INFORMATIQUE THÉORIQUE ET APPLICATIONS

JEAN FRANÇON

Une approche quantitative de l'exclusion mutuelle

Informatique théorique et applications, tome 20, n° 3 (1986), p. 275-289

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1986__20_3_275_0>

Informatique théorique et Applications/Theoretical Informatics and Applications
(vol. 20, n° 3, 1986, p. 275 à 289)

UNE APPROCHE QUANTITATIVE DE L'EXCLUSION MUTUELLE (*)

par Jean FRANÇON [1]

Communiqué par A. ARNOLD

Résumé. – *On considère un modèle simple d'un système de p processus et de r ressources dans la sémantique de l'interclassement; tout comportement du système est réduit à un mot sur l'alphabet des actions caractérisant les acquisitions et les libérations d'une ressource par un processus. Le nombre de comportements de longueur n, entier donné, permet de définir une mesure du parallélisme du système et une mesure de la performance d'un algorithme de contrôle de l'exclusion mutuelle. On considère trois systèmes particuliers le système dit libre où les ressources sont communes (i. e. d'accès sans exclusion mutuelle), le système où toutes les ressources sont critiques (i. e. détenues avec exclusion mutuelle), et le système dit sériel où les processus s'exécutent dans l'ordre* 1, 2, . . . , *p. Pour ces trois systèmes on caractérise l'ensemble des comportements et on calcule le nombre de comportements de longueur n. On en déduit que, du point de vue de la mesure de parallélisme introduite, un système sériel se comporte comme un système libre d'un seul processus et un système avec exclusion mutuelle de p processus se comporte comme un système libre de* $p^{1/2}$ *processus.*

Abstract. – *A simple model of p concurrent processes and r resources is stated in the interleaving semantics. A behaviour of the system is reduced to a word over the alphabet of the actions "allocate" and "deallocate". It is shown how the number of behaviours of length n, a given integer, of a system can be used to define a measure of its degree of parallelism and a measure of the performance of a mutual exclusion scheduler. Three systems are considered; the "free" system whose ressources are sharable without mutual exclusion, the system "with mutual exclusion" whose resources are critical, and the "serial" system whose processes are executed in the order* 1, 2,..., *p. The set of behaviours is characterized and the number of behaviours of length n is calculated for each of these systems. It can be concluded that, from the point of view of the introduced measure of parallelism, the serial system behaves like the free system of one process and the system with mutual exclusion of p processes behaves like the free system of* $p^{1/2}$ *processes.*

1. INTRODUCTION

On pense généralement un ensemble de processus indépendants comme des processus qui peuvent s'exécuter en parallèle sans contraintes de synchronisation; un tel système est considéré comme l'archétype du parallélisme maximal.

(*) Reçu en mai 1985.

[1] Université Louis Pasteur, Département d'informatique, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg Cedex.

A l'opposé, quand on impose à un ensemble de processus de s'exécuter les uns après les autres, l'un ne commençant que si le précédent a terminé, on considère qu'on a à faire à la situation typique de parallélisme minimal. Quand des processus peuvent accéder à des ressources partagées en exclusion mutuelle (seule forme de synchronisation considérée ici), on pense à un parallélisme réduit. Ce parallélisme est considéré comme plus ou moins réduit suivant la façon dont l'exclusion mutuelle est contrôlée; un mécanisme de contrôle d'exclusion mutuelle peur être réalisé de nombreuses façons, en particulier pour éviter les phénomènes d'interblocage ou de privation; on peut considérer que, de façon générale, il introduit des contraintes réduisant plus le parallélisme que ce que la seule exclusion mutuelle exige.

Un problème important est donc de comparer les performances de différents mécanismes réalisant l'exclusion mutuelle, au sens intuitif du plus ou moins grand degré de parallélisme autorisé. Pour ce faire on a besoin d'un modèle théorique. J'introduis ici un modèle théorique simple dans la ligne de Karp et Miller [3] et Keller [4], inspiré de travaux sur l'interblocage [5] et sur le contrôle de l'accès à une base de données [6]. Je considère un ensemble de p processus accédant à des ressources d'un ensemble de r ressources via un mécanisme de contrôle (centralisé) qui prend des « décisions » ordonnées dans le temps, de deux types; l'autorisation est accordée à un processus donné soit d'acquérir soit de libérer une ressource donnée. Je considère qu'un comportement du système est une suite temporelle de « décisions », notion qui peut être traitée mathématiquement comme un mot sur l'alphabet des décisions. Ce modèle est défini et discuté à la section 2.

Intuitivement, la performance du mécanisme de contrôle est d'autant meilleure que l'ensemble des comportements permis par ce mécansime est grand. Je propose ici de mesurer cette performance par le *nombre* c_n *de comportements de longueur* n donnée. Cette mesure permet en particulier de comparer les performances de deux mécanismes de contrôle sans que l'ensemble des comportements autorisés par l'un soit inclus dans l'ensemble des comportements autorisés par l'autre, méthode de comparaison utilisée dans [5] et [6]. Il apparaît qu'une mesure de performance moins fine mais plus pratique et plus intrinsèque est celle que j'appelle *degré de parallélisme apparent*, défini par

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{r} c_n^{1/n}$$

Ces définitions sont données aussi à la section 2.

Le problème qui se pose est celui du calcul du nombre de comportements de longueur donnée d'un système donné. Je montre à la section 3 comment on peut faire ce calcul exactement pour

(i) le système dit *libre*, où toutes les ressources sont communes, c'est-à-dire partageables sans exclusion mutuelle, qui est dans mon modèle l'archétype du parallélisme maximal,

(ii) le système dit *sériel*, où les processus s'exécutent les uns après les autres dans un ordre fixé, qui est dans mon modèle l'archétype du parallélisme minimal,

(iii) le système *avec exclusion mutuelle*, où toutes les ressources sont critiques, c'est-à-dire où toute ressource est à tout moment détenue par au plus un processus.

Les résultats de ces calculs sont discutés à la section 4, ainsi que la notion de degré du parallélisme apparent. L'essentiel de ces résultats peut s'énoncer ainsi; le degré de parallélisme apparent d'un système de p processus vaut p pour le système libre, 1 pour le système sériel et $p^{1/2}$ pour le système avec exclusion mutuelle, quelque soit le nombre de ressources. On peut donc dire qu'un système de p processus avec exclusion mutuelle se comporte, du point de vue du nombre de ses comportements, comme un système libre de $p^{1/2}$ processus, et qu'un système sériel de p processus se comporte comme un système libre d'un seul processus.

De nombreux problèmes qu'il serait intéressant de résoudre sont énoncés en conclusion.

2. LE MODÈLE THÉORIQUE

J'utilise ici les notions classiques de processus, ressource, parallélisme, exclusion mutuelle,... (*voir* p. ex. [7]). Le modèle théorique présenté ici s'inscrit dans la voie ouverte par [3] et [4]; on le trouve dans des travaux comme [5], et surtout dans des études du contrôle de l'accès à une base de données (*voir* [6] ou [8] pages 370 à 372) à la terminologie près; un processus s'appelle une transaction, une ressource s'appelle une entité ou un item, une acquisition s'appelle un verrouillage et une libération un déverrouillage.

On considère un ensemble de processus $P_1, P_2, \ldots, P_p$ et un ensemble de ressources (réutilisables, non structurées et nommées) $R_1, R_2, \ldots, R_r$. Un *comportement* du processus P_i, $1 \leq i \leq p$, est (réduit ici à) une suite finie d'évènements, un événement étant soit la lettre $A_i(j)$ signifiant que P_i acquiert R_j (on dit aussi que R_j est allouée à P_i), soit la lettre $\bar{A}_i(j)$ signifiant que P_i

libère R_j (on dit aussi que R_j est désallouée ou relachée par P_i) avec $1 \leqq j \leqq r$ et les conditions

(i) un processus ne peut acquérir une ressource qu'il détient déjà,

(ii) un processus ne peut libérer une ressource qu'il ne détient pas,

(iii) initialement aucune ressource est détenue.

Un comportement du système est un interclassement (ou mélange) de comportements de processus, c'est-à-dire un mot w sur l'alphabet $\bigcup_{\substack{1 \leqq i \leqq p \\ 1 \leqq j \leqq r}} \{A_i(j), \bar{A}_i(j)\}$ tel que pour tout $i=1, 2, \ldots, p$ la projection de w sur l'alphabet $\bigcup_{1 \leqq j \leqq r} \{A_i(j), \bar{A}_i(j)\}$ est un comportement de P_i. Un exemple de comportement est, pour $p=3$ et $r=5$, le mot

$$A_2(2)\, A_1(5)\, \bar{A}_1(5)\, A_2(1)\, A_1(2)$$

qui est un interclassement des comportements

$$A_2(2)\, A_2(1) \text{ de } P_2 \qquad \text{et} \qquad A_1(5)\, \bar{A}_1(5)\, A_1(2) \text{ de } P_1.$$

Soulignons qu'avec cette définition le nombre de processus (resp. de ressources) apparaissant dans un comportement d'un système peut être n'importe quel entier compris entre 0 et p (resp. r); dans l'exemple précédent 2 processus seulement sur 3 possibles et 3 ressources sur 5 possibles apparaissent.

Les systèmes que je vais considérer maintenant sont caractérisés par l'ensemble de leurs comportements.

J'appelle système *libre* et je note $\mathscr{L}$ le système au sens utilisé jusqu'ici; l'ensemble de ses comportements est celui des comportements définis ci-dessus; dans ce système une ressource peut, à un moment donné, être détenue par plusieurs processus (c'est le cas de la ressource R_2 détenue à la fois par P_1 et P_2 à la fin du comportement de l'exemple ci-dessus). Les ressources du système libre sont donc partageables sans exclusion mutuelle. Dans le modèle présenté ici le système libre est l'archétype du système permettant le parallélisme maximum dans l'exécution des processus.

J'appelle système *avec exclusion mutuelle* et je note $\mathscr{E}$ le système dont tout comportement vérifie la condition d'exclusion mutuelle : à tout moment toute ressource est détenue par au plus un processus [formellement si une lettre $A_i(j)$ apparaît à gauche d'une lettre $A_k(j)$ alors entre les deux apparaît la lettre $\bar{A}_i(j)$]. Un exemple est fourni, pour $p=3$ et $r=5$, par le mot

$$A_2(2)\, A_1(5)\, A_2(1)\, \bar{A}_1(5)\, \bar{A}_2(2)\, A_2(5)$$

où la seule ressource détenue par deux processus est R_5 mais elle n'est jamais détenue par les deux processus à la fois.

Je dis qu'un comportement *termine* si toute ressource qui y est acquise y est libérée; en d'autres termes, à la fin d'un comportement le nombre de ressources détenues est nul ssi le comportement termine. Par convention le comportement vide termine.

J'appelle système *sériel* et je note $\mathscr{S}$ le système dont tout comportement est de la forme $w_1, w_2 \ldots w_p$ où pour tout i le mot w_i est un comportement (éventuellement vide) du processus p_i qui termine sauf peut-être le dernier des w_i non vides. Le système sériel est l'archétype du système dont l'exécution se fait sans aucun parallélisme et qui est contrôlé pour s'exécuter ainsi.

Les systèmes $\mathscr{L}$, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{S}$ sont ceux pour lesquels sera calculé à la section suivante le nombre de comportements de longueur n entier donné, ainsi que le nombre de comportements de longueur n qui terminent. On peut considérer bien d'autres systèmes; ceux où tout processus a au moins une occurrence (un mot en est dit à la section 4), ceux où tout processus acquiert toutes ses ressources avant d'en libérer une (protocole de vérouillage biphase, *voir* [6] ou [8]), ceux où tout processus acquiert ses ressources dans l'ordre croissant des numéros de ressource (méthode de Havender, *voir* [7] p. 268 ou [5]), etc.

De façon générale, la réalisation de la condition d'exclusion mutuelle requiert un mécanisme (algorithme, protocole, ordonnanceur) chargé d'assurer le respect de cette condition, mécanisme que j'appelle un *contrôleur*. Ce contrôleur introduit en général plus de contraintes que ne le requiert la seule exclusion mutuelle, car il est souvent chargé d'éviter des phénomènes indésirables comme l'interblocage ou la privation (*voir* [7], [5]). Plus de contraintes implique, intuitivement, moins de parallélisme et, à coup sûr, moins de comportements. L'idée, déjà présente chez de nombreux auteurs, que plus grand est l'ensemble des comportements, pour toute notion de comportement, meilleur est le parallélisme qu'on peut espérer réaliser, a été précisée dans [6], pour un modèle semblable à celui du présent travail, de la façon suivante. Ce modèle ne tient pas compte des demandes (requêtes) d'acquisition soumises par les processus au contrôleur; on peut donc dire qu'il décrit les acquisitions faites sans délai; plus grand est l'ensemble des comportements, plus grand est donc le nombre d'acquisitions faites sans délai; plus grand est donc le parallélisme réalisable. Ainsi peut-on justifier l'intérêt d'un modèle aussi simple. On peut donc comparer les performances de contrôleurs, performance du point de vue du degré de parallélisme autorisé, en comparant les ensembles de comportements associés. De telles comparaisons utilisant l'inclusion ensembliste seulement ont été faites dans [5] et

[6]. Je propose de comparer les performances de contrôleurs en comparant les tailles des ensembles de comportements associés de longueur donnée. Cette méthode n'étant pas très pratique, j'introduis une nouvelle notion.

DÉFINITION : Soit Σ un système de p processus et r ressources. Soit c_n le nombre de comportements de Σ de longueur n, n entier positif ou nul. J'appelle *degré de parallélisme apparent* de Σ le nombre (s'il existe)

$$\alpha(\Sigma) = \frac{1}{r} \lim_{n \to \infty} c_n^{1/n}$$

où on limite n aux entiers tels que $c_n \neq 0$.

Je propose de considérer le nombre $\alpha(\Sigma)$ comme une mesure de la performance du contrôleur de Σ en ce qui concerne le parallélisme autorisé par ce contrôleur.

3. DÉNOMBREMENT DES COMPORTEMENTS

3.1. Produit de mélange de mots

DÉFINITION : Soient deux mots w et w' sur un alphabet $\mathscr{A}$; soient $v_1, v_2, \ldots, v_k, v'_1, v'_2, \ldots, v'_k$ des mots éventuellement vides sur $\mathscr{A}$ tels que $w = v_1 v_2 \ldots v_k$ et $w' = v'_1 v'_2 \ldots v'_k$; le mot $v_1 v'_1 v_2 v'_2 \ldots v_k v'_k$ est appelé un *interclassement* ou un *mélange* de w et de w'; l'ensemble des interclassements de w et de w' est dit *produit de mélange* (produit de Hurwitz, shuffle) de w et de w' et est noté $w \sqcup\!\sqcup w'$.

On étend de façon habituelle le produit de mélange aux langages. On note 1 le mot vide et $|w|$ la longueur du mot w. Le produit de mélange est associatif et commutatif, il admet 1 pour élément neutre. On prouve de façon élémentaire les résultats suivants.

LEMME 1 : *Si w et w' sont des mots sur des alphabets disjoints on a*

$$\mathrm{Card}(w \sqcup\!\sqcup w') = \binom{|w|+|w'|}{|w|}.$$

COROLLAIRE 2 : *Soient L et L' des langages sur des alphabets disjoints, $S = L \sqcup\!\sqcup L'$ et L_n (resp. L'_n, S_n) le nombre de mots de L (resp. L', S) de longueur* *n. On a l'égalité entre séries formelles*

$$\sum_{n \geq 0} S_n \frac{z^n}{n!} = \left(\sum_{n \geq 0} L_n \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} L'_n \frac{z^n}{n!} \right).$$

LEMME 3 : *Soit un processus P_i qui n'accède qu'à la seule ressource R_j; l'ensemble de ses comportements est le langage*

$$L_{i,j} = 1 + A_i(j) + A_i(j)\bar{A}_i(j) + A_i(j)\bar{A}_i(j)A_i(j) + \ldots = \sum_{k \geq 0} (A_i(j)\bar{A}_i(j))^k (1 + A_i(j)).$$

L'ensemble des comportements de $L_{i,j}$ qui terminent est le langage

$$L^t_{i,j} = \sum_{k \geq 0} (A_i(j)\bar{A}_i(j))^k.$$

LEMME 4 : *L'ensemble des comportements du processus P_i est le langage*

$$L_i = \underset{i \leq j \leq r}{\sqcup\!\sqcup} L_{i,j}.$$

L'ensemble des comportements de L_i qui terminent est le langage

$$L^t_i = \underset{1 \leq j \leq r}{\sqcup\!\sqcup} L^t_{i,j}.$$

3.2. Le système libre

A partir du lemme 4 on obtient le

LEMME 5 : *L'ensemble des comportements (resp. qui terminent) du système libre, noté encore $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{L}^t$) est le langage*

$$\mathscr{L} = \underset{1 \leq i \leq p}{\sqcup\!\sqcup} L_i = \underset{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq r}}{\sqcup\!\sqcup} L_{i,j}$$

$$(\textit{resp. } \mathscr{L}^t = \underset{1 \leq i \leq p}{\sqcup\!\sqcup} L^t_i = \underset{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq r}}{\sqcup\!\sqcup} L^t_{i,j}).$$

En application du corollaire 2 et du lemme 5 on a

THÉORÈME 6 : *Pour n entier non négatif, le nombre $c_n(\mathscr{L})$ (resp. $c_n(\mathscr{L}^t)$ de comportements du système libre (resp. qui terminent) vérifient les égalités*

$$\sum_{n \geq 0} c_n(\mathscr{L}) \frac{z^n}{n!} = (\exp z)^{rp} = \exp(rpz) \left(\textit{resp. } \sum_{n \geq 0} c_n(\mathscr{L}^t) \frac{z^n}{n!} = (\operatorname{ch} z)^{rp} \right).$$

On a donc $c_n(\mathscr{L})=(rp)^n$.

NOTATION :

$$\mathrm{ch}(z)=\frac{1}{2}(\exp(z)+\exp(-z)),\ \mathrm{sh}(z)=\frac{1}{2}(\exp(z)-\exp(-z)).$$

COROLLAIRE 7 : *Le degré de parallélisme apparent* $\alpha(\mathscr{L})$ *du système libre est égal à* p. *On a aussi* $\alpha(\mathscr{L}^t)=p$.

Preuve : L'égalité $\alpha(\mathscr{L})=p$ est évidente. Pour obtenir $\alpha(\mathscr{L}^t)$ il suffit de calculer une expression explicite de $c_n(\mathscr{L}^t)$; on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} c_n(\mathscr{L}^t)\frac{z^n}{n!}&=\frac{1}{2^{pr}}(e^z+e^{-z})^{pr}\\ &=\frac{1}{2^{pr}}\sum_i\binom{pr}{i}e^{iz}e^{-(pr-i)z}\\ &=\frac{1}{2^{pr}}\sum_i\binom{pr}{i}e^{(2i-pr)z}\\ &=\frac{1}{2^{pr}}\sum_{n\geq 0}\sum_i\binom{pr}{i}(2i-pr)^n\frac{z^n}{n!};\end{aligned}$$

d'où

$$c_n(\mathscr{L}^t)=\frac{1}{2^{pr}}\sum_i\binom{pr}{i}(2i-pr)^n=\frac{(pr)^n}{2^{pr}}\sum_i\binom{pr}{i}\left(\frac{2i}{pr}-1\right)^n.$$

Pour n grand et pair on a $c_n(\mathscr{L}^t)\sim(pr)^n/2^{pr-1}$ tandis que pour n impair $c_n(\mathscr{L}^t)=0$. D'où

$$\alpha(\mathscr{L}^t)=\frac{1}{r}\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\text{ pair}}}\left(\frac{(pr)^n}{2^{pr-1}}\right)^{1/n}=p.\quad\square$$

Le nombre $c_n(\mathscr{L})$ a donc une expression remarquablement simple. On peut l'obtenir par le raisonnement direct suivant. Soit $x=x_1x_2\ldots x_{n-1}$ un comportement de $\mathscr{L}$ de longueur $n-1\geq 0$; soit $N(x)$ le nombre de façons de prolonger x par une lettre x_n de façon que le mot xx_n soit dans $\mathscr{L}$; si $k(x)$ est le nombre de ressources détenues à la fin du comportement x [c'est-à-dire si $k(x)$ est la différence entre le nombre d'occurrences de lettres A et le nombre d'occurrences de lettres $\bar{A}$ dans x] alors x_n peut être une des $k(x)$

libérations de ressource détenue et ne peut pas être une autre libération, ou peut être une des $pr-k(x)$ acquisitions d'une ressource non détenue et ne peut pas être une autre acquisition. On a donc $N(x)=k(x)+pr-k(x)=pr$ pour tout x. Par récurrence sur n on obtient $c_n(\mathscr{L})=(pr)^n$.

3.3. Le système avec exclusion mutuelle

Considérons la projection d'un comportement du système $\mathscr{E}$ sur une ressource R_j fixée, c'est-à-dire sur l'alphabet

$$\{\bigcup_i A_i(j),\ \bigcup_i \bar{A}_i(j)\}.$$

C'est évidemment un mot du langage

$$\begin{aligned}E_j=1+\sum_{1\leq i\leq p} A_i(j)+\sum_{1\leq i\leq p} A_i(j)\bar{A}_i(j)\\ +\sum_{1\leq i\leq p} A_i(j)\bar{A}_i(j)\sum_{1\leq i'\leq p} A_{i'}(j)\\ +\sum_{1\leq i\leq p} A_i(j)\bar{A}_i(j)\sum_{1\leq i'\leq p} A_{i'}(j)\bar{A}_{i'}(j)+\dots\\ =\sum_{k\geq 0}\Big(\sum_{1\leq i\leq p} A_i(j)\bar{A}_i(j)\Big)^k\Big(1+\sum_{1\leq i'\leq p} A_{i'}(j)\Big).\end{aligned}$$

Un mot de ce langage pourrait être appelé : comportement d'une ressource avec exclusion mutuelle. Réciproquement, tout mot de E_j peut être la projection d'un comportement de $\mathscr{E}$ sur la ressource R_j. De même, les mots de

$$E_j^t=\sum_{k\geq 0}\Big(\sum_{1\leq i\leq p} A_i(j)\bar{A}_i(j)\Big)^k$$

forment l'ensemble des projections sur R_j des comportements de $\mathscr{E}$ qui terminent. On a alors le

LEMME 8 : *L'ensemble des comportements (resp. qui terminent) du système avec exclusion mutuelle, noté encore $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{E}^t$), s'écrit*

$$\mathscr{E}=\bigsqcup_{1\leq j\leq r} E_j\ (\textit{resp.}\ \mathscr{E}^t=\bigsqcup_{1\leq j\leq r} E_j^t).$$

En application du corollaire 2 et de ce lemme 8 on a

THÉORÈME 9. *Pour n entier non négatif, les nombres* $c_n(\mathscr{E})$ *[resp.* $c_n(\mathscr{E}^t)$*] des comportements (resp. qui terminent) de* $\mathscr{E}$ *de longueur n vérifient*

$$\sum_{n\geq 0} c_n(\mathscr{E})\frac{z^n}{n!} = (\operatorname{ch}(p^{1/2}z) + p^{1/2}\operatorname{sh}(p^{1/2}z))^r$$

$$\left(\textit{resp.} \sum_{n\geq 0} c_n(\mathscr{E}^t)\frac{z^n}{n!} = \operatorname{ch}^r(p^{1/2}z)\right).$$

On en déduit par un calcul analogue à celui du corollaire 7 que, pour n grand, $c_n(\mathscr{E})$ est équivalent asymptotiquement à

$$(rp^{1/2})^n\left(\left(\frac{1+p^{1/2}}{2}\right)^r + (-1)^n\left(\frac{1-p^{1/2}}{2}\right)^r\right)$$

expression qui montre que les nombres $c_n(\mathscr{E})$ croissent exponentiellement en fonction de n tout en oscillant. Pour n impair $c_n(\mathscr{E}^t)$ est nul et sinon est équivalent asymptotiquement à

$$(rp^{1/2})^n/2^{r-1}.$$

On a cependant le résultat simple

COROLLAIRE 10 : *Le degré de parallélisme apparent* $\alpha(\mathscr{E})$ *du système avec exclusion mutuelle est égal à* $p^{1/2}$. *On a aussi* $\alpha(\mathscr{E}^t) = p^{1/2}$.

Remarque : Considérons le cas $r=1$; dans tout comportement de $\mathscr{E}$ une lettre de rang pair est entièrement déterminée par la lettre qui la précède [par conséquent $c_{2n}(\mathscr{E}) = p^n$ et $c_{2n+1}(\mathscr{E}) = p^{n+1}$]; l'exposant 1/2 de p dans l'expression $\alpha(\mathscr{E}) = p^{1/2}$ peut être lu : une lettre sur deux, en termes informatiques un événement sur deux, est entièrement déterminée par la lettre, ou l'événement, précédent. Cette propriété se transmet, en quelque sorte, pour un nombre quelconque r de ressources et on peut dire que l'exposant 1/2 dans l'expression $\alpha(\mathscr{E}) = p^{1/2}$, indépendamment de r, peut être lu : dans un système avec exclusion mutuelle un événement sur deux est entièrement déterminé par les événements qui le précèdent.

3.4. Le système sériel

Je note encore $\mathscr{S}$ l'ensemble des comportements du système sériel et $\mathscr{S}^t$ l'ensemble des comportements de $\mathscr{S}$ qui terminent. Soit $w \in \mathscr{S}$; si w n'est pas vide il est, par définition, de la forme $w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_k}$ avec $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqq p$ et les mots w_{i_j}, $j = 1, 2, \ldots, k$, sont non vides et sont respectivement des comportements des processus $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}$; de plus $w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_{k-1}}$ terminent et w_{i_k} termine ssi w appartient à $\mathscr{S}^t$. En d'autres termes on a (avec les notations du lemme 4) le

LEMME 11. *On a* $\mathscr{S}^t = L_1^t L_2^t \ldots L_p^t$ *et* $\mathscr{S} = 1 + \sum_{1 \leq q \leq p} L_1^t L_2^t \ldots L_{q-1}^t (L_q - 1)$ *avec par convention* $L_0^t = 1$.

Considérons un langage L_i (resp. L_i^t), $1 \leqq i \leqq p$, de ce lemme; en posant $A_i(j) = \bar{A}_i(j) = z$ pour tout $j = 1, 2, \ldots, r$ on obtient la série génératrice des nombres de comportements $c_n(L_i)$ [resp. $c_n(L_i^t)$] de longueur n du processus P_i, soit $L_i(z) = \sum_{n \geqq 0} c_n(L_i) z^n$ [resp. $L_i^t(z) = \sum_{n \geqq 0} c_n(L_i^t) z^n$]; ces séries peuvent obtenir à partir du théorème 6 pour $p = 1$, en transformant par l'opérateur $\mathscr{B}$ une série exponentielle en une série ordinaire, et on a

$$L_i(z) = \mathscr{B}(\exp(rz)) = \frac{1}{1 - rz}$$

[resp. $L_i^t(z) = \mathscr{B}(\operatorname{ch}^r z)$]. Toujours en posant $A_i(j) = \bar{A}_i(j) = z$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, p$ et $j = 1, 2, \ldots, r$, un produit $L_i L_k$ (resp. $L_i^t L_k^t$) est changé en $L_i(z) L_k(z)$ [resp. $L_i^t(z) L_k^t(z)$]. On obtient donc le

THÉORÈME 12 : *Pour n entier non négatif, les nombres $c_n(\mathscr{S})$ [resp. $c_n(\mathscr{S}^t)$] des comportements (resp. qui terminent) du système sériel vérifient l'égalité*

$$\sum_{n \geqq 0} c_n(\mathscr{S}) z^n = 1 + \sum_{1 \geqq q \leqq p} (\mathscr{B}(\operatorname{ch}^r z))^{q-1} \frac{rz}{1 - rz}$$

$$(resp. \sum_{n \geqq 0} c_n(\mathscr{S}^t) z^n = (\mathscr{B}(\operatorname{ch}^r z))^p),$$

où $\mathscr{B}$ est la transformée de Laplace-Borel définie pour toute série formelle exponentielle associée à une suite $(f_n)_{n \geqq 0}$ par

$$\mathscr{B}\left(\sum_{n \geqq 0} f_n \frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n \geqq 0} f_n z^n.$$

Remarque : on a

$$\mathscr{B}(\operatorname{ch}^r z) = \frac{1}{2^r} \sum_{\substack{k \\ n \geqq 0}} \binom{r}{k} (r - 2k)^n z^n.$$

On en déduit par un calcul analogue à celui de la preuve du corollaire 7 que pour n grand on a les équivalents asymptotiques

$$c_{2n}(\mathscr{S}^t) \sim \binom{n+p-1}{p-1} \frac{2n}{2^{(p-1)(r-1)}}, \qquad c_{2n+1}(\mathscr{S}^t)=0,$$

$$c_{2n}(\mathscr{S}) \sim r^{2n} \sum_{1 \leqq q \leqq p-1} \binom{n-q-2}{q-1} \frac{1}{2^{(q-1)(r-1)}},$$

$$c_{2n+1}(\mathscr{S}) = \frac{1}{r} c_{2n+2}(\mathscr{S}).$$

D'où le

COROLLAIRE 13. *Le degré de parallélisme apparent* $\alpha(\mathscr{S})$ *du système libre est égal à* 1. *On a aussi* $\alpha(\mathscr{S}^t)=1$.

Remarque : Un raisonnement direct permet de montrer que $c_n(\mathscr{S})$ est proportionnel à r^n. Soit $x=x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$ un comportement de $\mathscr{S}$ de longueur $n-1 \geqq 0$; soit $N(x)$ le nombre de façons de prolonger x par une lettre x_n de façon que le mot xx_n soit dans $\mathscr{S}$; soit $k(x)$ le nombre de ressources détenues à la fin du comportement x; si $k(x) \neq 0$ alors x_n peut être

(1) une des $k(x)$ libérations possibles,

(2) une acquisition et il y en a $r-k(x)$ possibles car seul le processus en cours peut acquérir une ressource et uniquement parmi celles qu'il ne détient pas,

donc x_n peut prendre r valeurs;

si $k(x)=0$ alors x_n peut être

(1) une acquisition par le processus en cours et il y a r valeurs possibles,

(2) le début d'un nouveau processus qui acquiert une ressource et il y a r valeurs possibles pour la ressource et $p-q$ valeurs possibles pour le processus si q est le numéro du processus terminant avec x, donc $N(x)=r(p-q)$.

Dans tous les cas on a $N(x)=\beta r$ avec $\beta=1$ sauf pour les comportements x qui terminent auquel cas on a $1 \leqq \beta \leqq (p-1)r$. Par induction sur n on a $c_n(\mathscr{S})=\gamma r^n$, où γ est indépendant de r.

4. DISCUSSION

Au vue des expressions obtenues pour $c_n(\mathscr{L})$ et $c_n(\mathscr{E})$ on peut énoncer une première conclusion; pourvu que n soit assez grand, le nombre de comportements de longueur n d'un système de p processus avec exclusion mutuelle est égal, à un facteur borné près, au nombre de comportements de même longueur d'un système libre de $p^{1/2}$ processus, quelque soit le nombre de ressources.

La notion de degré de parallélisme apparent a pour but de rendre plus pratique et plus concise une conclusion de ce genre. Plus précisément, elle a pour but

(i) de retenir dans les nombres c_n ce qui en fait la croissance exponentielle en n; c'est la raison d'être de la quantité $\lim c_n^{1/n}$, que les physiciens appeleraient « limite thermodynamique », (détail technique, je prends la limite en restreignant les n à ceux qui n'annulent pas c_n, de façon à avoir une limite définie dans tous les cas traités dans ce papier; mathématiquement, il vaudrait mieux introduire quelque chose comme une limite supérieure plutôt qu'une limite);

(ii) de gommer autant que possible la dépendance des nombres c_n par rapport à r, le nombre de ressources; c'est la raison d'être du facteur $1/r$ dans la définition de α;

(iii) de capturer l'idée intuitive de degré de parallélisme au sens de nombre de processus qui peuvent s'exécuter simultanément, jusqu'à obtenir une mesure de parallélisme permettant la comparaison de différents systèmes; les deux égalités obtenues,

$$\alpha(\mathscr{L})=p \qquad \text{et} \qquad \alpha(\mathscr{S})=1,$$

correspondent bien à la réalité qu'on cherche à retenir, à savoir que dans un système libre tous les processus peuvent s'exécuter simultanément alors que dans un système sériel il ne peut y avoir qu'un processus en exécution à tout moment;

(iv) d'être insensible à certaines hypothèses restrictives sur les comportements considérés; ainsi, le degré de parallélisme apparent ne change pas si on se restreint à des comportements qui terminent (*voir* les corollaires 7, 10 et 13); on peut montrer qu'il ne change pas quand on se restreint à des comportements où tout processus apparait (formellement, dans tout comportement, pour tout i avec $1 \leqq i \leqq p$, il existe j, $1 \leqq j \leqq r$, tel que la lettre $A_i(j)$ a au moins une occurrence); on peut aussi montrer qu'en rajoutant aux comportements sériels tous les comportements qui sont concaténation de processus distincts qui terminent on garde un degré de parallélisme apparent égal à 1.

5. CONCLUSION

Un modèle simple de système de processus accédant à des ressources partagées permet de dénombrer les comportements de longueur donnée pour différents systèmes typiques; les systèmes libre, sériel et avec exclusion mutuelle. Ces dénombrements fournissent un outil quantitatif de comparaison de différents systèmes. Pour faciliter de telles comparaisons et pour capturer l'idée intuitive de degré de parallélisme d'un système, la notion de « degré de parallélisme apparent » a été introduite. Ce degré de parallélisme apparent vaut, pour p processus et quelque soit le nombre de ressources, p pour le système libre, 1 pour le système sériel et $p^{1/2}$ pour le système avec exclusion mutuelle; en bref, du point de vue de cette mesure, un système sériel se comporte comme un système libre d'un seul processus et un système avec exclusion mutuelle de p processus se comporte comme un système libre de $p^{1/2}$ processus.

L'intérêt de la notion de degré de parallélisme apparent serait cependant beaucoup plus grand si on pouvait le calculer pour d'autres systèmes et tout particulièrement pour les systèmes plus proches de la pratique dans lesquels le mécanisme réalisant l'exclusion mutuelle introduit des contraintes supplémentaires (par exemple pour éviter interblocages ou privations); le degré de parallélisme apparent de tels systèmes serait alors une véritable mesure de la performance d'un mécanisme de contrôle. Il serait par exemple intéressant de disposer du degré de parallélisme apparent d'un système de processus itérés où l'exclusion mutuelle est contrôlée par la méthode de Havender, c'est-à-dire, pour notre modèle, où tout processus acquiert ses ressources dans l'ordre croissant des numéros de ressource; ou encore d'un système de processus itérés où l'allocation se fait comme dans de nombreux systèmes d'exploitation (ou le verrouillage dans de nombreux systèmes de gestion de base de données) : un processus ne peut commencer son exécution que si toutes ses ressources sont libres et les acquiert toutes au départ.

Des contraintes sur les comportements de tout processus peuvent aussi être considérées; ainsi, il serait intéressant de calculer le degré de parallélisme apparent pour les itérations de processus biphases (*voir* [6] ou [8]) (*); de même pour les processus à acquisitions imbriquées, i. e. les acquisitions et les

(*) Note rajoutée sur les épreuves : des résultats partiels ont été obtenus par D. Arquès, J. Françon, M.-T. Guichet et P. Guichet dans « Comparison of Algorithms Controlling Concurrent Access to a Database: a Combinatorial Approach », communication présentée à l'ICALP, Rennes, juillet 1986.

libérations suivent la loi « premier libéré dernier acquis », pour lesquels Minoura [5] a trouvé un mécanisme de contrôle évitant tout interblocage et permettant un parallélisme maximal.

Les méthodes de calcul employées ici sont, malgré les apparences, proches de celles utilisées pour étudier les structures de données dynamiques sous l'hypothèse dite de la population bornée (*voir* [1], [2]), où c'est la théorie des fractions continues de Jacobi qui joue un rôle central; cette théorie devrait permettre le calcul du degré de parallélisme apparent de systèmes ayant d'autres types de contraintes, par exemple que le nombre de ressources simultanément détenues est toujours borné par un nombre donné strictement inférieur à r.

Ces questions sont en cours d'investigation.

REMERCIEMENTS

L'auteur doit à Gérard Roucairol des éclaircissements sur la filiation des notions de base de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. CHENO, P. FLAJOLET, J. FRANÇON, C. PUECH et J. VUILLEMIN, *Dynamic Data Structures; Finite Files, Limiting Profiles and Variance Analysis*, 18th Allerton Conference on Communication, Control and Computing, Allerton, 8-10 octobre 1980.
2. P. FLAJOLET et J. FRANÇON, *Structures de données dynamiques en réservoir borné*, Actes des journées algorithmiques de Nice, juin 1980.
3. R. M. KARP et R. E. MILLER, *Parallel Program Schemata*, J.C.S.S., vol. 3, n° 2, 1969, p. 147-195.
4. R. M. KELLER, *Parallel Program Schemata and Maximal Parallelism*, J. A.C.M., vol. 20, n° 3, 1973, p. 514-537 et n° 4, 1973, p. 696-710.
5. T. MINOURA, *Deadlock Avoidance Revisited*, J. A.C.M., vol. 29, n° 4, 1982, p. 1023-1048.
6. C. H. PAPADIMITRIOU, *The Serializability of Concurrent Database Updates*, J. A.C.M., vol. 26, n° 4, 1979, p. 631-653.
7. J. PETERSON et A. SILBERSCHATZ, *Operating System Concepts*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1983.
8. J. D. ULLMAN, *Principles of Database Systems*, 2e éd., Pitman, London, 1983.