Informatique théorique et applications

Patrice Séébold

Complément à l'étude des suites de Thue-Morse généralisées

Informatique théorique et applications, tome 20, n° 2 (1986), p. 157-181

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1986__20_2_157_0>

Informatique théorique et Applications/Theoretical Informatics and Applications
(vol. 20, n° 2, 1986, p. 157 à 181)

COMPLÉMENT A L'ÉTUDE DES SUITES DE THUE-MORSE GÉNÉRALISÉES (*)

par Patrice SÉÉBOLD [1]

Communiqué par J.-E. PIN

Résumé. – *Nous présentons une extension des suites de Thue-Morse généralisées introduites par Christol, Kamae, Mendès-France et Rauzy et prouvons que ces suites ne contiennent pas de cube sauf d'une espèce très particulière, ce qui améliore notablement les résultats précédemment obtenus par Černý.*

Abstract. – *We present an extension of the generalized Thue-Morse sequences introduced by Christol, Kamae, Mendès-France and Rauzy and we prove that these sequences do not contain any cube except of a very particular form, which considerably improves the previous results of Černý.*

1. INTRODUCTION

C'est en 1906 que Thue [9] introduisit pour la première fois une suite infinie sur l'alphabet à deux lettres $\mathscr{A}=\{a, b\}$ ne contenant pas de facteur de la forme $xvxvx$ où $x\in\mathscr{A}$ et $v\in\mathscr{A}^*$.

Cette suite qui, depuis, a été étudiée par un grand nombre d'auteurs (voir notamment [4] à [10]) est désormais bien connue sous le nom de suite de Thue-Morse et possède de nombreuses propriétés remarquables. En particulier, elle peut être construite en fonction de la parité du nombre de « 1 » dans l'écriture binaire des entiers.

C'est cette définition qui est à l'origine de la notion de suite de Thue-Morse généralisée introduite par Christol, Kamae, Mendès-France et Rauzy en 1980 [2] dans leur travail reliant les automates aux suites algébriques.

Une telle suite de Thue-Morse généralisée est simplement définie par la parité du nombre d'occurrences d'un mot $u\in\{0, 1\}^+$ dans l'écriture binaire des entiers.

(*) Reçu janvier 1985, révisé mars 1985.

[1] U.E.R. de Mathématiques, Université Paris-VII et Laboratoire d'Informatique Théorique et Programmation, L.A. n° 248 du C.N.R.S., 2, place Jussieu, 75221 Paris Cedex 05, France.

Černý [1] a étudié ces suites et prouvé qu'elles ne contiennent pas de facteur de la forme $(xv)^{2|u|}x$ où $x \in \mathscr{A}$ et $v \in \mathscr{A}^*$.

Dans ce qui suit, nous complétons cette étude sur plusieurs points.

Dans un premier temps, nous redéfinissons les suites de Thue-Morse étudiées par Černý et nous en donnons une définition équivalente en utilisant la construction d'une famille de tag-systèmes associés aux mots u. Nous établissons alors de nombreuses propriétés de ces tag-systèmes qui nous permettent de prouver que les suites de Thue-Morse ainsi généralisées ne contiennent pas de facteur de la forme v^3 où $v \in \mathscr{A}^+$ et $|v|_a \neq 0$, $|v|_b \neq 0$ (théorème 15).

Le résultat de Černý est alors énoncé comme corollaire de cette propriété qui nous permet ensuite de prouver simplement que ces suites ne peuvent pas être obtenues par itération d'un morphisme binaire (corollaire 17).

Pour compléter cette étude, nous donnons pour finir deux autres généralisations possibles de la suite de Thue-Morse et énonçons, pour ces deux généralisations, des résultats analogues au théorème 15 (théorèmes 18 et 19).

2. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Soit $\mathscr{A}$ un ensemble fini appelé *alphabet* et $\mathscr{A}^*$ le monoïde libre engendré par $\mathscr{A}$.

Les éléments de $\mathscr{A}$ sont appelés des *lettres* et les éléments de $\mathscr{A}^*$ des *mots*. On note ε le *mot vide*, élément neutre de $\mathscr{A}^*$ pour la concaténation des mots (le concaténé de deux mots u et v étant simplement le mot uv) et $\mathscr{A}^+ = \mathscr{A}^* - \{\varepsilon\}$.

Soit $u \in \mathscr{A}^*$, on note $|u|$ la *longueur* du mot u, c'est-à-dire le nombre de lettres de u. En particulier, $|\varepsilon| = 0$. De même, pour tout $x \in \mathscr{A}$, on notera $|u|_x$ le nombre d'occurrences de la lettre x dans le mot u.

L'*image-miroir* d'un mot $u \in \mathscr{A}^*$ sera notée, selon les cas, $\tilde{u}$ ou $(u)^\sim$ et est définie de la façon suivante:

si $u = x_1 \ldots x_n$, $x_i \in \mathscr{A}$, $1 \leq i \leq n$ alors $\tilde{u} = x_n \ldots x_1$ et $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$.

Soient u et v deux mots de $\mathscr{A}^*$, on dit que v est un *facteur* (resp. *facteur propre, facteur gauche, facteur droit*) de u s'il existe $u_1 \in \mathscr{A}^*$ et $u_2 \in \mathscr{A}^*$ tels que $u = u_1 v u_2$ (resp. $u_1 \neq \varepsilon$ ou $u_2 \neq \varepsilon$, $u_1 = \varepsilon$, $u_2 = \varepsilon$).

Soit v un mot non vide et u un facteur propre de v, u est un *bord* de v si u est à la fois facteur gauche et facteur droit de v. Formellement, ceci signifie qu'il existe deux mots $v_1 \neq \varepsilon$ et $v_2 \neq \varepsilon$ tels que $v = v_1 u = u v_2$. Si un tel mot u n'existe pas, v est dit *sans bord*.

Un *mot (ou suite) infini(e)* sur $\mathscr{A}$ est une application $\mathbf{x}: \mathbb{N} \to \mathscr{A}$. On l'écrit: $\mathbf{x} = x_0 x_1 \ldots x_i \ldots$, $i \in \mathbb{N}$, $x_i \in \mathscr{A}$.

La notion de facteur se généralise aisément aux suites infinies de la façon suivante: soit $u \in \mathscr{A}^*$ et $\mathbf{x}$ une suite infinie sur $\mathscr{A}$, u est *facteur* (resp. *facteur gauche*) de $\mathbf{x}$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que:

$$u = x_n \ldots x_{n+m} \quad (\text{resp.}\ u = x_0 x_1 \ldots x_m).$$

On note $\mathbf{x}^{[k]} = x_0 \ldots x_{k-1}$ le facteur gauche de longueur k de $\mathbf{x}$.

Un mot est dit *sans facteur chevauchant* (resp. *sans carré, sans cube*) s'il ne contient pas de facteur de la forme $xuxux$, $x \in \mathscr{A}$, $u \in \mathscr{A}^*$ (resp. $uu = u^2$, $uuu = u^3$, $u \in \mathscr{A}^+$).

Dans ce qui suit, nous utiliserons la notion de suite infinie engendrée par morphisme.

Soit $f: \mathscr{A}^* \to \mathscr{A}^*$ un morphisme. f est dit *non effaçant* si, pour tout $a \in \mathscr{A}$, $f(a) \neq \varepsilon$ et f est dit *prolongeable en* $x_0 \in \mathscr{A}$ s'il existe $u \in \mathscr{A}^+$ tel que $f(x_0) = x_0 u$. (Par la suite, tous les morphismes considérés seront implicitement supposés non effaçants et prolongeables.) Ainsi, chaque mot $f^n(x_0)$ est facteur gauche propre de $f^{n+1}(x_0)$ et le mot infini $\mathbf{x}$, déterminé par la condition:

$$\mathbf{x}^{[k]} = f^n(x_0) \qquad \text{pour} \quad k = |f^n(x_0)|, \quad n \in \mathbb{N}$$

est la *limite* de la suite $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$.

On écrit alors $\mathbf{x} = f^w(x_0)$.

Pour finir, nous utiliserons de façon cruciale la notion de tag-système.

L'introduction d'une famille de tag-systèmes (image par morphisme d'une suite obtenue par itération d'un autre morphisme) va nous permettre de décomposer la construction des suites de Thue-Morse généralisées en deux étapes.

La première étape consiste à construire, au moyen d'un premier morphisme, un mot infini sur un alphabet ayant plus de deux lettres. Nous étudions alors les propriétés de ce mot, puis, par un second morphisme, nous obtenons une suite de Thue-Morse généralisée comme image sur un alphabet à deux lettres du premier mot, ce qui nous permet d'utiliser les propriétés obtenues sur le mot de départ pour prouver que les suites de Thue-Morse généralisées ont la propriété annoncée.

Formellement, un *tag-système* est un quintuplet $T = (\Sigma, x, f, \Gamma, g)$ où:

– Σ et Γ sont deux alphabets finis;

– $x \in \Sigma$;

– f est un morphisme de Σ^* dans lui-même prolongeable en x;

– g est un morphisme de Σ^* dans Γ^*.

(Pour une étude détaillée des tag-systèmes, *voir* [3].)

3. RÉSULTATS ET PREUVES

Soit $\mathscr{A}=\{a, b\}$.

La suite de Thue-Morse $\mathbf{M}$ est définie comme suit: $\mathbf{M}=\mu^{\mathrm{W}}(a)$ où μ est le morphisme de Thue-Morse:

$$\mu: \mathscr{A}^* \to \mathscr{A}^*, \qquad a \mapsto ab, \qquad b \mapsto ba.$$

On a $\mathbf{M}=abbabaabbaababba...$ et l'on sait depuis Thue [10] que $\mathbf{M}$ est sans facteur chevauchant.

Il est aisé de constater que $\mathbf{M}$ peut également être défini de la façon suivante: pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit t_i la $(i+1)$-ième lettre de $\mathbf{M}$:

$$t_i=\begin{cases} a & \text{si le nombre de « 1 » dans l'écriture binaire de } i \text{ est pair,} \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous allons maintenant généraliser cette construction.

A tout moment $u \in \{0, 1\}^+$, on associe un mot infini $\mathbf{u}=u_0 u_1 \ldots u_i \ldots$, $i \in \mathbb{N}$, défini comme suit:

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n=\begin{cases} a & \text{si} \quad |\mathrm{bin}_u(n)|_u \text{ est paire,} \\ b & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\mathrm{bin}_u(n)$ est la représentation binaire de l'entier n précédée (à gauche) de $(|u|-1)$ occurrences de « 0 » et $|bin_u(n)|_u$ est le nombre d'occurrences distinctes (mais pouvant éventuellement se chevaucher) du mot u dans $\mathrm{bin}_u(n)$.

Exemple: Soit $u=010$ et $n=42$, on a:

$$\mathrm{bin}_{010}(42)=00101010$$

et

$$|\mathrm{bin}_{010}(42)|_{010}=3 \quad (00101010).$$

Dans ce qui suit, si aucune ambiguïté n'est possible, nous écrirons pour simplifier $\mathrm{bin}(n)$ à la place de $\mathrm{bin}_u(n)$.

Notons que si $u\in\{0, 1\}^+-\{0\}^+$, cette définition est équivalente à celle de Černý. En effet, dans [1], Černý adoptait pour $\mathrm{bin}_u(n)$ la définition suivante :

$\mathrm{bin}_u(n)$ est l'écriture binaire de l'entier n précédée (à gauche) *d'au moins* $|u|$ occurrences de « 0 ».

Mais il est clair que, puisque $u\in\{0, 1\}^+-\{0\}^+$, u contient au moins un « 1 » et, donc, commence par *au plus* $(|u|-1)$ « 0 ». Ainsi, tous les « 0 » que l'on pourrait placer à gauche de $\mathrm{bin}_u(n)$, en plus des $|u|-1$ de notre définition, ne changeraient rien au nombre d'occurrences de u dans $\mathrm{bin}_u(n)$ et le mot $\mathbf{u}$ est donc le même dans les deux cas.

Dans le cas où $u\in\{0, 1\}^+-\{0\}^+$, nous allons donc pouvoir comparer les résultats obtenus avec ceux de Černý.

De plus, le nombre de « 0 » précédant $\mathrm{bin}(n)$ étant fixé, nous pourrons également définir le mot infini $\mathbf{u}$ pour $u\in\{0\}^+$, ce qui n'était pas possible avec la définition de Černý.

Dans ce qui suit, nous allons donc prouver le résultat suivant (théorème 15) : pour tout $u\in\{0, 1\}^+$, $|u|=n$ et pour tout $v\in\mathscr{A}^+$, v facteur de $\mathbf{u}$, les deux assertions suivantes sont vérifiées :

(1) Si $v=a^p$ (ou b^p), $p\in\mathbb{N}$, alors $p\leqq 2^n$.

(2) Si $|v|_a\neq 0$ *et* $|v|_b\neq 0$, alors v^3 n'est pas facteur de $\mathbf{u}$.

a. Une construction intermédiaire

A tout mot $u\in\{0, 1\}^+$, nous allons pour commencer associer un tag-système T_u et, pour ce faire, nous supposons dans un premier temps que $u\in 1\{0, 1\}^*$ (c'est-à-dire que u admet comme facteur gauche un « 1 »).

On définit, par récurrence, une famille de tag-systèmes de la façon suivante :

A $u=1$, on associe le tag-système suivant :

$$T_1=(\Sigma_1, a_1, f_1, \mathscr{A}, g_1),$$

où :

- $\Sigma_1=\{a_1, \bar{a}_1\}$;
- $f_1:\Sigma_1^*\to\Sigma_1^*$, $a_1\mapsto a_1\bar{a}_1$, $\bar{a}_1\mapsto\bar{a}_1 a_1$;
- $g_1:\Sigma_1^*\to\mathscr{A}^*$, $a_1\mapsto a$, $\bar{a}_1\mapsto b$.

Il est clair que f_1 n'est rien d'autre que le morphisme de Thue-Morse et, puisque g_1 est un codage, on a :

$$g_1(f_1^w(a_1))=\mathbf{M}.$$

Soit, maintenant, $u \in 1\{0, 1\}^+$ avec $|u| \geqq 2$. D'autre part, soit $u' \in 1\{0, 1\}^*$ tel que $u = u'0$ ou $u = u'1$ et posons $n = |u|$.

A u, on associe le tag-système suivant:

$$T_u = (\Sigma_u, a_1, f_u, \mathscr{A}, g_u),$$

où:

- $\Sigma_u = \Sigma_{u'} \, U \, \{a_n, \bar{a}_n\}$;
- $g_u : \Sigma_u^* \to \mathscr{A};\ a_i \mapsto a,\ \bar{a}_i \mapsto b,\ 1 \leqq i \leqq n$;
- $f_u : \Sigma_u^* \to \Sigma_u^*$ est défini par:

(1) $f_u(a_i) = f_{u'}(a_i)$ si $1 \leqq i \leqq n-2$,

(2) $f_u(a_{n-1}) = \alpha(f_{u'}(a_{n-1}))$ avec $\alpha : \Sigma_{u'} \to \Sigma_u$,

$$a_i \mapsto a_i, \quad 1 \leqq i \leqq n-1,$$
$$\bar{a}_i \mapsto a_n$$

et $f_u(a_n)$ est obtenu en appliquant la règle suivante:

$$f_{u'0}(a_n) = \bar{a}_{k+1}\, a_{l+1} \tag{3}$$

$$f_{u'1}(a_n) = a_{k+1}\, \bar{a}_{l+1} \tag{4}$$

où k est la longueur du plus long bord de $u'0$ et l est la longueur du plus long bord de $u'1$.

Enfin, pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$1 \leqq i \leqq n, \quad f_u(\bar{a}_i) = \overline{f_u(a_i)} \tag{5}$$

(avec la convention $\bar{\bar{a}}_i = a_i$, $1 \leqq i \leqq n$).

Exemple: Puisque les tag-systèmes T_u sont obtenus par récurrence sur les facteurs gauches des mots u, il nous faut, pour obtenir le tag-système associé à un mot u donné, construire une partie des tag-systèmes associés à ses facteur gauches.

Soit, par exemple, $u = 101$.

Le premier facteur gauche de u est le mot 1.

Par définition, on a:

$$\Sigma_1 = \{a_1, \bar{a}_1\} \qquad \text{et} \qquad f_1(a_1) = a_1\, \bar{a}_1.$$

Le second facteur gauche de u est le mot 10:

$$\Sigma_{10} = \{a_1, a_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2\},$$
$$f_{10}(a_1) = a_1\, a_2 \quad (2),$$
$$f_{10}(a_2) = \bar{a}_1\, a_2 \quad (3).$$

(Nous notons, après chaque image d'une lettre, la règle utilisée pour l'obtenir.)

Nous sommes maintenant en mesure de construire le tag-système T_{101}.

On a $T_{101}=(\Sigma_{101},\, a_1,\, f_{101},\, \mathscr{A},\, g_{101})$ où:

$$\Sigma_{101}=\{a_1, a_2, a_3, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\},$$

$$g_{101}:\Sigma_{101}^{*}\to\mathscr{A},$$

$$\left.\begin{array}{l} a_i\mapsto a \\ \bar{a}_i\mapsto b \end{array}\right\} i\in\{1, 2, 3\}$$

$$\text{et } f_{101}:\Sigma_{101}^{*}\to\Sigma_{101}^{*}:$$

$$\begin{array}{ll} a_1\mapsto a_1\, a_2 & (1), \\ a_2\mapsto a_3\, a_2 & (2), \\ a_3\mapsto a_1\, \bar{a}_2 & (4), \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{a}_1\mapsto \bar{a}_1\, \bar{a}_2 \\ \bar{a}_2\mapsto \bar{a}_3\, \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3\mapsto \bar{a}_1\, a_2 \end{array}\right\} (5)$$

On a alors:

$$f_{101}^{w}(a_1)=a_1\, a_2\, a_3\, a_2\, a_1\, \bar{a}_2\, a_3\, a_2\, a_1\, a_2\, \bar{a}_3\, \bar{a}_2 \ldots$$

et

$$\mathbf{101}=a\,a\,a\,a\,a\,b\,a\,a\,a\,a\,b\,b \ldots$$

Il nous faut ici prouver deux propriétés des tag-systèmes $T_u\,(u\in 1\{0,\,1\}^*)$ qui nous seront nécessaires lors de la définition des tag-systèmes T_u pour les mots $u\in 0\{0,\,1\}^*$.

PROPRIÉTÉ 1: *Pour tout* $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, *si* $u=1^n$ *alors pour tout* $j\in\mathbb{N}$, $1\leqq j\leqq n$, *on a:*

$$f_u(a_j)=xy \qquad \textit{et} \qquad y\neq a_j.$$

Preuve. — Nous allons prouver ceci par récurrence sur n.

L'assertion est évidemment vraie si $n=1$ $(u=1)$ puisque, dans ce cas, $f_1(a_1)=a_1\,\bar{a}_1$.

Supposons, maintenant, $u=1^n$, $n\geqq 2$ et soit $u'=1^{n-1}$. On suppose, par induction, que la propriété est vraie pour u'.

Par définition on a, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $1 \leqq j \leqq n-2$, $f_u(a_j) = f_{u'}(a_j)$ et la propriété est alors vraie par induction.

D'autre part, par définition de $f_{u'}$, on a $f_{u'}(a_{n-1}) = a_1 \bar{a}_{n-1}$. Donc $f_u(a_{n-1}) = a_1 a_n$ et la propriété est également vraie pour $j = n-1$.

Pour finir, $f_u(a_n) = a_1 \bar{a}_n$, donc l'assertion est vraie pour $j = n$ et la propriété est prouvée. ■

PROPRIÉTÉ 2: *Pour tout* $u \in 1\{0, 1\}^+$, $|u| = n \geqq 2$ *et* $u \neq 1^n$, *soit* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $u = 1^k 0 u_1$, $u_1 \in \{0, 1\}^*$. *Alors:*

$$k+1 = \min\{i \in \mathbb{N} / f_u(a_i) = x a_i,\ x \in \Sigma_u\}.$$

Preuve: Nous allons prouver ceci par induction sur n.

Si $n = 2$, alors $u = 10$.

Dans ce cas, $k = 1$ et la propriété est vérifiée car:

$$f_{10}(a_1) = a_1 a_2 \qquad \text{et} \qquad f_{10}(a_2) = \bar{a}_1 a_2.$$

Maintenant, soit $u \in 1\{0, 1\}^+$, $|u| = n \geqq 3$, $u \neq 1^n$ et soit $u' \in 1\{0, 1\}^+$ tel que $u = u'0$ ou $u = u'1$. Par induction, on suppose la propriété vérifiée pour u'.

Si $u' = 1^k 0 u_1$, $1 \leqq k < n-1$, $u_1 \in \{0, 1\}^*$, alors $u = 1^k 0 u_1 0$ ou $u = 1^k 0 u_1 1$ et, puisque la propriété est vérifiée pour u', elle l'est également pour u.

Si $u' = 1^{n-1}$, alors $u = 1^{n-1} 0$ et, par définition de f_u, $f_u(a_n) = \bar{a}_1 a_n$.

Mais, d'après la propriété 1, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $1 \leqq j \leqq n-2$, on a $f_{u'}(a_j) = xy$ et $y \neq a_j$. Or, par définition, $f_u(a_j) = f_{u'}(a_j)$, si $j \leqq n-2$.

De plus, $f_{u'}(a_{n-1}) = a_1 \bar{a}_{n-1}$, donc $f_u(a_{n-1}) = a_1 a_n$.

Donc, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $1 \leqq j \leqq n-1$, on a $f_u(a_j) = xy$ avec $y \neq a_j$.

Ainsi, on a bien $k+1 = \min\{i \in \mathbb{N} / f_u(a_i) = x a_i,\ x \in \Sigma_u\}$ et la propriété est donc vérifiée. ■

Nous sommes maintenant en mesure d'associer à tout mot $u \in 0\{0, 1\}^*$ un tag-système T_u de la façon suivante (nous aurons deux cas différents selon que u contient une occurrence de « 1 » ou non).

Soit, dans un premier temps, $u \in 0\{0, 1\}^+ - \{0\}^+$ (donc $|u| \geqq 2$ et $|u|_1 \neq 0$).

On note $|u| = n$ et $\bar{u} \in 1\{0, 1\}^+$, $u = 1^n - u$ ($\bar{u}$ est obtenu à partir de u en remplaçant les «0» par des «1» et vice-versa).

Puisque $\bar{u} \in 1 u \in 1\{0, 1\}^+$, on peut sans ambiguïté associer à u le tag-système suivant:

$$T_u = (\Sigma_u, a_j, f_u, \mathscr{A}, g_u)$$

où :

- $\Sigma_u = \Sigma_{\bar{u}}$;
- $g_u = g_{\bar{u}}$;
- $f_u : \Sigma_u^* \to \Sigma_u^*$, $x \mapsto (f_{\bar{u}}(x))^{\sim}$;
- $a_j \in \Sigma_u$ et $j = \min \{ i \in \mathbb{N} / 1 \leqq i \leqq n$ et f_u est prolongeable en $a_i \}$.

(Cette définition est bien cohérente car, d'après la propriété 2, un tel j existe nécessairement.)

Exemple : En reprenant l'exemple précédant ($\bar{u} = 101$), on obtient :

$$u = 010,$$

$$a_j = a_2$$

et

$$\begin{array}{ll} f_{010}(a_1) = a_2\, a_1, & f_{010}(\bar{a}_1) = \bar{a}_2\, \bar{a}_1, \\ f_{010}(a_2) = a_2\, a_3, & f_{010}(\bar{a}_2) = \bar{a}_2\, \bar{a}_3, \\ f_{010}(a_3) = \bar{a}_2\, a_1, & f_{010}(\bar{a}_3) = a_2\, \bar{a}_1. \end{array}$$

Il nous reste à définir T_u dans le cas où $u \in \{ 0 \}^+$.
Soit, donc, $u = 0^n$, $n \in \mathbb{N} - \{ 0 \}$ et soit $\bar{u} = 1^n$.
A u, on associe le tag-système T_u défini comme suit :

$$T_u = (\Sigma_u, c, f_u, \mathscr{A}, h_u)$$

où :

- $\Sigma_u = \Sigma_{\bar{u}}\, U \{ c \}$, $c \notin \Sigma_{\bar{u}}$;
- $f_u : \Sigma_u^* \to \Sigma_u^*$, $x \mapsto (f_{\bar{u}}(x))^{\sim}$, $x \in \Sigma_{\bar{u}}$, $c \mapsto c a_1$;
- $g_u : \Sigma_u^* \to \mathscr{A}$, $a_i \mapsto a$, $\bar{a}_i \mapsto b$, $1 \leqq i \leqq n$, $c \mapsto b$.

Dans ce qui suit, on notera, pour tout $u \in 0\{ 0, 1 \}^*$, $|u| = n$, $\bar{u} = 1^n - u$.

On voit que la définition donnée ici des tag-systèmes T_u est basée sur la définition des tag-systèmes $T_{\bar{u}}$ et la remarque qui suit est une conséquence directe de cette similitude.

Remarque 3 : 1. *Pour tout* $u \in 0 \{ 0, 1 \}^*$, *pour tout* $p \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $x \in \Sigma_{\bar{u}}$, $f_u^p(x) = (f_{\bar{u}}^p(x))^{\sim}$.

2. *Il est important de noter que si* $u \in 0\{ 0, 1 \}^*$, $|u| = n$:

$$f_u(a_n) = (f_{\bar{u}}(a_n))^{\sim} = \begin{cases} a_{l+1}\, \bar{a}_{k+1} & si \quad \bar{u} = \bar{u}'0, \\ \bar{a}_{l+1}\, a_{k+1} & si \quad \bar{u} = \bar{u}'\, 1, \end{cases}$$

où k est la longueur du plus long bord de $\bar{u}'0$ et l est la longueur du plus long bord de $\bar{u}'1$. Ainsi :

$$f_u(a_n)=\begin{cases}\bar{a}_{k+1}\,a_{l+1} & si \quad u=u'0,\\ a_{k+1}\,\bar{a}_{l+1} & si \quad u=u'1,\end{cases}$$

où k est la longueur du plus long bord de $u'0$ et l est la longueur du plus long bord de $u'1$. $f_u(a_n)$ est donc défini de la même façon si $u \in 0\{0, 1\}^*$ ou si $u \in 1\{0, 1\}^*$.

Soit :

$$x=\begin{cases} a_1 & \text{si} \quad u \in 1\{0, 1\}^*,\\ a_j & \text{si} \quad u \in 0\{0, 1\}^+ - \{0\}^+,\\ & \quad j=\min\{i \in \mathbb{N}/1 \leqq i \leqq n \text{ et } f_u \text{prolongeable en } a_i\},\\ c & \text{si} \quad u \in \{0\}^+.\end{cases}$$

Remarque 4 : *Par construction, pour tout $u \in \{0, 1\}^+$, on a que f_u est un morphisme* 2*-uniforme* (*c'est-à-dire que, pour tout $y \in \Sigma_u$, $|f_u(y)|=2$*), *prolongeable en x et g_u est un codage :*

$$(g_u(\Sigma_u)=\mathscr{A}).$$

Ainsi T_u est un tag-système uniforme de module 2 (*suivant la terminologie de Cobham* [3]).

Dans ce qui suit, nous noterons :

$$\mathbf{v}_u=f_u^w(x)=v_{u,0}\,v_{u,1}\ldots v_{u,i}\ldots,$$
$$i \in \mathbb{N}, \qquad v_{u,i} \in \Sigma_u$$

et

$$g_u(v_{u,p})=t_{u,p}, \qquad p \in \mathbb{N}.$$

b. Propriétés des tag-systèmes T_u

Nous allons maintenant énoncer plusieurs propriétés des tag-systèmes T_u qui nous permettront d'une part de prouver que, pour tout $u \in \{0, 1\}^+$, $g_u(\mathbf{v}_u)=\mathbf{u}$ (proposition 6) et, d'autre part, que les suites $\mathbf{u}$ possèdent bien la propriété annoncée (théorème 15).

Nous n'allons cependant traiter ici que le cas des mots $u \in 1\{0, 1\}^*$. Au vu de la remarque 3, le cas $u \in 0\{0, 1\}^*$ se traiterait de la même façon et cette restriction n'est donc pas essentielle, mais permet d'alléger notablement les preuves.

Nous commençons par un lemme technique dont la démonstration est relativement délicate, mais qui sera très utile par la suite.

Pour tout $u \in 1\{0, 1\}^*$, $|u|=n$, on définit l'application $I : \Sigma_u \to \mathbb{N}$ de la façon suivante :

pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$1 \leqq i \leqq n, \qquad I(a_i) = I(\bar{a}_i) = i.$$

LEMME 5 : *Soit* $u \in 1\{0, 1\}^*$, $|u|=n$, *soit* $k \in \mathbb{N}$ *et soit* r_k *le facteur droit de longueur* $n-1$ *de* bin (k). *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $I(v_{u,k}) = i$, $1 \leqq i \leqq n$;

(ii) *le plus long facteur droit de* r_k *qui est également facteur gauche de* u *est de longueur* $i-1$.

Preuve : Supposons $k=0$.

Pour tout $u \in 1\{0, 1\}^*$, $v_{u,0} = a_1$, donc $I(v_{u,0}) = 1$.

D'autre part, bin $(0) = 0^n$ où $|u|=n$, donc $r_0 = 0^{n-1}$ et, puisque u a un « 1 » comme facteur gauche, le plus long facteur droit de r_0 qui est également facteur gauche de u est ε qui a pour longueur 0.

Ainsi, si $k=0$, l'équivalence est bien vérifiée pour tout $u \in 1\{0, 1\}^*$.

Maintenant, supposons $n=1$.

Dans ce cas, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $r_k = \varepsilon$ et le plus long facteur droit de r_k qui est également facteur gauche de u est nécessairement de longueur 0.

Mais, puisque $n=1$, on a $u=1$ et, par définition, $I(v_{u,k}) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

L'équivalence est donc également bien vérifiée si $n=1$.

Nous allons maintenant prouver le résultat par induction sur k et sur n.

Soit donc $u \in 1\{0, 1\}^+$, $|u| = n \geqq 2$ et soit $u' \in 1\{0, 1\}^*$ tel que $u = u'0$ ou $u = u'1$. De plus, soit $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ et soit $k \in \mathbb{N}$ tels que $p = 2k$ ou $p = 2k+1$. Pour finir, soient r_k et r_p les facteurs droits respectifs de longueur $n-1$ de bin (k) et bin (p).

Par hypothèse de récurrence, on suppose que, pour u', la propriété est vérifiée pour tout entier et que, pour u, elle est vérifiée pour tout entier inférieur ou égal à k, et nous allons montrer qu'alors elle l'est également pour p.

On pose $r_k = xvw$ où w est le plus long facteur droit de r_k qui est également facteur gauche de u et :

$$\begin{cases} x = v = \varepsilon & \text{si} \quad w = r_k, \\ x \in \{0, 1\}, & v \in \{0, 1\}^* \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Par hypothèse d'induction, $I(v_{u,k})=i$ pour un $i \in \mathbb{N}$, $1 \leqq i \leqq n$, si et seulement si $|w|=i-1$.

De plus, on pose $I(v_{u,\,2k})=j_1$, $I(v_{u,\,2k+1})=j_2$ et $r_{2k}=v_1 w_1$, $r_{2k+1}=v_2 w_2$ où w_1 et w_2 sont les plus longs facteurs droits respectivement de r_{2k} et r_{2k+1} qui sont également facteurs gauches de u et $v_1 \in \{0, 1\}^*$, $v_2 \in \{0, 1\}^*$. (Remarquons que $v_1 w_1 = vw0$ et $v_2 w_2 = vw1$.)

Notre intention est de montrer que $|w_1|=j_1-1$ et $|w_2|=j_2-1$.

Nous allons réaliser cette preuve en trois étapes en fonction de la valeur de i.

(*a*) $i \leqq n-2$ (ce cas ne peut se produire que si $n \geqq 3$)

Dans ce cas, par construction, on sait que :

$$f_u(v_{u,k})=f_{u'}(v_{u,k})=v_{u,\,2k}\,v_{u,\,2k+1}.$$

De plus, puisque $i \leqq n-2$, on a $|w| \leqq n-3$, donc $|x|=1$ et $|v| \geqq 1$.

Soit $r'_k=vw$ le facteur droit de longueur $n-2$ de $\mathrm{bin}(k)$. Puisque $|w| \leqq n-3$ et puisque w est facteur gauche de u, w est également facteur gauche de u' (car $|u'|=n-1$). Alors, par hypothèse de récurrence sur u' et puisque $|w|=i-1$, on a $I(v_{u',k})=i$.

Maintenant, par hypothèse d'induction sur u' et puisque :

$$f_{u'}(v_{u,k})=v_{u,\,2k}\;v_{u,\,2k+1},$$

on a :

$$r'_{2k}=v'_1 w'_1 \qquad \text{et} \qquad |w'_1|=j_1-1 \quad [\text{car}\, I(v_{u,\,2k})=j_1]$$

et

$$r'_{2k+1}=v'_2 w'_2 \qquad \text{et} \qquad |w'_2|=j_2-1 \quad [\text{car}\, I(v_{u,\,2k+1})=j_2],$$

où r'_{2k} et r'_{2k+1} sont les facteurs droits de longueur $n-2$ de bin $(2k)$ et bin $(2k+1)$, et w'_1 et w'_2 les plus longs facteurs droits de r'_{2k} et r'_{2k+1} qui sont également facteurs gauches de u'; $v'_1 \in \{0, 1\}^*$, $v'_2 \in \{0, 1\}^*$.

– Soit $p=2k$.

On a $r_p=r_{2k}=x_1 r'_{2k}=x_1 v'_1 w'_1$ où $x_1 \in \{0, 1\}$.

w'_1 est facteur gauche de u', donc de u.

Si $v'_1 \neq \varepsilon$, $v'_1 w'_1$ n'est pas facteur gauche de u', donc $v'_1 w'_1$ n'est pas facteur gauche de u. Donc, le plus long facteur droit de r_{2k} qui est également facteur gauche de u est soit w'_1, soit $x_1 v'_1 w'_1$.

Supposons que $x_1 v'_1 w'_1$ soit facteur gauche de u. Alors, puisque $x_1 v'_1 w'_1 = r_{2k} = vw0$, on aurait vw facteur gauche de u, ce qui est impossible puisque $|v| \geqq 1$.

Donc le plus long facteur droit de r_{2k} qui est facteur gauche de u est w'_1 qui a pour longueur $j_1 - 1$. Et puisque $I(v_{u,2k}) = j_1$, la propriété est vérifiée pour $p = 2k$.

Le cas $p = 2k+1$ se traitant de la même façon (en remplaçant les indices 1 par des indices 2), le cas $i \leqq n-2$ est résolu.

(*b*) $i = n-1$

On va supposer ici $u' = u''0$, $u'' \in \{0, 1\}^*$ (le cas $u' = u''1$ se traite de semblable façon).

Puisque $i = n-1$ et puisque $I(v_{u,k}) = i$, on a $v_{u,k} = a_{n-1}$ ou $v_{u,k} = \bar{a}_{n-1}$.

Par construction, on a alors :

$$f_{u'}(v_{u,k}) = xy,$$

avec

$$I(x) = j, \qquad 1 \leqq j \leqq n \qquad \text{et} \qquad I(y) = l+1,$$

où l est la longueur du plus long bord de $u''1$ et

$$f_u(v_{u,k}) = v_{u,2k}\, v_{u,2k+1}$$

avec :

$$I(v_{u,2k}) = n \qquad \text{et} \qquad I(v_{u,2k+1}) = l+1.$$

Mais, par hypothèse d'induction, $r_k = xw$ avec $|x| = 1$, $|w| = n-2$ et w est facteur gauche de u. Donc $w = u''$.

$r_{2k} = w0 = u''0 = u'$. Or $|u'| = n-1$ et u' est facteur gauche de u. Ainsi, puisque $I(v_{u,2k}) = n$, la propriété est bien vérifiée pour $p = 2k$.

$r_{2k+1} = w1 = u''1$. Il est clair que le plus long facteur droit de $u''1$ qui est également facteur gauche de u est le plus long bord de $u''1$. En effet, puisque $u' = u''0$, ce facteur gauche ne peut pas être $u''1$ lui-même et, par suite, il est nécessairement facteur gauche de u''.

Mais ce plus long bord a pour longueur l et $I(v_{u,2k+1}) = l+1$. La propriété est donc également vérifiée pour $p = 2k+1$ et le cas $i = n-1$ est résolu.

(*c*) $i = n$

Dans ce cas, il est clair que la propriété est vérifiée par définition même de f_u.

Ainsi, si la propriété est vraie pour tout $u' \in 1\{0, 1\}^*$ avec $|u'|<|u|$ et si, pour u, on la suppose vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors elle est vérifiée (pour u) pour $p=2k$ ou $p=2k+1$, ce qui achève la preuve du lemme 5. ■

De ce lemme, nous allons maintenant tirer plusieurs conséquences qui vont nous permettre de décrire les tag-systèmes T_u et les mots infinis qu'ils engendrent.

PROPOSITION 6 : *Pour tout* $u \in 1\{0, 1\}^*$, *on a* : $\mathbf{u}=g_u(\mathbf{v}_u)$.

Preuve : Il faut montrer que, pour tout $u \in 1\{0, 1\}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p=t_{u, p}$, ce que l'on va faire par récurrence sur p.

L'égalité est vraie si $p=0$.

En effet, si $u \in 1\{0, 1\}^*$, on a $v_{u, 0}=a_j$, $1 \leqq j \leqq n$, donc $t_{u, 0}=a$.

De plus, puisque u contient un « 1 », on a nécessairement $|\operatorname{bin}(0)|_u=0$, donc $u_0=a=t_{u, 0}$.

Soit, maintenant, $p \in \mathbb{N}-\{0\}$ et soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $p=2k$ ou $p=2k+1$, et supposons que $u_k=t_{u, k}$.

De plus, soit $u' \in \{0, 1\}^*$ tel que $u=u'0$ (le cas $u=u'1$ se traiterait de manière similaire) et soit $n=|u|$.

Par définition de $\mathbf{u}$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_{2k}=\begin{cases}\bar{u}_k & \text{si } \operatorname{bin}(k) \text{ se termine par } u',\\ u_k & \text{sinon}\end{cases}$$

et

$$u_{2k+1}=u_k.$$

D'autre part, par définition de f_u et puisque $u=u'0$, on a, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $1 \leqq i \leqq n$:

$$f_u(a_i)=xy \quad \text{avec} \quad x \in \{a_1, \ldots, a_n\} \text{ si } i \neq n,$$
$$x \in \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\} \text{ si } i=n \quad \text{et} \quad y \in \{a_1, \ldots, a_n\}$$

et $f_u(\bar{a}_i)=\bar{x}\bar{y}$.

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$t_{u, 2k}=\begin{cases}\bar{t}_{u, k} & \text{si} \quad v_{u, k}=a_n \quad \text{ou} \quad v_{u, k}=\bar{a}_n,\\ t_{u, k} & \text{sinon}\end{cases}$$

et $$t_{u, 2k+1}=t_{u, k}.$$

Or, d'après le lemme 5, on a $v_{u,k}=a_n$ (ou $\bar{a}_n$) si et seulement si $\mathrm{bin}(k)$ possède un facteur droit de longueur $n-1$ qui est également facteur gauche de u, donc si et seulement si $\mathrm{bin}(k)$ se termine par u'.

On a donc bien, pour tout $u\in 1\{0, 1\}^*$ et pour tout $p\in\mathbb{N}$, $u_p=t_{u,p}$ ce qui achève la preuve de la proposition 6. ■

Après avoir justifié, avec la proposition 6, la construction des tag-systèmes T_u, nous allons maintenant en énoncer trois propriétés qui sont des conséquences directes du lemme 5.

PROPRIÉTÉ 7 : *Pour tout* $u\in 1\{0, 1\}^*$, $|u|=n$, *le mot* $I(\mathbf{v}_u)$ *est périodique et admet une période de longueur* 2^{n-1}.

Cette propriété est évidente puisque l'on a vu, au lemme 5, que l'indice de chaque lettre de $\mathbf{v}_u$ ne dépend que du facteur droit de longueur $n-1$ de l'expression binaire de son rang.

PROPRIÉTÉ 8 : *Pour tout* $u\in 1\{0, 1\}^*$, $|u|=n$, *si* yy *est un carré de* $I(\mathbf{v}_u)$ *alors il existe* $k\in\mathbb{N}$ *tel que* $|y|=k.2^{n-1}$.

La preuve de ce résultat repose sur le fait suivant, dont l'énoncé est pléthorique, mais qui est évident par construction :

FAIT 9 : Soit $u\in 1\{0, 1\}^+$ avec $|u|=n\geqq 2$ et soit $u'\in 1\{0, 1\}^*$ tel que $u=u'0$ ou $u=u'1$. Soient k_1 et k_2 deux entiers. Soient r_{k_1} et r_{k_2} les facteurs droits de longueur $n-1$ de $\mathrm{bin}(k_1)$ et $\mathrm{bin}(k_2)$ et r'_{k_1} et r'_{k_2} les facteurs droits de longueur $n-2$ de bin (k_1) et $\mathrm{bin}(k_2)$. Soient, enfin, j_1 et j_2 les longueurs des plus longs facteurs droits de r_{k_1} et r_{k_2} qui sont également facteurs gauches de u et j'_1 et j'_2 les longueurs des plus longs facteurs droits de r'_{k_1} et r'_{k_2} qui sont également facteurs gauches de u'.

Si $j_1=j_2$, alors $j'_1=j'_2$.

Preuve de la propriété 8

Nous allons prouver ce résultat par récurrence sur n.

Pour $n=1$, la propriété est évidente puisque, pour tout $i\in\mathbb{N}$, $I(v_{1,i})=1$ et, d'autre part, $2^{n-1}=1$.

Supposons maintenant $n\geqq 2$ et si $y'y'$ est un carré de $I(\mathbf{v}_{u'})$, alors $|y'|=k.2^{n-2}$, $k\in\mathbb{N}$.

Soit yy un carré de $I(\mathbf{v}_u)$.

D'après le lemme 5 et le fait 9, il existe alors un y' tel que $y'y'$ est un carré de $I(\mathbf{v}_{u'})$ et $|y'|=|y|$. Ainsi, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $|y|=k.2^{n-2}$.

Supposons k impair.

Puisque, d'après la propriété 7, $I(\mathbf{v}_u)$ est périodique et admet une période de longueur 2^{n-1} et puisque $|yy|=k.2^{n-1}$, il est alors clair que $I(\mathbf{v}_u)$ admet une période de longueur 2^{n-2}.

Soit P cette période. On a $P=I(v_{u,0}\dots v_{u,2^{n-2}-1})$.

Puisque $u'\in 1\{0, 1\}^*$ et, comme $|u'|=n-1$, on a $r_j\neq u'$ pour tout $j\in\mathbb{N}$, $0\leqq j\leqq 2^{n-2}-1$.

Ainsi, d'après le lemme 5, $I(v_{u,j})\neq n$, $0\leqq j\leqq 2^{n-2}-1$.

Mais, puisque $|u'|=n-1$, il est clair qu'il existe $j\in\mathbb{N}$, $0\leqq j\leqq 2^{n-2}-1$ tel que $r_{2^{n-2}+j}=u'$.

Dans ce cas, $I(v_{u,2^{n-2}+j})=n\neq I(v_{u,j})$, ce qui contredit le fait que $P=I(v_{u,0}\dots v_{u,2^{n-2}-1})$.

Donc k est pair et $|y|$ est bien un multiple de 2^{n-1}. ■

Propriété 10 : *Soit $u\in 1\{0, 1\}^*$ et supposons $|u|=n\geqq 2$ (c'est-à-dire $u\neq 1$). Pour tout $x\in\Sigma_u$ et tout $x'\in\Sigma_u$, si $f_u(x)=yz$ et $f_u(x')=y'z'$ alors $I(y)\neq I(z')$ et $I(z)\neq I(y')$.*

[En particulier, une même lettre de Σ_u ne peut pas être à la fois la première lettre de l'image d'une lettre et la seconde lettre de l'image d'une lettre et si $f_u(x)=yz$, $I(y)\neq I(z)$.]

Preuve : Soit $u\in 1\{0, 1\}^+$, $|u|=n\geqq 2$ et soient x, x', y, y', z et z' des lettres de Σ_u telles que $f_u(x)=yz$ et $f_u(x')=y'z'$. Dans ce cas, dans $\mathbf{v}_u$, y est une lettre de rang pair et z' est une lettre de rang impair.

Or si $n\geqq 2$, il est clair que, d'après le lemme 5, deux lettres de rang ayant des parités différentes ne peuvent pas avoir le même indice et, donc, $I(y)\neq I(z')$.

Il en est évidemment de même pour z et y'. ■

Pour finir, nous aurons besoin d'un dernier résultat.

Proposition 11 : *Pour tout $u\in 1\{0, 1\}^*$, le morphisme f_u est injectif.*

Preuve : Soit $u\in 1\{0, 1\}^*$ et soit $n\in\mathbb{N}$, $|u|=n$.

Nous allons montrer par récurrence sur n que, si $x\in\Sigma_u$, $x'\in\Sigma_u$ et $x\neq x'$, alors $f_u(x)\neq f_u(x')$.

Ceci est clairement vrai pour $n=1$.

Soit, donc, $n\geqq 2$ et $u\in 1\{0, 1\}^+$, $|u|=n$. Soit de plus $u'\in 1\{0, 1\}^*$ tel que $u=u'0$ ou $u=u'1$ et supposons, par induction, que le résultat est vrai pour $f_{u'}$.

Soit, maintenant, $x\in\Sigma_u$ et $x'\in\Sigma_u$, $x\neq x'$.

Si $x=a_i$ et $x'=\bar{a}_j$, $1\leqq i, j\leqq n$, il est clair, par définition, que $f_u(x)\neq f_u(x')$.

Supposons donc $x=a_i$, $x'=a_j$, $1\leqq i, j\leqq n$ et $x\neq x'$ (c'est-à-dire $i\neq j$).

Si $i \leqq n-2$ et $j \leqq n-2$, on a $f_u(x)=f_{u'}(x)$, $f_u(x')=f_{u'}(x')$ et donc, par hypothèse d'induction, $f_u(x) \neq f_u(x')$.

D'autre part, $f_u(a_{n-1})=yz$ et $y=a_n$, $z \in \{a_1, \ldots, a_n\}$ ou vice-versa, et $f_u(a_n)=y'z'$ et $y'=\bar{a}_k$ ou $z'=\bar{a}_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqq k \leqq n$.

Et puisque, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $1 \leqq i \leqq n-2$, $f_u(a_i)=y''z''$ avec $y'' \in \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, $z'' \in \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, il est alors clair que $f_u(a_i) \neq f_u(a_{n-1}) \neq f_u(a_n) \neq f_u(a_i)$. ■

Nous sommes maintenant prêts pour montrer les deux résultats importants de cette section.

THÉROÈME 12 : *Pour tout $u \in 1\{0, 1\}^*$, $\mathbf{v}_u$ est un mot infini sans facteur chevauchant.*

Preuve : Soit $u \in 1\{0, 1\}^*$ et soit $n \in \mathbb{N}$, $|u|=n$.

Si $u=1$, alors f_u n'est autre que le morphisme de Thue-Morse et l'on sait que, dans ce cas, $\mathbf{v}_u$ est un mot infini sans facteur chevauchant.

L'assertion est donc bien vérifiée si $n=1$.

Dans ce qui suit, nous supposerons donc $n \geqq 2$ et nous allons montrer que, pour tout mot $r \in \Sigma_u^*$, $\mathbf{v}_u$ ne contient pas de facteur de la forme $xrxrx$ avec $x \in \Sigma_u$.

La preuve se fait pas récurrence sur $|r|$.

L'affirmation est vraie pour $|r|=0$ $(r=\varepsilon)$.

En effet, si ce n'était pas le cas, $\mathbf{v}_u$ contiendrait un facteur de la forme xxx, $x \in \Sigma_u$.

Par construction, ceci signifierait qu'il existe $y \in \Sigma_u$ tel que $f_u(y)=xx$, ce qui est impossible d'après la propriété 10.

Soit maintenant $r \in \Sigma_u^*$, $|r|>0$. On suppose, par induction, que l'affirmation est vraie pour tout mot $r' \in \Sigma_u^*$, $|r'|<|r|$ et on va montrer qu'alors elle l'est également pour r.

Supposons que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire que $\mathbf{v}_u$ contient un facteur de la forme $xrxrx$, $x \in \Sigma_u$. On peut supposer, sans restriction, que le rang du premier x est pair.

D'après la propriété 8, puisque $xrxr$ est un carré de $\mathbf{v}_u$, on a $|xr|=k \cdot 2^{n-1}$, $k \in \mathbb{N}$, donc $|r|$ est impaire (car $n \geqq 2$). Dans ce cas, il existe $t \in \Sigma_u^+$ tel que $xr=f_u(t)$.

Par injectivité de f_u (propriété 11), on a alors que $\mathbf{v}_u$ contient un facteur de la forme tty où $y \in \Sigma_u$ et $f_u(y)=xx'$, $x' \in \Sigma_u$.

Posons $t=y't'$ avec $y' \in \Sigma_u$ et $t' \in \Sigma_u^*$.

D'après la propriété 8, puisque tt est un carré de $\mathbf{v}_u$, on a $|t|=k'.2^{n-1}$, $k' \in \mathbb{N}$.

Or, puisque, d'après la propriété 7, $I(\mathbf{v}_u)$ admet une période de longueur 2^{n-1}, on a $I(y)=I(y')$ et, puisque $f_u(y)$ et $f_u(y')$ commencent tous deux par x, on a nécessairement $y=y'$.

Donc $\mathbf{v}_u$ contient un facteur de la forme $y'\,t'\,y'\,t'\,y'$ avec $|t'|<|r|$, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence.

Ainsi, pour tout mot $r \in \Sigma_u^*$, $\mathbf{v}_u$ ne contient pas de facteur de la forme $xrxrx$ avec $x \in \Sigma_u$ et $\mathbf{v}_u$ est donc bien un mot infini sans facteur chevauchant. ■

c) Une propriété remarquable des suites de Thue-Morse généralisées

Après avoir étudié en détail la structure des tag-systèmes $T_u (u \in \{0, 1\}^*)$ et, en particulier, des mots $\mathbf{v}_u$ correspondants, nous sommes maintenant en mesure de prouver une propriété remarquable des mots $\mathbf{u}$ (propriété qui améliore nettement celle précédemment démontrée par Černý[1]).

Avant de commencer, notons deux faits importants.

Remarque 13 : *Pour tout* $u \in 1\{0, 1\}^*$, $|u|=n$ *et pour tout* y *facteur de* $\mathbf{v}_u$, $|y|=2^{n-1}$, *on a* : $|I(y)|_n=1$.

Preuve : Soit $u \in 1\{0, 1\}^*$, $|u|=n$.

On a vu (propriété 7) que $I(\mathbf{v}_u)$ est périodique de période P avec $|P|=2^{n-1}$.

En particulier, $P=I(v_{u,0} \ldots v_{u,2^{n-1}-1})$.

Soit $u' \in 1\{0, 1\}^*$ tel que $u=u'0$ ou $u'1$. $|u'|=n-1$, donc il existe nécessairement un unique $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqq k \leqq 2^{n-1}-1$, tel que $r_k=u'$ [où r_k est le facteur droit de longueur $n-1$ de $\mathrm{bin}(k)$].

Alors, d'après le lemme 5, $I(v_{u,k})=n$ et, puisque ce k est unique, la remarque est établie. ■

La remarque suivante est une conséquence directe de la définition de T_u.

Remarque 14 : *Pour tout* $u \in 1\{0, 1\}^*$, $|u|=n$ *et pour tout* $k \in \mathbb{N}$, k *pair, soit* x *le facteur de* $\mathbf{v}_u$ *tel que* $u_k u_{k+1}=g_u(f_u(x))$.

Les assertions suivantes sont vraies par définition de f_u :

(1) *si* $u_k u_{k+1}=ab$ *alors* $x=a_n$ *ou* $x=\bar{a}_n$;

(2) *si* $u_k u_{k+1}=ba$ *alors* $x=\bar{a}_n$ *ou* $x=a_n$;

(3) *si* $u_k u_{k+1}=aa$ *alors* $x=a_i$, $1 \leqq i \leqq n$;

(4) *si* $u_k u_{k+1}=bb$ *alors* $x=\bar{a}_i$, $1 \leqq i \leqq n$.

THÉORÈME 15 : *Pour tout* $u \in 1\{0, 1\}^*$, $|u|=n$ *et pour tout* $v \in \mathscr{A}^+$, v *facteur de* $\mathbf{u}$, *les deux assertions suivantes sont vérifiées* :

(1) *Si* $v=a^p$ (*ou* b^p), $p \in \mathbb{N}$, *alors* $p \leqq 2^n$.

(2) *Si* $|v|_a \neq 0$ *et* $|v|_b \neq 0$, *alors* v^3 *n'est pas facteur de* $\mathbf{u}$.

Preuve : Si $u=1$, $\mathbf{u}$ n'est autre que le mot de Thue-Morse qui est sans facteur chevauchant et, dans ce cas, les deux assertions sont bien vérifiées.

Soit, maintenant, $u \in 1\{0, 1\}^+$, $|u|=n \geqq 2$ et soit $v \in \mathscr{A}^+$ un facteur de $\mathbf{u}$.

Nous allons prouver les deux assertions séparément.

(1) Supposons que $v=d^p$, $d \in \mathscr{A}$, $p \in \mathbb{N}$.

Dans ce cas, puisque $\mathbf{u}=g_u(\mathbf{v}_u)$, il existe $t \in \Sigma_u^+$ tel que t est facteur de $\mathbf{v}_u$ et $g_u(t)=v$.

Supposons $|t| \geqq 2^n+1$ et posons $t=xyx'y'z$ avec $x \in \Sigma_u$, $y \in \Sigma_u^*$, $x' \in \Sigma_u$, $y' \in \Sigma_u^*$, $z \in \Sigma_u^+$ et $|xy|=2^{n-1}=|x'y'|$.

Puisque, d'après la propriété 7, $I(\mathbf{v}_u)$ est périodique et admet une période de longueur 2^{n-1} et puisque $g_u(xy)=g_u(x'y')=d^{2^{n-1}}$, on a $xy=x'y'$.

Soit, maintenant, z_1 la première lettre de z. Toujours par périodicité de $I(\mathbf{v}_u)$, on a $I(z_1)=I(x)$.

Mais $g_u(z_1)=g_u(x)$, donc $z_1=x$ et $\mathbf{v}_u$ contient $xyxyx$ comme facteur, ce qui contredit le fait que $\mathbf{v}_u$ soit sans facteur chevauchant (théorème 12).

Ainsi $|t| \leqq 2^n$ et, par conséquent, si $v=d^p$, $d \in \mathscr{A}$, alors $p \leqq 2^n$.

(2) Avant de commencer, notons que, puisque $n \geqq 2$, nous sommes bien dans les conditions d'application de la propriété 10.

Nous allons maintenant prouver l'assertion par récurrence sur $|v|$.

Puisque l'on suppose $|v|_a \neq 0$ *et* $|v|_b \neq 0$, on a $|v| \geqq 2$.

Si $|v|=2$, alors $v=ab$ ou $v=ba$.

Supposons $v=ab$ (les deux cas sont symétriques) et supposons que v^3 est facteur de $\mathbf{u}$.

Alors, puisque $v^3=ababab$, il existe $x \in \Sigma_u$ et $x' \in \Sigma_u$ tels que ab(ou $ba)=g_u(f_u(x))=g_u(f_u(x'))$ et xx' est facteur de $\mathbf{v}_u$.

Mais alors, d'après la remarque 14, on a $I(x)=I(x')=n$.

Dans ce cas, puisque xx' est facteur de $\mathbf{v}_u$, il existe $y \in \Sigma_u$, $y' \in \Sigma_u$, $z \in \Sigma_u$ et $z' \in \Sigma_u$ tels que :

$$f_u(y)=xx'$$

ou

$$f_u(y)=zx \text{ et } f_u(y')=x'z'.$$

Mais ceci est impossible d'après la propriété 10.

Donc, si $|v|=2$, alors $\mathbf{u}$ ne contient pas v^3 comme facteur.

Par induction, nous supposons maintenant $|v| \geqq 3$ et, si v' est facteur de $\mathbf{u}$ et $|v'|<|v|$, alors v'^3 n'est pas facteur de $\mathbf{u}$. On peut également supposer, sans restriction, que v commence par un a.

Pour finir, on dira que deux facteurs de $\mathbf{v}_u$, t et t', sont *équivalents* et on notera $t \approx t'$, si $g_u(t) = g_u(t')$.

Nous décomposons maintenant l'étude en deux cas suivant que $|v|$ est paire ou impaire.

(a) $|v|$ *est paire*

S'il existe $t \in \Sigma_u^+$ tel que $v = g_u(f_u(t))$, alors il existe $t_1 \in \Sigma_u^+$, $t_2 \in \Sigma_u^+$ et $t_3 \in \Sigma_u^+$, $|t_1| = |t_2| = |t_3|$, tels que $t_1 t_2 t_3$ est facteur de $\mathbf{v}_u$ et $v^3 = g_u(f_u(t_1 t_2 t_3))$.

Mais dans ce cas, d'après la remarque 14, il est clair que $t_1 \approx t_2 \approx t_3$ et, puisque $t_1 t_2 t_3$ est facteur de $\mathbf{v}_u$ et $|t_1 t_2 t_3| = (1/2)|v^3|$, $g_u(t_1 t_2 t_3)$ est un cube de u et $|g_u(t_1 t_2 t_3)| < |v^3|$, ce qui est impossible par hypothèse d'induction.

Sinon, posons $v = xv'y$ avec $x \in \mathscr{A}$, $y \in \mathscr{A}$, $v' \in \mathscr{A}^+$, $|v'|$ est paire, $|v'| \geqq 2$ et soient $z_1 \in \mathscr{A}$ et $z_2 \in \mathscr{A}$ tels que $z_1 v^3 z_2$ est facteur de $\mathbf{u}$.

Il existe $x_1 \in \Sigma_u$, $x_2 \in \Sigma_u$, $x_3 \in \Sigma_u$, $x_4 \in \Sigma_u$, $t_1 \in \Sigma_u^+$, $t_2 \in \Sigma_u^+$ et $t_3 \in \Sigma_u^+$ tels que :

$$z_1 v^3 z_2 = g_u(f_u(x_1 t_1 x_2 t_2 x_3 t_3 x_4)),$$

avec :

$$\begin{gathered} z_1 x = g_u(f_u(x_1)), \\ yx = g_u(f_u(x_2)) = g_u(f_u(x_3)), \\ yz_2 = g_u(f_u(x_4)) \end{gathered}$$

et

$$v' = g_u(f_u(t_1)) = g_u(f_u(t_2)) = g_u(f_u(t_3)).$$

Cette situation peut être illustrée par le schéma suivant :

$z_1 x$	v'	yx	v'	yx	v'	yz_2
x_1	t_1	x_2	t_2	x_3	t_3	x_4

D'après la remarque 14, on a : $x_2 \approx x_3$ et $t_1 \approx t_2 \approx t_3$.

Deux cas sont maintenant possibles suivant que $x = y$ ou non. (Notons que, puisque l'on a supposé que v commence par un a, on a $x = a$.)

— $x = y$, donc $x = y = a$.

Alors $x_2 = a_i$ et $x_3 = a_j$, $1 \leqq i, j \leqq n$.

Si $z_1 = a$, alors $x_1 = a_p$, $1 \leqq p \leqq n$.

Si $z_2 = a$, alors $x_4 = a_p$, $1 \leqq p \leqq n$.

Sinon, $z_1 = z_2 = b$.

Si $g_u(f_u(a_n)) = ab$, alors $x_4 = a_n$.

Si $g_u(f_u(a_n)) = ba$, alors $x_1 = a_n$.

Il est clair que, dans tous les cas, $x_1 \approx x_2 \approx x_3$ ou $x_2 \approx x_3 \approx x_4$.

Donc l'un des deux facteurs $g_u(x_1 t_1 x_2 t_2 x_3 t_3)$ ou $g_u(t_1 x_2 t_2 x_3 t_3 x_4)$ est un cube de $\mathbf{u}$ de longueur inférieure à $|v|$, ce qui contredit l'hypothèse d'induction.

– $x \neq y$, donc $y = b$.

Supposons $g_u(f_u(a_n)) = ba$ [le cas $g_u(f_u(a_n)) = ab$ serait symétrique].

Alors $x_2 = x_3 = a_n$.

Si $z_1 = a$, alors $x_1 = a_i$, $1 \leqq i \leqq n$.

Si $z_1 = b$, alors $x_1 = a_n$.

Dans les deux cas, $x_1 \approx x_2 \approx x_3$ et, comme précédemment, on est en contradiction avec l'hypothèse d'induction.

Donc, si v^3 est facteur de $\mathbf{u}$ et $|v|$ paire, on est, dans tous les cas, en contradiction avec l'hypothèse de récurrence, et ce cas n'est donc pas possible.

(*b*) $|v|$ *est impaire*

Posons $v = xv'y$ avec $x = a$, $y \in \mathscr{A}$, $v' \in \mathscr{A}^+$ et $|v'|$ impaire.

De plus, on suppose qu'il existe $t \in \Sigma_u^+$ tel que $vvxv' = g_u(f_u(t))$ [le cas $v'yvv = g_u(f_u(t))$ serait symétrique] et t facteur de $\mathbf{v}_u$.

Il existe alors $t_1 \in \Sigma_u^+$, $t_2 \in \Sigma_u^+$, $t_3 \in \Sigma_u^+$ et $z \in \Sigma_u$ tels que : $xv' = g_u(f_u(t_1)) = g_u(f_u(t_3))$

$v'y = g_u(f_u(t_2))$

et $yx = g_u(f_u(z))$.

(En particulier, $|t_1| = |t_2| = |t_3|$).

La situation peut être illustrée par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} xv' & yx & v'y & xv' & y \\ \hline t_1 & z & t_2 & t_3 & \end{array} \;\ldots$$

Trois cas peuvent alors se présenter :

(α) $xv' \in \{aa\}^+$

Dans ce cas, $t_1 \in \{a_1, \ldots, a_n\}^+$ et, puisque $|v|_b \neq 0$, $y = b$.

Alors $yx = ba$ et, d'après la remarque 14, $z = a_n$ ou $z = \bar{a}_n$.

De plus, $v'y$ se termine par ab, donc t_2 se termine par a_n ou $\bar{a}_n$.

Mais alors, puisque $|t_2|=|t_3|$ et d'après la remarque 13, t_3 se termine par a_n ou $\bar{a}_n$, donc xv' se termine par ab ou ba, ce qui contredit l'hypothèse $xv' \in \{aa\}^+$.

Ce cas ne peut donc pas avoir lieu.

(β) $xv' \in \{aa, bb\}^+ - \{aa\}^+$

Si xv' commence par $a^p b^{p'} a^{p''}$, alors p et p' sont pairs.

Donc $v'y$ commence par $a^{p-1} b^{p'} a^{p''}$ et $p-1$ et $p-1+p'$ sont impairs.

Mais alors, il existe $t'_2 \in \Sigma_u^*$, $t''_2 \in \Sigma_u^*$ et $t'''_2 \in \Sigma_u^*$ tels que $t_2 = t'_2 z_1 t''_2 z_2 t'''_2$ et $z_1 = a_n$ ou $\bar{a}_n$, $z_2 = a_n$ ou $\bar{a}_n$.

Dans ce cas, puisque $|t_2|=|t_3|$ et d'après la remarque 13, t_3 devrait contenir au moins un facteur a_n ou $\bar{a}_n$, ce qui est impossible puisque $g_u(f_u(t_3)) = xv' \in \{aa, bb\}^+$.

Si $xv' = a^p b^{p'}$ et $y = a$ alors, comme ci-dessus, t_2 contient une occurrence de a_n et une occurence de $\bar{a}_n$ et, dans ce cas, t_3 devrait contenir au moins une occurrence de a_n ou $\bar{a}_n$, ce qui n'est pas.

Si $xv' = a^p b^{p'}$ et $y = b$ alors $z = a_n$ ou $\bar{a}_n$ et, puisque t_2 contient une occurrence de a_n ou $\bar{a}_n$, t_3 devrait également contenir une occurrence de a_n ou $\bar{a}_n$, ce qui n'est pas.

Ce cas ne peut donc pas avoir lieu.

(γ) $xv' \in \{aa, bb, ab, ba\}^+ - \{aa, bb\}^+$

On peut supposer que $xv' = v_1 ab v_2$ avec $|v_1|$ et $|v_2|$ paires.

Dans ce cas, $t_1 = t'_1 \delta t''_1$ et $t_3 = t'_3 \delta' t''_3$, $|t'_1| = |t'_3|$ et $I(\delta) = I(\delta') = n$.

La situation peut être illustrée par le schéma suivant :

v_1	ab	v_2	yx	$v'y$	v_1	ab	v_2
t'_1	δ	t''_1	z	t_2	t'_3	δ'	t''_3

Mais alors, puisque $|t_1| = |t_2| = |t_3|$, on a $|t''_1 z t'_3| = |t_2|$, donc $|t''_1 z t_2 t'_3|$ est paire et le δ de t_1 est la première lettre de l'image d'une lettre de Σ_u alors que le δ' de t_3 est la seconde (ou vice-versa), ce qui est impossible d'après la propriété 10.

Ce cas ne peut donc pas avoir lieu.

Ainsi, si $|v|$ est impaire, aucun des trois cas ne peut se produire et, puisque le cas $|v|$ paire est contradictoire, on a bien qu'en aucun cas v^3 n'est facteur de **u**, sauf si $v^3 = a^p$ ou b^p, $p \leq 2^n$, ce qui achève la preuve du théorème 15. ■

Puisque l'on a vu que les résultats précédents étaient également valables dans le cas où $u \in 0\{0, 1\}^*$, nous pouvons énoncer le théorème 15 sous sa forme définitive :

THÉORÈME15 : *Pour tout* $u \in \{0, 1\}^+$, $|u| = n$ *et pour tout* $v \in \mathscr{A}^+$, *v facteur de* **u**, *les deux assertions suivantes sont vérifiées :*

(1) *Si* $v = a^p$ *(ou* b^p*),* $p \in \mathbb{N}$, *alors* $p \leqq 2^n$.

(2) *Si* $|v|_a \neq 0$ *et* $|v|_b \neq 0$, *alors* v^3 *n'est pas facteur de* **u**.

Ce théorème admet deux corollaires intéressants.

COROLLAIRE16 (Černý [1]) : *Pour tout* $u \in \{0, 1\}^+ - \{0\}^+$, **u** *ne contient pas de facteur de la forme :*

$$(xv)^{2^{|u|}} x$$

où $x \in \mathscr{A}$ *et* $v \in \mathscr{A}^*$.

COROLLAIRE 17 : *Pour tout* $u \in \{0, 1\}^+$, $u \neq 1$, *le mot* **u** *ne peut pas être engendré par un morphisme.*

Preuve : On sait (voir [7]) que **M** et $\bar{\mathbf{M}}$ (obtenu à partir de **M** en interchangeant a et b) sont les seuls mots infinis sans facteur chevauchant qui peuvent être engendrés par un morphisme sur $\mathscr{A}$.

Pour $u = 0$, on a donc que **u** ne peut pas être engendré par morphisme puisque **u** est un mot infini sans facteur chevauchant qui commence par *baba* et est donc différent de **M** et $\bar{\mathbf{M}}$.

Soit, maintenant, $u \in \{0, 1\}^+$ et $|u| \geqq 2$.

On peut aisément constater que, dans ce cas, **u** contient a^3 et b^3 comme facteurs.

Si **u** pouvait être engendré par un morphisme g, **u** contiendrait $g(a^3)$ et $g(b^3)$ ou $g^2(a^3)$ et $g^2(b^3)$ comme facteurs.

Mais, puisque $|g(x)|_a \neq 0$ *et* $|g(x)|_b \neq 0$ pour $x = a$ ou $x = b$, **u** contiendrait alors un facteur v^3 avec $|v|_a \neq 0$ *et* $|v|_b \neq 0$, ce qui est impossible d'après le théorème 15. ■

Pour compléter cette étude, nous indiquons maintenant deux autres généralisations possibles de la suite de Thue-Morse et, pour chacune, un analogue du théorème 15. (Pour une étude complète, voir [8].)

d. Une seconde généralisation

Dans ce qui précède, nous avons décrit une première généralisation possible de la suite de Thue-Morse **M** en adoptant comme définition pour $\mathrm{bin}_u(n)$,

$u \in \{0, 1\}^+$, l'écriture binaire de l'entier n précédée de $(|u|-1)$ occurrences de « 0 » et pour $|\mathrm{bin}_u(n)|_u$ le nombre d'occurrences distinctes (mais pouvant éventuellement se chevaucher) du mot u dans $\mathrm{bin}_u(n)$.

Ici, nous ne changeons pas la définition de $|\mathrm{bin}_u(n)|_u$, mais nous adoptons pour $\mathrm{bin}_u(n)$ la définition suivante :

Soit $u \in \{0, 1\}^+$, au mot u on associe un mot infini $\mathbf{u} = u_0 u_1 \ldots u_i \ldots$, $i \in \mathbb{N}$, défini comme suit : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \begin{cases} a & \text{si} \quad |\mathrm{bin}_u(n)|_n \quad \text{est paire} \\ \mathrm{b} & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\mathrm{bin}_u(u)$ est la représentation binaire de l'entier n avec la convention suivante : $\mathrm{bin}_u(n)$ admet un « 1 » pour facteur gauche (c'est-à-dire n'est précédé, à gauche, d'aucune occurrence de « 0 » « superflue ») si $n \in \mathbb{N} - \{0, n_u\}$ et $\mathrm{bin}_u(0) = 0$, $\mathrm{bin}_u(n_u) = u$ où n_u est l'entier dont u est l'écriture binaire (éventuellement précédée d'un certain nombre de « 0 »).

Si l'on reprend l'exemple du début, on a dans ce cas :

Exemple : Soit $u = 010$ et $n = 42$:

$$\mathrm{bin}_{010}(42) = 101010$$

et

$$|\mathrm{bin}_{010}(42)|_{010} = 2 \qquad (1\underline{01}010).$$

Cette généralisation pourrait être étudiée avec les mêmes techniques que précédemment et on a un analogue du théorème 15 :

THÉORÈME 18 : *Pour tout $u \in \{0, 1\}^+$, $|u| = n$ et pour tout $v \in \mathscr{A}^+$, v facteur de $\mathbf{u}$, les deux assertions suivantes sont vérifiées :*

(1) *Si $v = a^p$ (ou b^p), $p \in \mathbb{N}$, alors $p \leqq 2^n$.*

(2) *Si $|v|_a \neq 0$ et $|v|_b \neq 0$, alors v^3 n'est pas facteur de $\mathbf{u}$.*

e. Une troisième généralisation

Pour cette troisième généralisation possible de la suite de Thue-Morse, nous conservons la définition de $\mathrm{bin}_u(n)$ utilisée pour la seconde généralisation, mais nous adoptons une définition différente pour $|\mathrm{bin}_u(n)|_u$.

En effet, dans ce qui précède, on comptait les occurrences distinctes de u dans $\mathrm{bin}_u(n)$ même si elles se chevauchaient, alors qu'ici on va supprimer les occurrences de u au fur et à mesure qu'elles sont comptabilisées (de gauche à droite), ce qui ne permet de compter que celles qui n'ont aucun facteur commun.

Si nous reprenons l'exemple précédent, on a alors :

Exemple : Soient $u=010$ et $n=42$:

$$\text{bin}_{010}(42)=101010$$

et

$$|\text{bin}_{010}(42)|_{010}=1 \qquad (1\underline{010}10)$$

Avec cette définition, le théorème 15 n'est plus valable comme c'était le cas précédemment, mais on a tout de même une version affaiblie de ce résultat :

THÉORÈME 19 : *Pour tout* $u\in\{0, 1\}^+$, $|u|=n$ *et pour tout* $v\in\mathscr{A}^+$, v *facteur de* $\mathbf{u}$, *les deux assertions suivantes sont vérifiées :*

(1) *Si* $v=a^p$ *(ou* b^p*),* $p\in\mathbb{N}$, *alors* $p<3.2^{n-1}$.

(2) *Si* $|v|_a\neq 0$ *et* $|v|_b\neq 0$, *alors* v^3 *n'est pas facteur de* $\mathbf{u}$.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. ČERNÝ, *On a class of infinite words with bounded repetitions*, R.A.I.R.O. Informatique Théorique, vol. 19, (1985), p. 337-349.
2. G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS-FRANCE et G. RAUZY, *Suites algébriques, automates et substitutions*, Bull. Soc. Math. Fr., vol. 108, 1980, p. 401-419.
3. A. COBHAM, *Uniform tag sequences*, Math. Systems Theory, vol. 6, 1972, p. 164-192.
4. M. LOTHAIRE, *Combinatorics on words*, Addison-Wesley Reading, Massachusetts, 1983.
5. M. MORSE et G. HEDLUND, *Unending chess, symbolic dynamics and a problem in semi-groups*, Duke Math., J., vol. 11, 1944, p. 1-7.
6. J. J. PANSIOT, *The Morse sequence and iterated morphisms*, Inf. Process. Letters, vol. 12, 1981, p. 68-70.
7. P. SÉÉBOLD, *Morphismes itérés, mot de Morse et mot de Fibonacci*, C.R. Acad. Sc., t. 295, 1982, p. 439-441.
8. P. SÉÉBOLD, *Propriétés combinatoires des mots infinis engendrés par certains morphismes*, Thèse 3[e] cycle, Université Paris-VII, 1985.
9. A. THUE, *Über unendliche Zeichenreihen*, Norske Vid. Selk. Skr. I. Math. Nat. Kl. Christiania, vol. 7, 1906, p. 1-22.
10. A. THUE, *Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen*, Norske Vid. Selsk. Skr. I. Math. Nat. Kl. Christiania, vol. 1, 1912, p. 1-67.