ arêtes correspond à un chemin de Motzkin où les pas Est sont coloriés avec trois couleurs et les pas Nord-Est avec deux couleurs. On retrouve bien la définition d'un chemin de Motzkin avec $b_k = 3$ et $\lambda_{k+1} = 2 (k \geq 0)$.

Soit $t(x) = (s(x) - 1)/x$, où $s(x)$ vérifie (5), la série qui a pour coefficient $T_n = R_{n+1}/2$ pour $n \geq 0$. En reportant dans (5), on obtient l'équation $t(x) = 1 + 3xt(x) + 2x^2t^2(x)$, ce qui n'est pas très surprenant.

En utilisant toujours les résultats de Flajolet [8] ou Viennot [38], on obtient le corollaire 14 :

COROLLAIRE 14 : La série $t(x)$ admet le développement en fraction continuée de type Jacobi :

$$t(x) = \frac{1}{1 - 3x - \frac{2x^2}{1 - 3x - \frac{2x^2}{\dots \frac{2x^2}{1 - 3x - \dots}}}}$$

Les corollaires 13 et 14 auraient pu être démontrés à partir des corollaires 7 ou 8, en utilisant les résultats classiques sur les fractions continuées et les approximants de Padé qui lient les b_k et λ_k d'une suite $\{u_n\}_{n \geq 0}$ et ceux de la suite $\{u_{n+1}\}_{n \geq 0}$, ainsi que celui transformant une fraction continuée du type Stieljes en une fraction continuée du type Jacobi : voir par exemple [15] ou l'opération de « tassement » de Viennot [43], ch. V, transformant un chemin valué de Dyck en un chemin valué de Motzkin. On aurait ainsi trouvé

que la suite $\{ R_{n+1}/2 \}_{n \geq 0}$ correspond au chemin de Dyck pour :

$$\lambda_{2k+1} = (2^{k+2} - 1)/(2^{k+1} - 1)$$

et

$$\lambda_{2k+2} = (2^{k+2} - 2)/(2^{k+2} - 1) \quad \text{avec } -k \geq 0.$$

On peut aussi noter que la fraction continuée du corollaire 14 apparaît dans [9].

Remarque : On peut faire les mêmes calculs pour les nombres S_n (resp. R_n); on obtient alors $b_0 = 1, b_k = 3$ et $\lambda_k = 2$ (resp. $b_0 = 2, b_k = 3$ et $\lambda_k = 2$) pour $k > 0$.

V. NOMBRES DE SCHRÖDER ET CHEMINS DANS LE PLAN

Soit le triangle infini $R = (R_{i,j})_{0 \leq j \leq i}$ où $R_{i,j}$ est défini par la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} R_{i,i} &= 1 \text{ pour } i \geq 0, \\ R_{i,j} &= 0 \text{ si } i \text{ et } j \text{ n'ont pas la même parité,} \\ R_{2i+1, 2j+1} &= R_{2i, 2j} + R_{2i, 2j+2} \text{ pour } 0 \leq j < i, \\ R_{2i, 2j} &= R_{2i-1, 2j-1} + 2 R_{2i-1, 2j+1} \text{ pour } 0 < j < i, \\ R_{2i, 0} &= 2 R_{2i-1, 1} \text{ pour } i > 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Les premières valeurs de $R_{i,j}$ sont données par le tableau XII.

Il est clair que $R_{i,j}$ est le nombre de chemins de Dyck allant de $(0, 0)$ au point (i, j) pour la valuation $\lambda_{2k+2} = 1$ et $\lambda_{2k+1} = 2$. De même $R_{0, 2i}$ est égal à R_i . Nous dirons désormais chemins de Dyck R -valués pour cette famille de chemin de Dyck.

On considère le déterminant noté $R \begin{pmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_k \\ \beta_1, \dots, \beta_k \end{pmatrix}$ formé par le mineur extrait de $R, 0 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k$ et $0 \leq \beta_1 < \dots < \beta_k$ étant les indices des lignes et des colonnes de ce mineur. Ce type de déterminant a été étudié en liaison avec des chemins par Gessel et Viennot [10] et Viennot [43].

LEMME 15 : Si tous les α_i et β_j ont la même parité ($0 \leq i \leq k$ et $0 \leq j \leq k$), $R \begin{pmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_k \\ \beta_1, \dots, \beta_k \end{pmatrix}$ est égal au nombre de k -uplets $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ de chemins de

TABLEAU XII

| $i \setminus j$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-----------------|------|-----|------|-----|------|-----|-----|----|-----|----|----|----|----|
| 0 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | 2 | 0 | 1 | | | | | | | | | | |
| 3 | 0 | 3 | 0 | 1 | | | | | | | | | |
| 4 | 6 | 0 | 5 | 0 | 1 | | | | | | | | |
| 5 | 0 | 11 | 0 | 6 | 0 | 1 | | | | | | | |
| 6 | 22 | 0 | 23 | 0 | 8 | 0 | 1 | | | | | | |
| 7 | 0 | 45 | 0 | 31 | 0 | 9 | 0 | 1 | | | | | |
| 8 | 90 | 0 | 107 | 0 | 49 | 0 | 11 | 0 | 1 | | | | |
| 9 | 0 | 197 | 0 | 156 | 0 | 60 | 0 | 12 | 0 | 1 | | | |
| 10 | 394 | 0 | 509 | 0 | 276 | 0 | 84 | 0 | 14 | 0 | 1 | | |
| 11 | 0 | 903 | 0 | 785 | 0 | 360 | 0 | 98 | 0 | 15 | 0 | 1 | |
| 12 | 1806 | 0 | 2473 | 0 | 1505 | 0 | 556 | 0 | 128 | 0 | 17 | 0 | 1 |

Dyck R -valués vérifiant les deux propriétés :

- (i) le chemin ω_i va du point $(\alpha_k - \alpha_i, 0)$ au point (α_k, β_i) ,
- (ii) les chemins ω_i et ω_j n'ont aucun point en commun ($1 \leq i < j \leq k$).

Preuve : Ce lemme est un cas particulier du théorème général de Gessel et Viennot [10, 43] pour lequel la condition des croisements est vérifiée. Nous rappelons la démonstration dans ce cas particulier.

Le terme (i, j) du déterminant est le nombre de chemins de Dyck R -valués allant de $(0, 0)$ à (α_i, β_j) ou, ce qui revient au même, de $(\alpha_k - \alpha_i, 0)$ à (α_k, β_j) .

Le déterminant $R \begin{pmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_k \\ \beta_1, \dots, \beta_k \end{pmatrix}$ est donc égal à la somme $\sum (-1)^{\text{Inv}(\sigma)} v(\omega_1) \dots v(\omega_k)$, σ étant une permutation sur $\{1, 2, \dots, k\}$ ayant $\text{Inv}(\sigma)$ inversions, ω_i étant un chemin allant de $(\alpha_k - \alpha_i, 0)$ à $(\alpha_k, \beta_{\sigma(i)})$,

$v(\omega_i)$ étant la valuation du chemin ω_i ($1 \leq i \leq k$) et la sommation étant prise sur toutes les permutations σ et sur tous les k -uplets de chemins possibles.

On dira que deux chemins ω_i et ω_j se croisent si ils vérifient l'une de deux propriétés :

- (a) ω_i et ω_j ont un point en commun,
- (b) il existe deux entiers l et m tels que ω_i (resp. ω_j) passe par (l, m) [resp. $(l, m + 1)$] et $(l + 1, m + 1)$ [resp. $(l + 1, m)$].

Dans notre cas, seule la propriété (a) peut être vérifiée car, les α_i et β_j étant de même parité, les chemins ω passent tous uniquement par des points dont les coordonnées ont la même parité. Ainsi, si deux chemins ω_i et ω_j se croisent, ils ont forcément un point en commun. D'autre part, si le chemin ω_i joint les points $(a, 0)$ et (e, c) et si le chemin ω_j joint les points $(b, 0)$ et (e, d) avec $a < b$ et $c < d$, alors ces deux chemins se croisent. C'est ce qui arrive si σ possède au moins une inversion. Mais deux chemins ω_i et ω_j peuvent se croiser même si σ ne possède pas d'inversion, c'est-à-dire si σ est l'identité.

Cependant on peut mettre en bijection les paires formées d'une permutation σ ayant un nombre pair d'inversions et d'un k -uplet de chemins dont au moins deux se coupent avec les paires formées d'une permutation σ' ayant un nombre impair d'inversions et d'un k -uplet de chemins dont au moins deux se coupent. Cette bijection a la propriété de conserver le produit $v(\omega_1) \dots v(\omega_k)$. Donc dans la sommation ces termes se « tueront » deux à deux, et il ne restera que les paires formées de l'identité et de k -uplets de chemins deux à deux disjoints, ce qui est le résultat annoncé.

Définissons plus précisément cette bijection :

Soit σ une permutation ayant un nombre pair d'inversions et $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ un k -uplet de chemins où ω_i relie les points $(\alpha_k - \alpha_i, 0)$ et $(\alpha_k, \beta_{\sigma(i)})$ ($1 \leq i \leq k$). Supposons que deux chemins au moins se coupent. Les points communs peuvent être rangés par ordre lexicographique. Prenons celui qui est le premier pour cet ordre, soit (x, y) . De même soient ω_i et ω_j les deux chemins ayant les indices les plus petits qui passent par (x, y) . ω_i (resp. ω_j) peut être découpé en deux chemins : ω_i^1 (resp. ω_j^1) allant de $(\alpha_k - \alpha_i, 0)$ [resp. $(\alpha_k - \alpha_j, 0)$] à (x, y) et ω_i^2 (resp. ω_j^2) allant de (x, y) à $(\alpha_k, \beta_{\sigma(i)})$ [resp. $(\alpha_k, \beta_{\sigma(j)})$].

Soit σ' la permutation définie par $\sigma'(i) = \sigma(j)$, $\sigma'(j) = \sigma(i)$ et $\sigma'(l) = \sigma(l)$ pour $l \neq i$ et $l \neq j$. σ et σ' diffèrent d'un nombre impair d'inversions, σ' a donc un nombre impair d'inversions. Si on remplace dans le k -uplet ω_i et ω_j par $\omega'_i = \omega_i^1 \omega_j^2$ et $\omega'_j = \omega_j^1 \omega_i^2$ et σ par σ' , (x, y) reste bien le premier point de rencontre et i et j les plus petits indices des chemins passant par (x, y) . De

plus ω'_i (resp. ω'_j) relie $(\alpha_k - \alpha_i, 0)$ à $(\alpha_k, \beta_{\sigma'(i)})$ [resp. $(\alpha_k - \alpha_j, 0)$ à $(\alpha_k, \beta_{\sigma'(j)})$]. Enfin, on peut vérifier que le produit $v(\omega_1) \dots v(\omega_k)$ est conservé. Comme on peut faire exactement la même construction dans le cas où σ a un nombre impair d'inversions, le lemme 15 est démontré.

Nous allons utiliser maintenant un alphabet

$$Z = \{x, \bar{x}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, y, y_1, y_2, \bar{y}, \bar{y}_1, \bar{y}_2\}.$$

On définit deux morphismes δ_x et δ_y de Z^* dans \mathbb{N} par :

$$\begin{aligned} \delta_x(x) &= 1, & \delta_x(\bar{x}) &= -1, \\ \delta_x(y) &= \delta_x(y_j) = \delta_x(\bar{y}) = \delta_x(\bar{y}_j) = 0, & \delta_y(x) &= \delta_y(\bar{x}) = 0, \\ \delta_y(y) &= \delta_y(y_j) = 1, & \delta_y(\bar{y}) &= \delta_y(\bar{y}_j) = -1 \end{aligned}$$

pour $i = 1, 2, 3, 4$ et $j = 1, 2$. De même soit $A = \{a, \bar{a}, \bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ un alphabet et δ le morphisme de A^* dans \mathbb{N} défini par $\delta(a) = 1, \delta(\bar{a}) = \delta(\bar{a}_1) = \delta(\bar{a}_2) = -1$.

Nous considérons les chemins dans le quart de plan des coordonnées entières positives constitués par une suite de points A_0, A_1, \dots, A_n tels que A_0 soit l'origine et que les coordonnées (p_i, q_i) de A_i et (p_{i+1}, q_{i+1}) de A_{i+1} vérifient l'une des quatre conditions suivantes ($0 \leq i \leq n-1$) :

- (a) $p_{i+1} = p_i + 1$ et $q_{i+1} = q_i$ (pas Est),
- (b) $p_{i+1} = p_i$ et $q_{i+1} = q_i + 1$ (pas Nord),
- (c) $p_{i+1} = p_i - 1$ et $q_{i+1} = q_i$ (pas Ouest),
- (d) $p_{i+1} = p_i$ et $q_{i+1} = q_i - 1$ (pas Sud).

La longueur d'un tel chemin est n . Il est dit sous-diagonal si pour $i = 1, 2, \dots, n$, p_i est supérieur ou égal à q_i (cf. [12]). Nous nommerons R -chemins les chemins sous-diagonaux qui sont colorés de la façon suivante : les pas Ouest (resp. Nord, resp. Sud) dont le point de départ a des coordonnées de parité différente seront colorés avec quatre (resp. deux, resp. deux) couleurs.

LEMME 16 : *Le nombre de R -chemins de longueur n dont l'extrémité terminale est en (i, j) (n et $i-j$ de même parité et $n \geq i \geq j \geq 0$) est égal au déterminant $R \begin{pmatrix} n, n+2 \\ i-j, i+j+2 \end{pmatrix}$.*

Preuve : On peut coder les R -chemins par des mots de Z^* en codant x (resp. \bar{x} , resp. y , resp. \bar{y}) les pas Est (resp. Ouest, resp. Nord, resp. Sud) et

en mettant en indice les couleurs choisies. Le langage V des codes f des R -chemins est défini par :

- pour tout f' facteur gauche de f , $\delta_x(f') \geq \delta_y(f') \geq 0$,
- pour tout f' facteur gauche de f tel que $f = f'zf''$ avec $z \in Z$, z est égal à x , \bar{x} , y ou \bar{y} si les parités de $\delta_x(f')$ et de $\delta_y(f')$ sont les mêmes ou z est égal à x , \bar{x}_i , y_j ou \bar{y}_j si les parités de $\delta_x(f')$ et de $\delta_y(f')$ sont différentes ($i=1, 2, 3, 4$ et $j=1, 2$).

On peut noter que les coordonnées du point d'arrivée sont $(\delta_x(f), \delta_y(f))$.

On définit le morphisme E de Z^* dans $A^* \times A^*$ par :

$$\begin{aligned} E(x) &= (a, a), & E(\bar{x}) &= (\bar{a}, \bar{a}), & E(\bar{x}_1) &= (\bar{a}_1, \bar{a}_1), \\ E(\bar{x}_2) &= (\bar{a}_1, \bar{a}_2), & E(\bar{x}_3) &= (\bar{a}_2, \bar{a}_1), & E(\bar{x}_4) &= (\bar{a}_2, \bar{a}_2), \\ E(y) &= (a, \bar{a}), & E(y_1) &= (a, \bar{a}_1), & E(y_2) &= (a, \bar{a}_2), \\ E(\bar{y}) &= (\bar{a}, a), & E(\bar{y}_1) &= (\bar{a}_1, a), & E(\bar{y}_2) &= (\bar{a}_2, a). \end{aligned}$$

Soit f un mot de V de longueur n . Posons $E(f) = (h, b)$. Soient f' , h' et b' les facteurs gauches de f , h et b de longueur m ($0 \leq m \leq n$). On constate que $\delta(h') = \delta_x(f') + \delta_y(f')$ et que $\delta(b') = \delta_x(f') - \delta_y(f')$. On a donc $\delta(h') \geq \delta(b') \geq 0$. De plus si $h = h'z_1h''$ et $b = b'z_2b''$ avec z_1 et z_2 dans A , z_1 (resp. z_2) est égal à la lettre a ou \bar{a} si $\delta(f')$ [resp. $\delta(b')$] est pair et à la lettre a ou \bar{a}_i si $\delta(f')$ [resp. $\delta(b')$] est impair ($i=1, 2$).

On peut donc conclure que xxh et b sont les codes de deux chemins de Dyck R -valués qui n'ont aucun point en commun et qui joignent les points $(0, 0)$ et $(n+2, \delta_x(f) + \delta_y(f) + 2)$ pour le premier et $(2, 0)$ et $(n+2, \delta_x(f) - \delta_y(f))$ pour le second. Puisque $\delta_x(f) = i$ et $\delta_y(f) = j$, on a bien le résultat annoncé.

COROLLAIRE 17 : *Le nombre de R -chemins de longueur $2n$ aboutissant à l'origine est égal à $(R_n R_{n+2} - R_{n+1}^2) / 2$ pour $n \geq 0$.*

Preuve : A cause des relations de récurrence (9), on a :

$$R_{2n+1, 1} = R_{2n+2, 0} / 2 = R_{n+1} / 2 \quad \text{pour } n \geq 0$$

et

$$R_{2n, 0} + R_{2n, 2} = R_{2n+1, 1} \quad \text{pour } n > 0.$$

Ainsi pour $n > 0$, $R_{2n, 2} = R_{2n+1, 1} - R_{2n, 0} = (R_{n+1}/2) - R_n$. Or d'après le lemme 16, le nombre de chemins cherché est :

$$R \binom{2n, 2n+2}{0, 2} = R_{2n, 0} R_{2n+2, 2} - R_{2n, 2} R_{2n+2, 0}.$$

Le corollaire est donc démontré.

Ce résultat n'est pas surprenant lorsqu'on le rapproche du nombre de chemins étudiés dans [12] qui est :

$$C_n C_{n+2} - C_{n+1}^2 = \frac{3!(2n)!(2n+2)!}{n!(n+1)!(n+2)!(n+3)!}.$$

Les premiers nombres de R -chemins de longueur $2n$ aboutissant à l'origine sont ($0 \leq n \leq 6$) : 1, 4, 28, 284, 3 652, 55 108, 932 476.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. ALTER, *Some Remarks and Results on Catalan Numbers*, in *Proceedings of the Second Louisiana Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, Baton Rouge, 1971, p. 109-132.
2. W. G. BROWN, *Historical Note on a Recurrent Combinatorial Problem*, *Amer. Math. Monthly*, vol. 72, 1965, p. 973-977.
3. L. COMTET, *Advanced Combinatorics*, D. Reidel publ. comp., Boston, 1974, p. 56.
4. R. DONAGHEY, *Restricted Plane Tree Representations of Four Motzkin-Catalan Equations*, *J.C.T.*, Ser. B, 22, 1977, p. 114-121.
5. R. DONAGHEY, *Automorphisms on Catalan Trees and Bracketings*, *J.C.T.*, Ser. B, 29, 1980, p. 75-90.
6. R. DONAGHEY et L. W. SHAPIRO, *Motzkin Numbers*, *J.C.T.*, Ser. A, 23, 1977, p. 291-301.
7. W. J. R. EPLETT, *A Note About the Catalan Triangle*, *Discrete Math.*, vol. 25, 1979, p. 289-291.
8. P. FLAJOLET, *Combinatorial Aspects of Continued Fractions*, *Discrete Math.*, vol. 32, 1980, p. 125-161.
9. I. GESSEL, *A Non Commutative Generalization of q -Analog of the Lagrange Inversion Formula*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 257, 1980, p. 455-481.
10. I. M. GESSEL et G. VIENNOT, *Binomials Determinants, Paths and Hook Length Formulae*, *Advance in Maths.*, vol. 58, 1985, p. 300-321.
11. H. W. GOULD, *Research Bibliography of Two Special Number Sequences*, rev. ed., *Combinatorial Research Institute*, Morgantown, W. Va., 1977.
12. D. GOUYOU-BEAUCHAMPS, *Deux propriétés combinatoires du langage de Lukasiewicz*, *R.A.I.R.O.*, vol. 3, 1975, p. 13-24.
13. D. GOUYOU-BEAUCHAMPS, *Chemins sous-diagonaux et tableaux de Young*, in *Combinatoire énumérative*, p. 112-125, *Lecture Notes in Math.*, n° 1234, G. LABELLE et P. LEROUX éd., Springer-Verlag, Berlin, 1986.

14. D. GOUYOU-BEAUCHAMPS et G. VIENNOT, *Equivalence of the Two-Dimensional Directed Animal Problem to a One-Dimensional Path Problem*, in Adv. in Appl. Math. (à paraître).
15. W. B. JONES et W. J. THRON, *Continued Fractions, Analytic Theory and Applications*, Encyclopedia of Math. and its Appl., vol. 11, G. C. ROTA éd., Addison-Wesley, Reading, 1980.
16. C. JORDAN, *Calculus of Finites Differences*, Chelsea Publishing Company, New York, 1950, p. 449.
17. D. A. KLARNER, *Correspondance Between Plane Trees and Binary Sequences*, J.C.T., vol. 9, 1970, p. 401-411.
18. D. E. KNUTH, *The art of Computer Programming*, vol. 1, Fundamental Algorithms, 2nd ed., Addison Wesley, Reading, Ma., 1973, p. 235-239 et 533-534.
19. G. KREWERAS, *Sur les éventails de segments*, Cahiers du B.U.R.O., vol. 15, 1970, p. 3-41.
20. G. KREWERAS, *Sur les partitions non croisées d'un cycle*, Discrete Mathematics, vol. 1, n° 4, 1972, p. 333-350.
21. G. KREWERAS, *Sur les hiérarchies de segments*, Cahiers du B.U.R.O., vol. 20, 1973, p. 3-61.
22. G. KREWERAS, *Aires des chemins surdiagonaux à étapes obliques permises*, Cahiers du B.U.R.O., vol. 24, 1976, p. 9-18.
23. L. MOSER et W. ZAYACHKOWSKI, *Lattice Paths with Diagonal Steps*, Scripta math., vol. 26, 1963, p. 223-229.
24. T. MOTZKIN, *Relation Between Hypersurface Cross Ratio and a Combinatorial Formula for Partitions of a Polygon, for Permanent Preponderance and for Non-Associative Products*, Bul. Amer. Math. Soc., vol. 54, 1948, p. 352-360.
25. G. POLYA, *On the Number of Certain Lattice Polygons*, J. Comb. Theory, vol. 6, 1969, p. 102-105.
26. J. RIORDAN, *Combinatorial Identities*, Wiley, New York, 1968, p. 148.
27. J. RIORDAN, *Enumeration of Plane Trees by Branchs and Endpoints*, J.C.T., Ser. A, 19, 1975, p. 214-222.
28. J. RIORDAN, *The Distribution of Crossing of Chords Joining Pairs of $2n$ Points on a Circle*, Math. Comput., vol. 29, 1975, p. 215-222.
29. D. G. ROGERS, *A Schröder Triangle: Three Combinatorial Problems*, Comb. Math. V: Proc. Fifth Aust. Conf., Lecture Notes in Math., 622, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
30. D. G. ROGERS, *The Enumeration of a Family of Ladder Graphs Part I: Connective Relations*, Quart. J. Math. Oxford, (2), 28, 1977, p. 421-431.
31. D. G. ROGERS, *The Enumeration of a Family of Ladder Graphs Part II: Schröder and Superconnective Relations*, Quart. J. Math. Oxford, (2), 31, 1980, p. 491-506.
32. D. G. ROGERS, *Pascal Triangles, Catalan Numbers and Renewal Arrays*, Discrete Math., vol. 22, 1978, p. 301-310.
33. D. G. ROGERS et L. W. SHAPIRO, *Some Correspondance Involving the Schröder Numbers and Relations*, in Comb. Math., Proc. of the Intern. Conf., Camberra, 1977, Lecture Notes in Math., vol. 686, Springer-Verlag, Berlin, 1978, p. 267-276.
34. D. G. ROGERS et L. W. SHAPIRO, *Deque, Trees and Lattice Paths*, in Comb. Math. VIII Proc., Geelong, Australia, 1980, Lecture Notes in Math., vol. 884, Springer-Verlag, Berlin, 1981, p. 293-303.

35. L. W. SHAPIRO, *A Short Proof of an Identity of Touchard's Concerning Catalan Numbers*, J.C.T., Ser. A, 20, 1976, p. 375-376.
36. L. W. SHAPIRO, *A Catalan Triangle*, Discrete Math., vol. 14, 1976, p. 83-90.
37. SCHRÖDER, *Vier Kombinatorische Probleme*, Z. für M. Phys., 15, 1870, p. 361-376.
38. N. J. A. SLOANE, *A Handbook of Integer Sequences*, Academic Press, New York, 1973.
39. R. G. STANTON et D. D. COWAN, *Note on a "Square" Functional Equation*, S.I.A.M. Review, vol. 12, n° 2, 1970, p. 277-279.
40. J. TOUCHARD, *Sur certaines équations fonctionnelles*, in *Proc. Inter. Congr. Mat.*, p. 465-472, Univ. of Toronto Press, Toronto, 1928.
41. M. VAUCHAUSSADE DE CHAUMONT et G. VIENNOT, *Polynômes orthogonaux et problèmes d'énumération en biologie moléculaire*, Proc. Séminaire Lotharingien, Sainte-Croix-aux-Mines, mai 1983.
42. M. VAUCHAUSSADE DE CHAUMONT et G. VIENNOT, *Enumeration of RNAs secondary structure by complexity*, in *Mathematics in Medicine and Biology*, V. CAPASSO, E. GROSSO and S. L. PAVEN-FONTANA éd., Lecture Notes in Biomath., n° 57, Springer-Verlag, Berlin, 1985, p. 360-365.
43. G. VIENNOT, *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*, 217 p., Astérisque, Soc. Math. France (à paraître).
44. G. VIENNOT, *Une théorie combinatoire des approximants de Padé*, Réunion d'été de la Soc. Math. du Can., Québec, juin 1985, rapport Bordeaux, n° 8611.
45. G. VIENNOT, *Problèmes combinatoires posés par la physique statistique*, Séminaire Bourbaki, 36^e année, 1983/1984. exposé n° 626, in Astérisque, Soc. Math. France, n° 121-122, 1985, p. 225-246.