G. DUCHAMP
J. Y. THIBON

Bisections reconnaissables

Informatique théorique et applications, tome 22, n° 1 (1988), p. 113-128
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1988__22_1_113_0>

Informatique théorique et Applications/Theoretical Informatics and Applications
(vol. 22, n° 1, 1988, p. 113 à 128)

BISECTIONS RECONNAISSABLES (*)

par G. DUCHAMP (1) et J. Y. THIBON (1)

Communiqué par J. E. PIN

Résumé. – *Nous donnons une nouvelle caractérisation des bisections reconnaissables, i. e. des factorisations $A^*=X^* Y^*$ du monoïde libre, où X et Y sont des codes reconnaissables.*

Abstract. – *We give a new characterization of recognizable bisections, i. e. of factorizations of the free monoïd $A^*=X^* Y^*$ where X and Y are recognizable codes.*

1. INTRODUCTION

Une *factorisation* d'un monoïde libre A^* est une famille $(X_i)_{i \in I}$ de parties de A^+ indexée par un ensemble totalement ordonné I, telle que tout mot $w \in A^+$ admette une unique factorisation $w=x_1 x_2 \ldots x_n$ avec $x_i \in X_{k_i}$ et $k_1 \geqq k_2 \geqq \ldots \geqq k_n$. Les factorisations ont été introduites par Schützenberger en 1959 [10] pour des problèmes combinatoires liés aux bases des algèbres de Lie libres. Elles sont également liées à la théorie des fluctuations de sommes de variables aléatoires (*cf.* [7,4]). Dans [9] Schützenberger introduit les *bisections*, qui sont les factorisations à deux facteurs: une bisection est ainsi un couple (X, Y) de parties de A^+ tel que tout mot $w \in A^*$ admette une unique factorisation

$$w=x_1 \ldots x_p y_1 \ldots y_q$$

avec $x_i \in X$, $y_j \in Y$.

Dans cet article, nous caractérisons les bisections *reconnaissables*, i. e. telles que X et Y soient des parties reconnaissables de A^*. Ces résultats sont liés à la théorie des automates à divers titres: d'une part toute bisection reconnaissable

(*) Reçu mai 1986, révisé février 1987.

(1) L.I.T.P., Université Paris-VII, 4, place Jussieu, 75005 Paris.

0296-1598 88/01 113 16/\$3.60/

donne lieu à une identité entre expressions rationnelles (i. e. $A^* = X^* Y^*$), d'autre part on peut montrer (*cf.* [7,12]) qu'une partie X de A^+ est facteur gauche d'une bisection ssi c'est la base du stabilisateur de l'état minimal d'un automate ordonné. Les automates ordonnés interviennent par ailleurs dans la caractérisation de certaines variétés de langages [8].

Le problème des bisections reconnaissables a été résolu par Viennot en 1972 [11] et largement développé par ce même auteur dans [12]. Viennot a traité ce problème en introduisant de nouveaux objets algébriques, les *bascules* dont les bisections sont un cas particulier, et pour lesquelles on peut définir une notion de reconnaissabilité. Les bisections reconnaissables sont alors caractérisées au moyen d'un théorème général sur les bascules reconnaissables. Nos résultats sont équivalents à ceux de Viennot, dont nous donnons une preuve plus simple, et peut être plus naturelle, utilisant essentiellement les propriétés des monoïdes finis et des matrices de séries rationnelles.

Le plan de cet article est le suivant : nous rappelons au paragraphe 2 les notions et notations utiles pour la suite. Nous énonçons ensuite (§ 3) les résultats principaux de l'article. Les paragraphes 4 et 5 contiennent la preuve de la condition nécessaire de reconnaissabilité. Le paragraphe 6 est consacré à des remarques, les paragraphes 7 et 8 à la démonstration des théorèmes 1 et 2. Le paragraphe 9 contient des exemples.

2. NOTATIONS ET RAPPELS

Dans cet article, A désigne un alphabet fini, A^* le monoïde libre engendré par A et $A^+ = A^* - \{1\}$ le semi-groupe libre sur A. Si X est une partie de A^*, $\underline{\underline{X}} \in \mathbb{Z} \ll A \gg$ est la série caractéristique de X. Pour $i, j \in I$ ordonné, on note $i \vee j = \sup(i, j)$, $i \wedge j = \inf(i, j)$.

Une bisection de A^* sera donc un couple (X, Y) de parties de A^+ telles que $\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{X}}^* \underline{\underline{Y}}^*$. Il est facile de voir qu'alors X est un code préfixe et Y un code suffixe. On peut donc encore écrire $\underline{\underline{A}}^* = (\underline{\underline{X}})^* (\underline{\underline{Y}})^*$, qui donne en passant aux inverses $\underline{\underline{Y}}\underline{\underline{X}} + \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{Y}}$ d'où $YX \cup A = X \cup Y$. En fait, on peut montrer [2,7] que (X, Y) est une bisection si et seulement si $X \cap Y = \emptyset$ et $YX \cup A = X \cup Y$. Une conséquence importante de ce résultat est la suivante : si (P, Q) est une partition de A^+, il existe une unique bisection de A^* telle que $X \subset P$ et $Y \subset Q$; cette propriété s'établit à l'aide d'une récurrence sur la longueur des mots, et fournit un procédé effectif de construction des bisections : on répartit les lettres de A arbitrairement entre X et Y, et on distribue ensuite récursivement les éléments de $YX \cap A^n$ sur X et Y pour tout $n \geqq 2$ (pour les détails, *voir* [2,7]).

On dira qu'une bisection (X, Y) de A^+ est reconnaissable si X et Y sont des parties reconnaissables de A^*. On remarquera qu'il suffit en fait que l'un des facteurs soit reconnaissable. En effet on vérifie facilement que $X^* = A^* - A^* Y$, $Y^* = A^* - XA^*$ et donc X et Y sont simultanément reconnaissables ou non.

Remarque 1 : Si $X, Y \subset A^*$, $YX \subset X \cup Y \Rightarrow Y^* X^* = X^* \cup Y^*$.

3. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS

Nous énonçons ci-dessous une première caractérisation des bisections reconnaissables, qui fait apparaître, comme dans le théorème de Viennot, une propriété de décroissance d'une certaine fonction. On notera $i \wedge j$ le minimum de deux entiers i et j.

THÉORÈME 1 : *Soit (X, Y) une bisection de A^*. Alors, (X, Y) est reconnaissable si et seulement si :*

(i) *il existe des partitions finies*

$$X = \sum_{i \in I} X_i, \qquad Y = \sum_{j \in J} Y_j \quad (I, J \textit{ disjoints finis})$$

telles que $Y_j X_i \subset X_k$ ou Y_l.

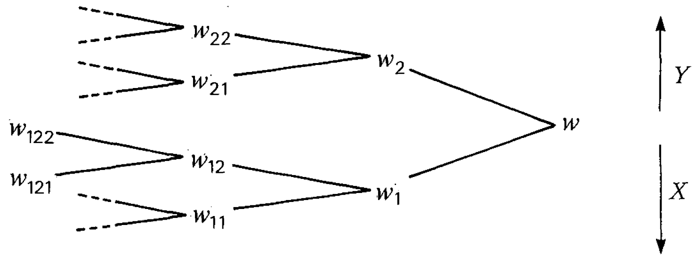
(ii) *il existe une application h : $I \cup J \to \mathbb{N}$ telle que* :

$$Y_j X_i \subset X_k \quad \Rightarrow \quad h(k) \leqq h(i) \wedge (h(j) - 1)$$

$$Y_j X_i \subset Y_l \quad \Rightarrow \quad h(l) \leqq h(j) \wedge (h(i) - 1).$$

Nous donnons ensuite de cette caractérisation une autre formulation, peut-être plus agréable, qui s'inspire de la remarque suivante :

le produit YX est non ambigu, et puisque $X \cup Y = YX \cup A$, pour tout mot $w \in X \cup Y$ on peut construire un arbre binaire de la forme



où les $w_{i, \ldots, 1}$ sont dans X, et les $w_{j, \ldots, 2}$ dans Y. Il existe un seul arbre de cette forme dont les feuilles sont des lettres. On utilise cet arbre pour définir récursivement le *degré de basculement* $d(w)$ d'un mot $w \in X \cup Y$ de la manière suivante: $d(w)=0$ si $w \in A$ et, si $w=w_2 w_1$,

$$d(w)=\begin{cases} d(w_1) \vee (d(w_2)+1) & \text{si} \quad w \in X \\ (d(w_1)+1) \vee d(w_2) & \text{si} \quad w \in Y \end{cases}$$

où $\vee$ désigne le sup de deux entiers.

On a alors la caractérisation suivante:

THÉORÈME 2 : *Une bisection (X, Y) est reconnaissable si et seulement si:*

(i) *du théorème* 1.

(ii) *d est borné sur X ou sur Y.*

Les paragraphes suivants sont consacrés à la preuve des deux énoncés.

4. MORPHISME RECONNAISSANT UNE BISECTION. BISECTIONS D'UN MONOÏDE QUELCONQUE

On utilisera pour manipuler les bisections reconnaissables des morphismes dans des monoïdes finis, à l'aide de l'énoncé suivant:

LEMME : *Soit (X, Y) une bisection reconnaissable de A^*. Alors, il existe un monoïde fini M, un morphisme f: $A^* \to M$ et deux sous-monoïdes P et Q de M ayant les propriétés suivantes*:

(*a*) $f^{-1}(P)=X^*$, $f^{-1}(Q)=Y^*$;

(*b*)

(i) $P \cap Q=\{1\}$;

(ii) $PQ=M$;

(iii) $QP \subset P \cup Q$;

(iv) $uv \in P \Rightarrow v \in P$ (*P est* consistant à droite);

(v) $uv \in Q \Rightarrow u \in Q$ (*Q est* consistant à gauche).

Preuve. — Soit M le produit direct des monoïdes syntaxiques de X^* et Y^*. M est fini, et il est le quotient de A^* par une congruence saturant X^* et Y^*, la moins fine parmi celles qui ont cette propriété. Notons la $\sim$ et posons $P=f(X^*)$, $Q=f(Y^*)$ où f: $A^* \to M=A^*/\sim$ désigne la surjection canonique. Il est clair que P et Q sont des sous-monoïdes, de plus (*a*) est vérifiée puisque $\sim$ sature X^* et Y^*; (iii): par la remarque 1, si $x \in X$, $y \in Y$, alors $f(y)f(x)=f(yx)$ qui appartient à $f(y^* x^*)=f(y^*) \cup f(x^*)=P \cup Q$, d'où

$QP \subset P \cup Q$. (ii) : $M = PQ$ car si $m = f(w)$, $w = xy$ donc $m = f(x)f(y)$ et $m \in PQ$. (i) : Soit $z \in P \cap Q$. Il existe $x \in X^*$, $y \in Y^*$ tels que $f(x) = f(y) = z$. Si l'on note $\bar{w}$ la classe de $w \in A^*$, l'on a $x \sim y$ et $\bar{x} = \bar{y} \subset X^* \cap Y^* = \{1\}$ d'où $x = y = 1$ et $z = 1$. (iv) : si $uv \in P$, $uv = f(x)$ avec $x \in X^*$, $u = f(a)$, $v = f(b)$ et $f(ab) = f(x)$ entraîne $ab \in X^*$ donc $b \in X^*$ et $v \in P$. L'on montre (v) de façon symétrique. □

Réciproquement, il est bien clair qu'une bisection vérifiant la condition (a) du lemme sera reconnaissable.

Si M est un monoïde (quelconque) possédant une paire de sous-monoïdes vérifiant les conditions (i) à (v) de (b), on dira que (P, Q) est une bisection de M. Dans le cas où $M = A^*$, on continuera à noter (X, Y) la bisection (X^*, Y^*). On dira d'un morphisme de A^* dans un monoïde M vérifiant les conditions (a) et (b) du lemme qu'il *reconnaît* la bisection (X, Y). On peut alors reformuler le lemme comme suit :

LEMME : *Une bisection de A^* est reconnaissable ssi elle est reconnue par un monoïde fini.* □

Exemple : Soit $B = \{a, b\}^*/(ab = 1)$ le monoïde bicyclique. Notons $\bar{w}$ la classe de $w \in A^*$. La classe de 1 dans $\{a, b\}^*$ pour la congruence engendrée par $ab \equiv 1$ est un monoïde libre [6]. Soit D sa base. Alors, $X = D^* b$, $Y = D \cup \{a\}$ est une bisection de A^* [7]. Cette bisection, qui n'est pas rationnelle, peut être reconnue par le monoïde bicyclique B : tout élément de B s'écrit de manière unique sous la forme $\bar{b}^p \bar{a}^q$, p, $q \in \mathbb{N}$ [6]. On pose $P = \{\bar{b}^p \bar{a}^q \mid q = 0\}$, $Q = \{\bar{b}^p \bar{a}^q \mid p = 0\}$, et $f : A^* \to B$ est simplement la surjection canonique.

5. UNE PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DES BISECTIONS DE MONOÏDES FINIS

La proposition suivante donne une propriété structurelle des paires de sous-monoïdes formant une bisection d'un monoïde fini. Elle fait apparaître la propriété de décroissance manifestée par les bisections reconnaissables (théorème 1).

PROPOSITION 1 : *Soit (P, Q) une bisection d'un monoïde fini M. Alors, il existe un entier n et deux suites :*

$$P_1 \subset P_2 \ldots \subset P_n = P, \qquad Q_1 \subset Q_2 \ldots \subset Q_n = Q$$

de parties de M vérifiant :

$$\begin{cases} Q_i P \subset P_{i-1} \cup Q_i \\ Q P_i \subset P_i \cup Q_{i-1}. \end{cases}$$

Preuve. — On définit le *rang* d'un élément $m \in M$ par :

$$rg(m) = \mathrm{card}(M\,m\,M)$$

et l'on pose :

$$P_i = \{p \in P \mid rg(p) \leqq i\}, \qquad Q_i = \{q \in Q \mid rg(q) \leqq i\}.$$

Il est clair qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$rg(p) \leqq n \quad \text{pour tout } p \in P.$$

Soient alors $q \in Q_i$ et $p \in P$.

Comme $M\,qp\,M \subset M\,q\,M$, on a $rq(qp) \leqq i$. Donc si $qp \in Q$ alors $qp \in Q_i$; supposons $qp \notin Q$. Comme (P, Q) est une bisection de M, l'on a $qp \in P$ et $qp \neq 1$. Pour conclure il suffit de démontrer que $rg(qp) < i$.

Supposons par l'absurde que $rg(qp) = i$, i. e.

$$\mathrm{car}\,d(M\,qp\,M) = i = \mathrm{card}(M\,q\,M).$$

Or, $M\,qp\,M \subset M\,q\,M$, donc ceci entraîne $M\,qp\,M = M\,q\,M$.

Donc il existe r, $s \in M$ tels que $q = r(qp)s = rq(ps)$ d'où :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad q = r^k q (ps)^k. \tag{$\bigstar$}$$

Soit k un entier tel que r^k et $(ps)^k$ soient idempotents (comme M est fini, un tel k existe toujours).

On a alors par ($\bigstar$) :

$$q = r^k q (ps)^k = r^k q (ps)^k (ps)^k = q (ps)^k = qp \,.\, s (ps)^{k-1},$$

or $qp \,.\, s(ps)^{k-1} = q \in Q$; donc par consistance, $qp \in Q$, contradiction. On montre de même $QP_i \subset P_i \cup Q_{i-1}$. $\square$

Remarque 2 : Soit (X, Y) une bisection de A^* et f un morphisme qui sature X^* et Y^*, $(P, Q) = (f(X^*), f(Y^*))$ la bisection correspondante du monoïde fini M.

Alors :

si $q \in Q$ et $rg(q) = i$, pour tout $p \in P$, soit $qp \in Q$, soit $qp \in P_{i-1}$, et donc $rg(qp) \leqq i - 1$. $\square$

6. REMARQUES

La proposition 1 nous donne déjà une condition nécessaire pour qu'une bisection (X, Y) de A^* soit reconnaissable (ici, X et Y sont des codes) : il doit existter deux suites

$$X_1 \subset X_2 \ldots \subset X_n = X; \qquad Y_1 \subset Y_2 \ldots \subset Y_n = Y$$

vérifiant les conditions de la proposition 1 ($X_i = f^{-1}(P_i)$). Cette condition, comme on va le voir, n'est pas suffisante. Cependant, pour $n=2$, toute bisection de ce type est rationnelle, et pour $n=3$, c'est encore vrai sur un alphabet à deux lettres (*voir* 9.4).

Par contre, dès que A contient au moins trois lettres, on a des contre-exemples avec $n=3$: soit $A=\{a, b, c\}$ et considérons la suite [dans $(b+c)^*$] définie par $\alpha_0=1$ et $\alpha_{n+1}=c^{n+1} b^{n+1} \alpha_n$ et le mot infini (limite des α_n) $\alpha = \ldots c^n b^n \ldots c^3 b^3 c^2 b^2 cb \in {}^{\omega}(b+c)$. Soit X l'ensemble des facteurs droits de αa, soit des mots de la forme $b^k \alpha_n a$ ou $c^k b^{n+1} \alpha_n a$ avec $k \leqq n+1$. X définit une bisection grâce à la «stratégie» associée à la partition $(X, A^+ - X)$ de A^+.

X	Y
a	b, c
$X-\{a\}$	
	Autres produits de YX

Définissons les suites X_i, Y_i, $i=1, 2, 3$, par :

i	X_i	Y_i
1.	$\varnothing$	$Y-(b+c)$
2.	$X-a$	$Y-(b+c)$
3.	X	Y

On vérifie facilement que $Y_1 X \subset Y_1$: en effet, $Y_1 X \subset X \cup Y$ et $m \in X \Rightarrow |m|_a = 1$, $m \in Y_1 X \Rightarrow |m|_a \geqq 2$. Les autres relations

$$Y_i X \subset X_{i-1} + Y_i,\ YX_i \subset X_i + Y_{i-1},$$

découlent facilement de considérations sur la longueur des mots. D'autre part, X n'est pas reconnaissable, comme on le voit en calculant les résiduels (*cf.* [8]) :

$$X = a + ba + cba + bcba + b^2 cba + \ldots,$$

$$Xa^{-1} = 1 + b + cb + bcb + b^2 cb + \ldots, \qquad X(ba)^{-1} = 1 + c + bc + b^2 c + \ldots,$$

etc., ce qui montre que $X(b^k c^k \ldots bca)^{-1}$ contient c^{k+1} qui n'appartient à aucun des résiduels précédents. □

7. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Rappelons-en l'énoncé :

THÉORÈME 1 : *Soit* (X, Y) *une bisection de* A^*. *Alors,* (X, Y) *est reconnaissable si et seulement si :*

(i) *il existe des partitions finies*

$$x = \sum_{i \in I} X_i, \qquad Y = \sum_{j \in J} Y_j \quad (I, J \textit{ disjoints finis})$$

telles que $Y_j X_i \subset X_k$ *ou* Y_l.

(ii) *il existe une application* $h \colon I \cup J \to \mathbb{N}$ *telle que :*

$$\begin{aligned} Y_j X_i \subset X_k \quad &\Rightarrow \quad h(k) \leqq h(i) \wedge (h(j) - 1) \\ Y_j X_i \subset Y_l \quad &\Rightarrow \quad h(l) \leqq h(j) \wedge (h(i) - 1). \end{aligned}$$

Preuve. — Si (X, Y) est une bisection reconnaissable de A^*, il existe un morphisme $f \colon A^* \to M$, où M est un monoïde fini, qui reconnaît (X, Y). On pose alors $I = f(X)$, $J = f(Y)$, puis $X_i = f^{-1}(i)$, $Y_j = f^{-1}(j)$, et on vérifie facilement les conditions du théorème 1 en prenant pour application h le rang dans le monoïde M. En effet, $Y_j X_i \subset X_k$ entraîne $h(k) \leqq (h(j) - 1) \wedge h(i)$ car par définition, les éléments de X_k, Y_j, X_i ont tous le même rang, et donc en particulier $h(k) \leqq rg(qp)$ avec $p \in f(X_i)$ et $q \in f(Y_j)$.

Réciproquement, supposons que la bisection (X, Y) vérifie les conditions du théorème 1. Soit alors $f \colon X \cup Y \to \mathbb{N}$ donnée par $r(w) = h(k)$ si $w \in X_k$ ou Y_k. Montrons que les mots sur lesquels r atteint sa valeur maximale sont des lettres : soit w un tel mot, et supposons par l'absurde $w = w_Y w_X \notin A$, $w_Y \in Y_j$, $w_X \in X_i$. Alors

$$\begin{aligned} w \in X_k \quad &\Rightarrow \quad r(w) = h(k) \leqq h(j) - 1 \\ w \in Y_k \quad &\Rightarrow \quad r(w) = h(k) \leqq h(i) - 1 \end{aligned}$$

une contradiction.

Montrons maintenant par une récurrence descendante sur les valeurs de h que toutes les parties X_i, Y_j sont rationnelles : soit $b = \sup(h(I \cup J))$; on a $\sum_{h(i) = b} X_i + \sum_{h(j) = b} Y_j \subset A$, et toutes ces parties sont rationnelles.

Supposons établie la rationnalité de toutes les parties X_k, Y_k telles que $b-m \leqq h(k) \leqq b$. Si $m<b$, nous noterons $X_{i_1}, \ldots, X_{i_p}$, $Y_{j_1}, \ldots, Y_{j_q}$ les parties X_k, Y_k telles que $h(k)=b-m-1$. On a alors, en définissant les fonctions:

$$u, v: I \times J \to I \text{ ou } J \text{ par } Y_j X_i \subset X_{u(i,j)} \text{ ou } Y_{v(i,j)},$$

$$X_{i_k} = X_{i_k} \cap A + \sum_{u(i,j)=i_k} Y_j X_i$$

$$= X_{i_k} A + \sum_{\substack{u(i,j)=i_k \\ h(j) \geqq b-m \\ h(i)=b-m-1}} Y_j X_i + \sum_{\substack{u(i,j)=i_k \\ h(i)<b-m-1}} Y_j X_i + \sum_{\substack{u(i,j)=i_k \\ h(i) \geqq b-m \\ h(j) \geqq b-m}} X_j Y_i$$

mais la deuxième somme est vide car pour $Y_j X_i \subset X_{i_k}$, on doit avoir $h(i_k) \leqq h(i) \wedge (h(j)-1)$ donc $b-m-1<b-m-1$ ce qui est absurde. La troisième étant rationnelle par l'hypothèse de récurrence, on peut écrire:

$$\begin{pmatrix} X_{i_1} \\ \vdots \\ X_{i_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \ldots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \ldots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{i_1} \\ \vdots \\ X_{i_p} \end{pmatrix} + \mathbf{V}$$

où les $*$ représentent des Y_j rationnels, et $\mathbf{V}$ un vecteur dont les composantes sont des parties rationnelles.

Ce système est de la forme $\mathbf{X} = U\mathbf{X} + \mathbf{V}$, où U est une matrice carrée dont les coefficients sont des séries rationnelles. U est une matrice propre, car ses coefficients sont des parties d'un code. La solution $\mathbf{X} = U^* \mathbf{V}$ est donc aussi rationnelle (*cf.* [3]). On montre de la même manière la rationnalité des $Y_{j_k} (\mathbf{Y} = \mathbf{V}_1 U_1^*)$. $\square$

8. DEGRÉ DE BASCULEMENT. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Soit (X, Y) une bisection de A^*. Si $w \in X \cup Y$, on définit récursivement le *degré de basculement* $d(w)$ de w par:

$$d(w) = 0 \qquad \text{si} \quad w \in A,$$

si

$$w = w_Y w_X \in X - A, \quad d(w) = \sup(d(w_X), d(w_Y) + 1),$$

et si $w \in Y - A$,

$$w = w_Y w_X, \qquad d(w) = \sup(d(w_Y), d(w_X) + 1).$$

On dira que la bisection vérifie la condition de *basculement par blocs* s'il existe des partitions finies $X=\sum_{i \in I} X_i$, $Y=\sum_{j \in J} Y_j$, et deux fonctions $u, v: I \times J \to I, J$ telles que: $Y_j X_i \subset X_{u(i,j)}$ ou $Y_{v(i,j)}$. Le théorème 2 s'énonce alors:

THÉORÈME 2 : *La bisection (X, Y) est reconnaissable si et seulement si:*

(i) *elle vérifie la condition de basculement par blocs.*

(ii) *d est borné sur X ou sur Y.*

Preuve. — La preuve consiste à montrer que la condition (ii) du théorème 1 et la condition (ii) du théorème 2 sont équivalentes. Supposons tout d'abord que la bisection (X, Y) vérifie les conditions du théorème 2, et montrons qu'elle vérifie les conditions du théorème 1.

Remarquons d'abord que (ii) équivaut à d bornée sur $X \cup Y$. En effet, une récurrence sur la longueur des mots montre que si $\sup(d(X))=m$, alors $\sup(d(Y)) \leqq m+1$, et si $\sup(d(Y))=m$, alors $\sup(d(X)) \leqq m+1$. Si K est la borne supérieure de d sur $X \cup Y$, la fonction $h=K-d$ vérifie les conditions du théorème 1 pour la nouvelle partition $X_{i,k}=\{x \in X_i \mid d(x)=k\}$, $Y_{j,k}=\{y \in Y_j \mid d(y)=k\}$, qui vérifie encore la condition de basculement par blocs et est finie.

Réciproquement, supposons que la bisection (X, Y) soit reconnaissable. Alors (X, Y) vérifie les conditions du théorème 1: montrons qu'elle vérifie les conditions du théorème 2. En reprenant les notations de la preuve du théorème 1, posons $g=r+d$; alors, si $M=\sup_{a \in A} r(a)$, considérons $g(w)=(d+r)w$, $w=w_Y w_X$. Supposons par exemple $w \in Y$. On a alors $r(w)<r(w_Y) \wedge (r(w_X)-1)$. Pour majorer $g(w)$, distinguons deux cas:

1° si $d(w_X)<d(w_Y)$, $d(w) \leqq d(w_Y)$, d'où:

$$g(w) \leqq d(w_Y)+r(w) \leqq d(w_Y)+r(w_Y)=g(w_Y)$$

2° si $d(w_X) \geqq d(w_Y)$, $d(w)=d(w_X)+1$, d'où:

$$g(w) \leqq d(w_X)+1+r(w)<d(w_X)+1+r(w_X)=g(w_X).$$

On a ainsi: pour $w \in Y$, $g(w) \leqq g(w_X) \vee g(w_Y)$. On montre de même que cette inégalité est aussi vérifiée pour $w \in X$. Une récurrence sur la longueur des mots prouve alors que pour $w \in X \cup Y$, $g(w)=d(w)+r(w) \leqq M$. Comme r et d sont positives, on voit que d est bornée. □

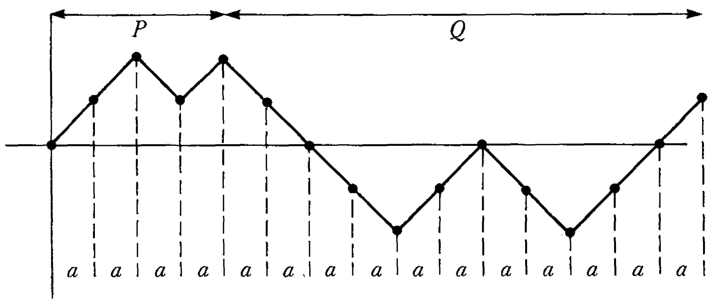
9. EXEMPLES ET REMARQUES

9.1. La condition de basculement par blocs n'est pas suffisante, comme le montre l'exemple suivant [12] : Soit $f: A^* \to (\mathbb{R}, +)$ un morphisme, et posons

$$P = \{ m \in A^* \mid uv = m \Rightarrow f(v) \geqq 0 \},$$
$$Q = \{ m \in A^* \mid uv = m \Rightarrow f(u) < 0 \} \cup \{ 1 \}.$$

On vérifie facilement que P et Q sont des sous-monoïdes libres de A^*. On notera X et Y leurs bases respectives; (X, Y) est une bisection.

La factorisation des mots peut se représenter sur un graphique :



Si $f(a) = 1$, $f(b) = -1$, $A = \{ a, b \}$, posons $X' = X - X \cap A$, $Y' = Y - Y \cap A$. X' est formé de mots tels que $f(m) = 0$, et Y' de mots tels que $f(m) = -1$, d'où le basculement par blocs :

	a	X'
b.	X'	Y'
Y'.	X'	Y'

qui peut se réduire à

	a	X'
Y.	X'	Y

On peut établir que cette bisection n'est pas rationnelle, en utilisant le lemme d'itération (« pumping lemma », *cf.* [5]) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$b^n a^n \in X, \qquad b^{n+1} a^n \in Y.$$

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $z = b^{m+1} a^m$. Si $z = uvw$, $|uv| \leqq m$, $|v| \geqq 1$, on a $v = b^k$ avec $k \geqq 1$, donc $f(uv^i w) = -1 - (i-1) k$ donc pour $i \geqq 2$, $uv^i w \notin Y$.

9.2. La condition « d borné » (ou l'existence de h dans le théorème 1) ne suffit pas : soit (α_n) la suite définie par

$$\alpha_0 = 1, \qquad \alpha_{n+1} = b^{n+1}(ba)^{n+1}\alpha_n,$$

et

$$\alpha = \ldots b^n(ba)^n \ldots b^2(ba)^2 b(ba) \in {}^{\omega}(a+b).$$

On prend pour X l'ensemble des facteurs droits de αa, de la forme :

(I) $(ba)^k \alpha_n a$

(II) $b^k(ba)^{n+1}\alpha_n a$, $k \neq 0$

avec $k \leqq n+1$. La bisection s'organise alors ainsi :

X	Y	d
a	b	0
	ba	1
$X-a$		2
	autres produits de $Y-X$	3

Le degré de basculement est borné par 3 cependant X n'est pas rationnel car $X(\alpha_n a)^{-1}$ contient $b^{n+1}(ba)^{n+1}$ qui n'appartient pas aux autres $X(\alpha_k a)^{-1}$. □

9.3. La proposition suivante a des conséquences intéressantes :

Proposition 2 : *Soit* (P, Q) *une bisection d'un monoïde fini non trivial* M. *Si* J *est l'unique idéal minimal de* M (cf. [6]), *on a* :

soit $P \cap J = \varnothing$ *et* $Q \cap J \neq \varnothing$, *soit* $Q \cap J = \varnothing$ *et* $P \cap J \neq \varnothing$.

Si $P \cap J \neq \varnothing$ *alors* P *rencontre tous les idéaux minimaux à droite de* M, *et si* $Q \cap J \neq \varnothing$ *alors* Q *rencontre tous les idéaux minimaux à gauche de* M.

Preuve. — Montrons d'abord que l'un des deux sous-monoïdes P, Q rencontre J : soit $m \in J$. Si $m \notin P \cup Q$, il existe $p \in P$ et $q \in Q$ tels que $m = pq$; d'autre part, $qp \in P \cup Q$; si $qp \in P$, alors $pqp = p(qp) \in P$ et $pqp = (pq)p = mp \in J$ donc $pqp \in P \cap J$ donc $P \cap J \neq \varnothing$. De même, si $qp \in Q$, on a $qpq \in Q \cap J \neq \varnothing$.

Maintenant, d'après un théorème de Suschkewitch (*cf.* [6]), J est la réunion disjointe des idéaux minimaux à droite, et aussi celle des idéaux minimaux à gauche.

Plaçons nous par exemple dans le cas $P \cap J \neq \varnothing$. Alors, P rencontre au moins un idéal minimal à droite R. Montrons qu'il les rencontre tous: soient R' un autre idéal minimal à droite, $r' \in R'$ et $p \in P \cap R$. Comme $r' \in J$, $Mr'M \subset J$ et la minimalité de J entraîne $Mr'M = J$. En particulier, $p \in Mr'M$ donc il existe $x, y \in M$ tels que $xr'y = p \in P$ d'où par consistance $r'y \in P$. Mais $r' \in R'$ donc $r'y \in R'$ et on a $r'y \in P \cap R' \neq \varnothing$. De même, si Q rencontre J, Q rencontre tous les idéaux minimaux à gauche.

Supposons maintenant que l'on ait $P \cap J \neq \varnothing$ et $Q \cap J \neq \varnothing$. Alors Q rencontre au moins un idéal minimal à droite R. Comme P les rencontre tous, $P \cap R \neq \varnothing$ donc si $q \in Q \cap R$ et $p \in P \cap R$, il existe $m \in M$ tel que $pm = q$, donc par consistance $p \in Q$. Comme $P \cap Q = \{1\}$, ceci entraîne $p = 1 \in R$ donc $1 \in J$ et $J = M$. Ceci n'est possible que si M est un groupe, mais il est facile de voir [à cause des deux propriétés de consistance (iv) et (v)] qu'un groupe non trivial n'admet pas de bisection, d'où la contradiction. $\square$

On peut retrouver à partir des suites de la proposition 1 les suites de Viennot, qui sont de longueur moindre $n' \leqq n$, et vérifient:

$$\varnothing = P_0 \subset P_1 \ldots \subset P_{n'+1} = P, \qquad \varnothing = Q_0 \subset Q_1 \ldots \subset Q_{n'} = Q$$
$$QP_i \subset P_i \cup Q_{i-1}, \qquad Q_i P \subset P_i \cup Q_i \quad (cf.\ [12]).$$

Pour cela, considérons l'ensemble S des couples de suites $((P_i), (Q_i))_{i=1\ldots n}$ vérifiant les conditions de la proposition 1. Si $s = ((P_i), (Q_i))$, $s' = ((P'_j), (Q'_j))$, on dira que $s \prec s'$ si $\forall k \exists k'\ P_k \subset P'_{k'}$, $Q_k \subset Q'_{k'}$. S admet alors pour la relation $\prec$ un plus grand élément $s_0 = ((\bar{P}_i), (\bar{Q}_i))$ défini par récurrence de la manière suivante: $(P_0, Q_0) = (\varnothing, \varnothing)$ et pour $i \geqq 1$, $\bar{P}_i = \{p \in P \mid Q p \subset P \cup \bar{Q}_{i-1}\}$, $\bar{Q}_i = \{q \in Q \mid q P \subset \bar{P}_{i-1} \cup Q\}$. s_0 appartient à S: en effet, supposons les conditions de la proposition 1 vérifiées pour $i \leqq k$. On veut démontrer que $Q\bar{P}_{k+1} \subset \bar{P}_{k+1} \cup \bar{Q}_k$. Soit $p \in \bar{P}_{k+1}$ et $q \in Q$. Par définition, $Q\bar{P}_{k+1} \subset P \cup \bar{Q}_k$. Si $qp \in \bar{Q}_k$ il n'y a rien à démontrer. Sinon $qp \in P$ et de plus l'on a: $Q\,qp \subset Q\,p \subset P \cup \bar{Q}_k$, ce qui implique $qp \in \bar{P}_{k+1}$. On montre de même que $\bar{Q}_{k+1}\ \bar{P}_k \cup \bar{Q}_{k+1}$. On montre que s_0 est le plus grand élément de S par récurrence sur $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si $s = ((P_i), (Q_i)) \in S$, on a, par exemple, pour tout $p \in P_i$, $Q\,p \subset P_i \cup Q_{i-1} \subset P \cup Q_{i-1}$ donc $p \in \bar{P}_i$.

On peut extraire de s_0 une sous-suite deux fois plus courte vérifiant les conditions de Viennot: supposons par exemple $\bar{Q}_1 \neq \varnothing$. Alors, par la proposition 2, $\bar{P}_1 = \varnothing$: en effet, $\bar{P}_1 = \{p \in P \mid Q\,p \subset P\}$. Si $p \in \bar{P}_1$, $\bar{P}_1$ contient l'idéal à gauche Mp, car $Mp = PQ\,p \subset P$, et donc $\bar{P}_1 \cap J \neq \varnothing$, ce qui entraîne $Q \cap J = \varnothing$, qui entraîne à son tour $\bar{Q}_1 = \varnothing$, contradiction. Montrons alors, par récurrence sur k, que

$$\bar{P}_{2k} = \bar{P}_{2k+1}, \qquad \bar{Q}_{2k+1} = \bar{Q}_{2k+2}.$$

Pour $k=0$, on a bien $\bar{P}_{2k}=\bar{P}_{2k+1}$ $(=\varnothing)$ donc:

$$\bar{Q}_2=\{q\in Q \mid qP\subset Q\cup\varnothing\}=\bar{Q}_1,$$

ce qui amorce la récurrence pour les $\bar{Q}_i$. Suppsons alors $\bar{P}_{2k}=\bar{P}_{2j+1}$, et calculons

$$\bar{Q}_{2k+2}=\{q\in Q \mid qP\subset \bar{P}_{2k+1}\cup Q\}=\{q \mid qP\subset \bar{P}_{2k}\cup Q\}=\bar{Q}_{2k+1},$$

d'où

$$\bar{P}_{2k+3}=\{p\in P \mid Qp\subset \bar{Q}_{2k+2}\cup P\}=\{p\in p \mid Qp\subset \mid \bar{Q}_{2k+1}\cup P\}=\bar{P}_{2k+2}$$

On obtient de même la propriété des $\bar{Q}_i$.

En renommant $P'_k=\bar{P}_{2k}$, $Q'_k=\bar{Q}_{2k+2}$, on obtient des suites qui vérifient les conditions annoncées. $\square$

9.4. Voici maintenant la preuve des assertions du paragraphe 6. Tous les produits envisagés ici étant non-ambigus, on identifiera les parties de A^* et leurs séries caractéristiques. Soit (X, Y) une bisection vérifiant les conditions de la proposition 1 (en posant $X_i=P_i$, $Y_i=Q_i$), avec $A=\{a, b\}$.

Si $n=2$, on peut par exemple supposer $Y_1\neq\varnothing$, $X_1=\varnothing$ (2). On a alors le système d'inclusions

$$\begin{gathered} Y_1X\subset Y_1 \\ YX\subset Y \\ YX\subset X\cup Y_1. \end{gathered}$$

D'autre part, $YX+A=X+Y$ et $YX\subset Y$ implique $X\subset A$ donc X est rationnel, étant une partie de l'alphabet, et Y aussi.

Si $n=3$, $A=\{a, b\}$, on a le système (en supposant toujours $Y_1\neq\varnothing$, $X_1=\varnothing$)

$$\begin{gathered} Y_1X\subset Y_1 \\ YX_2\subset X_2+Y_1 \\ Y_2X\subset Y_2 \\ YX\subset X+Y_2 \\ YX\subset X_2+Y \end{gathered}$$

et toujours $YX+A=X+Y$.

(2) *Cf.* 9.3.

Les deux dernières inclusions montrent que $Y-Y_2 \subset A$ et $X-X_2 \subset A$. On transforme les inclusions en égalités en introduisant les complémentaires U_i, V_i, et on peut supposer $X-X_2=a$, $Y-Y_2=b$ (sinon la bisection serait triviale). Alors,

$$\begin{gathered} Y_1 X+V_1=Y_1 \\ YX_2+U_2=X_2+Y_1 \\ Y_2 X+V_2=Y_2 \\ YX+a=X+Y_2 \\ YX+b=X_2+Y. \end{gathered}$$

En inversant la matrice associée au membre droit on obtient le système équivalent :

$$\begin{gathered} Y_1=Y_1 X+V_1 \\ X_2=YX_2+U_2-Y_1 X-V_1 \\ Y_2=Y_2 X+V_2 \\ X=YX+a-Y_2 X-V_2 \\ Y=YX+h-YX_2-U_2+Y_1 X+V_1. \end{gathered}$$

D'après l'hypothèse faite précédemment sur X_2 et Y_2, on a $(Y-Y_2)X=b(X_2+a)$.

Donc,

$$X=X_2+a=(Y-Y_2)X+a-V_2=b(X_2+a)+a-V_2=bX_2+ba+a-V_2,$$

d'où

$$(1-b)X_2=ba-V_2 \qquad \text{et} \qquad X_2=b^*ba-b^*V_2.$$

Ceci force $b^* V_2 \subset b^* ba=b^+ a$. Donc $V_2 \subset b^+ a$.

Si $V_2=\varnothing$, $X_2=b^+ a$ et on a finalement $X=b^* a$, $Y=b$.

Dans le cas où V_2 n'est pas vide, $X_2=b^+ a-b^* V_2$ avec $V_2 \subset b^+ a$, et comme la série caractéristique X_2 doit être à coefficients positifs, ceci force V_2 à être réduit à un élément $b^{k+1} a$, $k \geq 0$. On a alors $X_2=ba+b^2 a+\ldots+b^k a$ ou $\varnothing$; si $X_2=\varnothing$, $X=a$, $Y=ba^*$. Si $X_2 \neq \varnothing$, $X=a+ba+\ldots+b^k a$, $Y=b+b^{k+1} a\,(a+ba+\ldots+b^k a)^*$. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

1. J. BERSTEL, *Transductions and Context-Free Languages*, Teubner, 1979.
2. J. BERSTEL et D. PERRIN, *Theory of Codes*, Academic Press, New York, 1985.
3. J. BERSTEL et C. RETENAUER, *Les séries rationnelles et leurs langages*, Masson, Paris, 1984; English translation (to appear).
4. D. FOATA et M. P. SCHÜTZENBERGER, *On the Principle of Equivalence of Sparre-Andersen*, Math. Scand., 28, 1971.
5. J. E. HOPCROFT et J. D. ULLMAN, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, Addison-Wesley, 1979.
6. G. LALLEMENT, *Semigroups and Combinatorial Applications*, Wiley-Interscience, New York, 1979.
7. M. LOTHAIRE, *Combinatorics on Words*, Addison-Wesley, 1983.
8. J. E. PIN, *Variétés de langages formels*, Masson, Paris, 1984. English translation North Oxford Academic, London et Plenum, New York, 1986.
9. M. P. SCHÜTZENBERGER, *On a Factorisation of Free Monoïds*, Proc. Amer. Math. Soc., t. 16, 1965, p. 21-24.
10. M. P. SCHÜTZENBERGER, *Sur une propriété combinatoire des algèbres de Lie libres pouvant être utilisée dans un problème de mathématiques appliquées*, Séminaire Dubreuil-Pisot, année 58-59, I.H.P., Paris, 1959.
11. G. VIENNOT, *Automates et bascules*, in *Automata, Languages and Programming*, Proc. of a Symp. I.R.I.A., Nivat éd., North-Holland, 1972.
12. G. VIENNOT, *Algèbres de Lie libres et monoïdes libres*, Thèse de Doctorat d'État, Université Paris-VII, 1974.