RAIRO. INFORMATIQUE THÉORIQUE

GIUSEPPINA RINDONE

Sur les groupes syntaxiques d'un langage

RAIRO. Informatique théorique, tome 19, n° 1 (1985), p. 57-70

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1985__19_1_57_0>

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics
(vol. 19, n° 1, 1985, p. 57 à 70)

SUR LES GROUPES SYNTAXIQUES D'UN LANGAGE (*)

par Giuseppina RINDONE (1)

Communiqué par J.-E. PIN

Résumé. — *Nous donnons une condition nécessaire pour qu'un groupe de permutations transitif fini G soit un groupe maximal du monoïde syntaxique de X*, où X est une partie finie d'un code à groupe associé au groupe G. Nous montrons en outre que, sous ces hypothèses, si G n'est pas cyclique, on a l'inégalité :*

$$\text{Card } (X) \geqq d+1,$$

où d est le degré de G.

Abstract. — *We give a necessary condition for a finite transitive group G of permutations to be a maximal group of the syntactic monoid of X*, where X is a finite part of a group-code associated to G. Moreover, we show that, under such hypothesis, if G is not cyclic, we have:*

$$\text{Card } (X) \geqq d+1,$$

where d is the degree of G.

INTRODUCTION

Soit L une partie du monoïde libre A^*. On dit qu'un groupe G est un groupe syntaxique de L si G est, à un isomorphisme près, un groupe maximal du monoïde syntaxique $M(L)$ de L. D'après le théorème de M. P. Schützenberger [9], les parties de A^* dont tous les groupes syntaxiques sont triviaux sont des langages sans étoile.

L'étude des groupes dans $M(L)$, lorsque L est de la forme X^* avec X un code fini a fait l'objet de travaux très poussés (Perrin, Perrot, Schützenberger). Dans cette étude, le groupe de structure de l'idéal minimal de $M(X^*)$, appelé le groupe de Suschkewitsch du code, joue un rôle prépondérant car beaucoup

(*) Reçu septembre 1983, révisé juillet 1984.
(1) Faculté des Sciences, Université de Rouen, B.P. n° 67, 76130 Mont-Saint-Aignan, France et Laboratoire d'Informatique Théorique et de Programmation, 2, place Jussieu, 75005 Paris, France.

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics
0399-0540/85/01 57 14/$ 3,00/

de propriétés du code se lisent directement sur le groupe de Suschkewitsch du code; mais J. F. Perrot a démontré que certains groupes de permutations transitifs ne peuvent apparaître comme groupe de Suschkewitsch d'un code préfixe X lorsque X est supposé fini [6]. C'est pourquoi on est amené à généraliser le problème et à se demander s'il peut apparaître comme groupe de structure d'une autre $\mathscr{D}$-classe régulière de $M(X^*)$, qui ne soit pas nécessairement la $\mathscr{D}$-classe de rang minimal, mais en conservant la propriété de finitude pour X.

D. Perrin donne dans [7] une condition suffisante pour que ceci se réalise et il en déduit que tout groupe de permutations transitif fini est le groupe de structure d'une $\mathscr{D}$-classe régulière de $M(X^*)$. Cette dernière référence étant peu accessible, nous avons préféré, pour la commodité du lecteur, redonner entièrement les preuves.

Nous montrons ici que la condition évoquée dans [7] est aussi nécessaire et nous montrons que, pour la construction utilisée, le groupe en question est toujours le groupe de structure de la $\mathscr{D}$-classe régulière de rang maximal.

Suivant un théorème de M. P. Schützenberger [10], si X est une partie finie de A^* et si d est le degré d'un groupe syntaxique G de X^*, avec G non cyclique, alors on a : Card $(X) \geqq d$. Nous montrons que, lorsque X est une partie d'un code à groupe, cette borne peut être améliorée d'une unité.

RAPPELS ET NOTATIONS

Soit A un alphabet fini et A^* le monoïde libre sur A. On note 1 l'élément neutre de A^* (le mot vide), et $A^+ = A^* \setminus \{1\}$.

Soient $u, v \in A^*$ deux mots. On dit que u est *facteur* (respectivement *facteur gauche*, *facteur droit*) de v si $v \in A^* u A^*$ (resp. $v \in u A^*$, $v \in A^* u$); u est *facteur interne* (resp. *facteur gauche propre*, *facteur droit propre*) si $v \in A^+ u A^+$ (resp. $v \in u A^+$, $v \in A^+ u$). Pour toute partie L de A^*, on note $F(L)$ [resp. $FI(L)$] l'ensemble des facteurs (resp. facteurs internes) des mots de L et on pose $\overline{F}(L) = A^* \setminus F(L)$ et $\overline{FI}(L) = A^* \setminus FI(L)$.

Une partie X de A^* est un *code* ssi le sous-monoïde X^* de A^*, engendré par X, est libre de base X. On vérifie que si X est un code rationnel alors $F(X) \neq A^*$ et si X est un code maximal alors $F(X^*) = A^*$.

Une partie X de A^* telle que $XA^* \cap X = \varnothing$ est dite *préfixe*. On vérifie que X est préfixe ssi X^* est unitaire à gauche : pour tout $u, v \in A^*$, u et $uv \in X^*$ entraîne $v \in X^*$. On en déduit que toute partie préfixe est un code. La condition de maximalité pour les codes préfixes se traduit par la propriété de complétude à droite : pour tout $u \in A^*$, $uA^* \cap X^* \neq \varnothing$.

On définit de façon symétrique les codes *suffixes* et on dit que X est un code *bipréfixe* s'il est à la fois préfixe et suffixe.

Étant donné une partie L de A^*, le *monoïde syntaxique* de L, noté $M(L)$, est, par définition, le quotient de A^* par la congruence la plus grossière telle que L soit union de classes. Cette congruence, appelée *congruence syntaxique* de L, a pour expression : $u \equiv v \pmod{L}$ si et seulement si, quel que soit $(f, g) \in A^* \times A^*$ on a : $fug \in L$ si et seulement si $fvg \in L$.

Le morphisme canonique φ de A^* dans $M(L)$ est appelé le *morphisme syntaxique* de L. On sait que le monoïde syntaxique de L est isomorphe au monoïde des transitions de l'automate minimal de L, noté $\mathscr{A}(L)$. Dans la suite, par abus de langage, nous les identifions. D'après le théorème de Kleene, $M(L)$ est fini ssi L est une partie rationnelle de A^*.

Rappelons que si L est de la forme $L = X^*$ avec X un code préfixe, l'automate minimal de L a un seul état terminal confondu avec l'état initial; nous noterons 1 cet état. Nous avons alors : $L = \{ w \in A^* : 1 \varphi(w) = 1 \}$.

Nous utiliserons la terminologie suivante pour les automates de la forme $\mathscr{A} = (Q, 1, 1)$:

pour tout $p, q \in Q$, on dit que le chemin $p \xrightarrow{w} q$ est simple ($w \in A^+$) si, pour tout $r \in Q$ tel que $p \xrightarrow{u} r \xrightarrow{v} q$ avec $u, v \in A^+$ et $w = uv$, on a $r \neq 1$.

Un chemin qui n'est pas simple est produit de chemins simples.

Nous renvoyons le lecteur à [1 ou 4] pour toutes les notions non définies ici et en particulier, pour ce qui concerne les relations de Green $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{D}$, que nous aurons à utiliser, définies dans un monoïde.

CODES A GROUPE

Soient G un groupe de permutations transitif, H le sous-groupe de G fixant un point donné de l'ensemble sur lequel opère G et $\psi : A^* \to G$ un morphisme surjectif. Le sous-monoïde $\psi^{-1}(H)$ est unitaire à droite et à gauche car il en est ainsi de H dans G. Il est donc engendré par un code bipréfixe que nous nommons *code à groupe* et que nous notons $Z(G, H)_\psi$, ou tout simplement Z. On dit que Z est de *degré d* si G est de degré d. On vérifie facilement qu'un code à groupe est maximal en tant que code, il est donc maximal en tant que code bipréfixe.

Exemple : Soit G le groupe engendré par la permutation $\alpha = (0, 1, 2, \ldots, n-1)$ et soit ψ le morphisme de A^* dans G défini par $\psi(a) = \alpha$, pour

tout $a \in A$. La base Z du noyau de ψ, qui est le code uniforme de longueur n : $Z = A^n$, est un code à groupe de degré n.

THÉORÈME 1 : *Soit $Z = Z\ (G, H)_\psi$ un code à groupe. Le monoïde syntaxique de Z^* est isomorphe à G. En particulier Z est rationnel si et seulement si G est fini.*

Preuve : Notons Q l'ensemble des classes latérales à droite de H dans G et soit $\mathcal{A} = (Q, 1, 1)$ l'automate sur l'alphabet A, où $1 = H$, avec les transitions $Hx_i \xrightarrow{a} Hx_j$ $(a \in A)$ si et seulement si $x_i\ \psi\ (a) \in Hx_j$. On démontre facilement que l'automate ainsi défini est isomorphe à l'automate minimal de Z^*. □

Le résultat suivant est bien connu [8] :

THÉORÈME 2 : *Soit Z un code à groupe, $Z = Z\ (G, H)_\psi$. Z est fini si et seulement si $Z = A^n$. Et dans ce cas G est cyclique d'ordre n.*

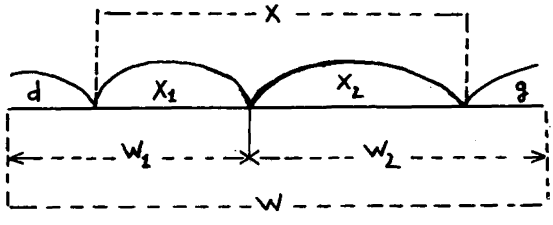
Donnons quelques définitions :

On nomme *point d'un mot* $w \in A^*$ tout couple de mots $(w_1, w_2) \in A^* \times A^*$ tel que $w = w_1 w_2$. Un mot w contient donc $|w| + 1$ points, où $|w|$ dénote la longueur de w.

Soit $X \subset A^*$. On appelle *interprétation* de w dans X^*, ou X-interprétation de w, tout triplet $(d, x, g) \in D \times X^* \times G$ tel que $w = dxg$, où D (resp. G) est l'ensemble des facteurs droits (resp. gauches) propres des mots de X.

On note $I_X(w)$ l'ensemble des X-interprétations de w.

On dit qu'une X-interprétation (d, x, g) de $w \in A^*$ *passe par le point* (w_1, w_2) de w s'il existe $x_1, x_2 \in X^*$ tels que $x = x_1 x_2$, $w_1 = dx_1$ et $w_2 = x_2 g$.



Une X-interprétation de w passant par le point (w_1, w_2).

Un mot $w \in A^*$ est *X-plein* si, pour tout point de w, il existe une X-interprétation de w passant par ce point.

On vérifie sans difficulté :

PROPOSITION 1 : *Soit X un code bipréfixe et soit $w \in A^*$. Pour tout point de w il existe au plus une X-interprétation de w passant par ce point.*

PROPOSITION 2 : *Soit X un code bipréfixe rationnel. X est maximal ssi tout mot de A^* est X-plein.*

Soit L une partie de A^* et soit Q l'ensemble des états de l'automate minimal de L. Pour tout $w \in A^*$, nous noterons Im $\varphi(w)$ l'ensemble des images non nulles de $\varphi(w)$; c'est-à-dire :

$$\text{Im}\,\varphi(w) = \{ q \in Q,\ q \neq 0 \text{ tels qu'il existe } p \in Q : p\,\varphi(w) = q \}.$$

On pose rang $\varphi(w) = \text{Card}(\text{Im}\ \varphi(w))$.

Dans le cas d'un code bipréfixe, la notion d'interprétation d'un mot $w \in A^*$ et la notion de rang de l'image syntaxique de w sont reliées par la proposition suivante :

PROPOSITION 3 : *Soit X un code bipréfixe et soit φ le morphisme syntaxique de X^*. Pour tout $w \in A^*$ on a* $\text{Card}(I_X(w)) \leqq \text{rang}\ \varphi(w)$. *Si $w \notin F(X)$ alors* $\text{Card}(I_X(w)) = \text{rang}\ \varphi(w)$.

Preuve : Notons S l'ensemble des facteurs droits de w qui sont facteurs gauches d'un mot de X. D'après la proposition 1, l'application qui associe à toute X-interprétation (d, x, g) de w le mot g est une injection.

Soit $\mathscr{A}(X^*) = (Q, 1, 1)$ l'automate minimal de X^*. On définit α : $I_X(w) \to \text{Im}\ \varphi(w)$ en posant $\alpha(d, x, g) = 1\ \varphi(g)$. On a $1\ \varphi(g) \in \text{Im}\ \varphi(w)$ puisque $g \in S$ et $(d, x, g) \in I_X(w)$.

La suffixité de X implique que α est injective.

Il reste à prouver que si $w \notin F(X)$ alors α est aussi surjective. En effet, pour tout $q \in \text{Im}\ \varphi(w)$, il existe $p \in Q$ $(p \neq 0)$ tel que $p\ \varphi(w) = q$. De façon équivalente, il existe un chemin dans $\mathscr{A}(X^*)$ allant de p à q d'étiquette w. Ce chemin n'est pas simple puisque $w \notin F(X)$. Donc il existe $f, g \in A^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X^*$ $(n \geqq 0)$ tel que $w = f x_1 x_2 \ldots x_n g$ et les chemins :

$$p \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{x_1} 1 \ldots \xrightarrow{x_n} 1 \xrightarrow{g} q$$

sont simples. Par conséquent $(f, x_1 x_2 \ldots x_n, g)$ est une X-interprétation de w dont l'image par α est q. □

COROLLAIRE 1 : *Soit X un code bipréfixe rationnel et soient w et $w' \in A^* \setminus F(X)$.*

1° *Si $\varphi(w)\ \mathscr{D}\ \varphi(w')$ alors* $\text{Card}(I_X(w)) = \text{Card}(I_X(w'))$.

2° *Si G est un groupe dans $M(X^*)$ de degré d et $\varphi(w) \in G$ alors* $\text{Card}(I_X(w)) = d$.

La preuve est conséquence immédiate de la proposition précédente car $\varphi(w) \mathrel{\mathscr{D}} \varphi(w')$ implique rang $\varphi(w)=$rang $\varphi(w')$ et si $\varphi(w) \in G$ et $d=$degré (G) alors rang $\varphi(w)=d$.

Dans le cas où X n'est pas bipréfixe, on retrouve des résultats similaires en introduisant les notions d'interprétations disjointes et parallèles. Le lecteur intéressé pourra consulter [5].

LEMME 1 : *Soit X un code bipréfixe rationnel maximal. Pour tout u, f, $g \in A^*$, on a :*

$$\text{Card}(I_X(u)) \leqq \text{Card}(I_X(fug)).$$

En particulier, $\text{Card}(I_X(u)) < \text{Card}(I_X(fug))$ *si* $f, g \in A^+$ *et* $fug \in X$.

Preuve : D'après la proposition 2, le mot fug est X-plein. Par conséquent, chaque X-interprétation de u peut se prolonger en une X-interprétation de fug, ce qui prouve la première inégalité.

La deuxième inégalité est évidente car si u, f, g vérifient les hypothèses alors $(1, fug, 1) \in I_X(fug)$ et cette X-interprétation ne détermine aucune X-interprétation de u puisqu'elle ne passe pas aucun point de u.

PROPOSITION 4 : *Soit $Z=Z(G, H)_\psi$ un code à groupe de degré d. Pour tout $w \in A^*$,* $\text{Card}(I_Z(w)) \leqq d$.

De plus, $\text{Card}(I_Z(w))=d$ *ssi* $w \notin FI(Z)$.

Preuve : Soit $f \in A^* \setminus F(Z)$. Pour tout $w \in A^*$, on a :

$$\text{Card}(I_Z(w)) \leqq \text{Card}(I_Z(fwf)) = d,$$

d'après le lemme 1 et la proposition 3.

Supposons $\text{Card}(I_Z(w))=d$. Si $w \in FI(Z)$, il existe $z \in Z$ et $f, g \in A^+$ tel que $z=fwg$. D'après le lemme 1 $\text{Card}(I_Z(w)) < \text{Card}(I_Z(z))$ et d'après ce qui précède $\text{Card}(I_Z(z)) \leqq d$. Absurde.

La réciproque se déduit immédiatement de la condition 2 du corrollaire 1 puisque si $w \notin F(Z)$ alors $w \notin FI(Z)$. □

Il ne sera plus question dans la suite que de groupes de permutations transitifs finis, et pour abréger nous dirons simplement groupes.

GROUPES SYNTAXIQUES

Soit $L \subset A^*$. On dit qu'un groupe G est un *groupe syntaxique* de L si G est, à un isomorphisme près, un groupe maximal du monoïde syntaxique $M(L)$ de L.

De la définition de code à groupe et du théorème 1, il s'ensuit que, pour tout groupe G, il existe un alphabet fini A et un sous-monoïde Z^* de A^* tel

que G est un groupe syntaxique de Z^* mais, d'après le théorème 2, à moins que G ne soit cyclique, Z est toujours infini. D'où le problème suivant : *un groupe quelconque peut-il être un groupe syntaxique d'un sous-monoïde finiment engendré ?* Et plus précisément, si Z est un code à groupe associé au groupe G, existe-t-il des parties *finies* X de Z telles que G est un groupe syntaxique de X^* ?

La proposition qui suit affirme que, si une telle partie X existe, le groupe G appartient alors à la $\mathscr{D}$-classe régulière (évidemment non triviale) de $M(X^*)$ de rang maximal.

Nous noterons φ le morphisme syntaxique de X^*.

PROPOSITION 5 : *Soient $Z = Z(G, H)_\psi$ un code à groupe de degré d et X une partie finie de Z. Si G' est un groupe dans $M(X^*)$ de degré d', alors $d' \leqq d$.*

Preuve : Soit $w \in A^*$ un mot tel que $\varphi(w) \in G'$. Comme X est fini, on peut toujours supposer, quitte à considérer une puissance convenable de w, que $w \notin F(X)$.

D'après le corollaire 1 et la proposition 4, et du fait que chaque X-interprétation de w est une Z-interprétation, on déduit :

$$d' = \mathrm{Card}(I_X(w)) \leqq \mathrm{Card}(I_Z(w)) \leqq d. \quad \square$$

LEMME 2 : *Soient $Z = Z(G, H)_\psi$ un code à groupe et $X \subset Z$ une partie rationnelle. Si w et w' sont deux mots X-pleins de $A^* \setminus F(Z)$ alors $\varphi(w) = \varphi(w')$ implique $\psi(w) = \psi(w')$. Et si, en outre, $\varphi(w) \mathscr{H} \varphi(w')$ alors $\psi(w) = \psi(w')$ implique $\varphi(w) = \varphi(w')$.*

Preuve : Soit $(u, v) \in A^* \times A^*$ tel que $uwv \in Z^*$. Comme $w \notin F(Z)$, il existe une Z-interprétation (f, z, g) de w telle que $uf, z, gv \in Z^*$.

Posons $\mathscr{A}(Z^*) = (Q, 1, 1)$ et soient $p, q \in Q$ les états tels que :

$$\left.\begin{array}{ccc} 1\psi(u) = p; & & p\psi(f) = 1; \\ 1\psi(z) = 1; & 1\psi(g) = q; & q\psi(v) = 1. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

L'hypothèse w X-plein implique $(f, z, g) \in I_X(w)$. Par conséquent, il existe $(u', v') \in A^* \times A^*$ tel que $u'f, z, gv' \in X^*$; $u'f$ et gv' sont aussi dans Z^* puisque $X^* \subset Z^*$.

On en déduit, en utilisant (1) :

$$1\psi(u') = p \qquad \text{et} \qquad q\psi(v') = 1. \qquad (2)$$

Par hypothèse $\varphi(w)=\varphi(w')$ et $w' \notin F(Z)$ [*a fortiori* $w' \notin F(X)$]. Il existe alors $(f', x', g') \in I_X(w')$ tel que $u' f', x', g' v'$ sont dans X^*, ce qui implique, en même temps que les relations (2) :

$$p\psi(f')=1 \qquad \text{et} \qquad 1\psi(g')=q. \tag{3}$$

Des relations (1)+(3) on déduit $uw'v \in Z^*$, ce qui prouve $\psi(w)=\psi(w')$.

Supposons maintenant que w et w' sont X-pleins, $\psi(w)=\psi(w')$ et $\varphi(w)$ $\mathscr{H}$ $\varphi(w')$.

Soit $(u, v) \in A^* \times A^*$ tel que $uwv \in X^*$ et soit $(f, x, g) \in I_X(w)$ tel que $uf, x, gv \in X^*$. Comme $\psi(w)=\psi(w')$ et $w' \in F(Z)$, il existe $(f', z', g') \in I_Z(w')$ tel que $uf', z', g' v \in Z^*$. Le mot z' est dans X^* puisque $I_X(w')=I_Z(w')$. Il reste à prouver que uf' et $g'v$ sont dans X^*. En effet, posons $\mathscr{A}(X^*)=(S, 1, 1)$ et soient $r, s \in S$ tels que :

$$1 \xrightarrow{u} r \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{x} 1 \xrightarrow{g} s \xrightarrow{v} 1. \tag{1}$$

Comme $\varphi(w)\ \mathscr{R}\ \varphi(w')$ et $s \neq 0$, il existe $s' \in S$ $(s' \neq 0)$ tel que $r\,\varphi(w')=s'$. Le chemin $r \xrightarrow{w'} s'$ n'est pas simple puisque $w' \notin F(X)$; et comme $uf' \in Z^*$ et Z est préfixe, ce chemin se factorise nécessairement en :

$$r \xrightarrow{f'} 1 \xrightarrow{z'} 1 \xrightarrow{g'} s'.$$

On en déduit que $uf' \in X^*$.

De la relation $\varphi(w)\ \mathscr{L}\ \varphi(w')$ et de la suffixité de Z, on déduit $g'v \in X^*$. □

LEMME 3 : *Soient $Z=Z(G, H)_\psi$ un code à groupe et X une partie rationnelle de Z. Soit encore Y une partie de A^* vérifiant les conditions :*

1° *pour tout $y \in Y$, l'ensemble des mots :*

$$\{ z \in Z \text{ t.q. } z \in A^* y A^* \}$$

est fini.

2° $\psi(Y^*)=G$.

3° $F(Y^*) \cap Z \subseteq X$.

Alors $\varphi(Y^+ \cap \bar{F}(Z))$ est contenu dans une $\mathscr{D}$-classe de $M(X^*)$.

Preuve : Nous allons démontrer d'abord que, pour tout $y \in Y^+ \cap \bar{F}(Z)$ et pour tout $w \in Y^*$, on a :

$$\psi(y)=\psi(ywy) \quad \text{implique} \quad \varphi(y)=\varphi(ywy).$$

En effet, soit $(u, v) \in A^* \times A^*$ tel que $uyv \in X^*$. Comme $y \notin F(X)$ la factorisation en mots de X du mot uyv doit couper le mot y. Soient $y_1, y_2 \in A^*$ tels que $y=y_1 y_2$ et $uy_1 \in X^*$, $y_2 v \in X^*$.

On a alors $uyv \in Z^*$ et par conséquent, $uywyv \in Z^*$. La bipréfixité de Z implique $y_2 w y_1 \in Z^*$. Et comme $y_2 w y_1 \in F(Y^*)$ on déduit $y_2 w y_1 \in X^*$. Ainsi

$uywyv \in X^*$. De la même façon, on démontre que $uywyv \in X^*$ implique $uyv \in X^*$.

Soient maintenant $f, g \in Y^+ \cap \bar{F}(Z)$. Comme $\psi(Y^*) = G$, il existe $\bar{f}, \bar{g} \in Y^*$ tels que $\psi(\bar{f}) = [\psi(f)]^{-1}$ et $\psi(\bar{g}) = [\psi(g)]^{-1}$. On a alors :

$$\psi(f) = \psi(f\bar{g}g\bar{f}f) \qquad \text{et} \qquad \psi(g) = \psi(g\bar{f}f\bar{g}g).$$

On en déduit, d'après ce qui a été démontré ci-dessus, que $\varphi(f) \mathscr{D} \varphi(g)$.

C.Q.F.D. □

La partie réciproque du théorème suivant est due à D. Perrin [7].

THÉORÈME 3 : *Soient $Z = Z(G, H)_\psi$ un code à groupe de degré d et X une partie finie de Z. Alors $M(X^*)$ contient un groupe maximal équivalent à G ssi il existe un ensemble fini $Y \subset A^*$ vérifiant les conditions :*

1° $\forall y \in Y$, $\{z \in Z \text{ t. q. } z \in A^* y A^*\}$ *est fini.*

2° $\psi(Y^*) = G$.

3° $F(Y^*) \cap Z \subseteq X$.

Preuve : Supposons que $M(X^*)$ contienne un groupe maximal G' équivalent à G. Soit Δ un ensemble de générateurs de G'. Il existe alors, pour tout $\partial \in \Delta$, un mot $y \in A^*$ tel que $\varphi(y) = \partial$.

Nous pouvons supposer, quitte à considérer une puissance convenable de y, que $y \notin F(X)$. Notons Y l'ensemble des mots, en bijection avec Δ, ainsi obtenus. Alors $\varphi(Y^+) = G'$. Du corollaire 1 et de la proposition 4, on déduit, pour tout $y \in Y^+$, les inégalités :

$$d = \text{Card}(I_X(y)) \leqq \text{Card}(I_Z(y)) \leqq d.$$

D'où $\text{Card}(I_Z(y)) = d$. D'après la proposition 4, $y \notin FI(Z)$, par conséquent $y^3 \notin F(Z)$. Ceci prouve qu'on peut choisir les mots $y \in Y$ tels que $y \notin F(Z)$.

La condition 1 est donc trivialement vérifiée. D'après la proposition 2, tout mot de Y^+ est un mot Z-plein; il est aussi X-plein puisque $\text{Card}(I_Z(y)) = \text{Card}(I_X(y))$. Ainsi $F(Y^*) \cap Z \subseteq X$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un ensemble fini $Y \subset A^*$, vérifiant les conditions du théorème. On choisit $y \in Y^+$ qui n'est facteur d'aucun mot de Z et on pose $S = \varphi(y Y^* y)$. S est évidemment un sous-semi-groupe de $M(X^*)$.

D'après le lemme 3, S est contenu dans la $\mathscr{D}$-classe contenant l'élément $\varphi(y)$.

On en déduit que S est contenu dans la $\mathscr{H}$-classe contenant $\varphi(y)$ puisque, pour tout $s \in S$, $s = \varphi(y)\,\varphi(y'y) = \varphi(yy')\,\varphi(y)$ pour un certain $y' \in Y^*$.

On définit $\mu : S \to G$ par $\mu(\varphi(yy'y)) = \psi(yy'y)$.

D'après la condition 2, μ est un morphisme surjectif. La condition 3 entraîne que tout mot de S est X-plein et le lemme 2 permet de conclure que μ est aussi injectif. Ainsi S est un groupe dans $M(X^*)$ isomorphe à G. Il est de degré d et l'image de $\varphi(X^*)$ par μ est H.

Il reste encore à prouver qu'il est un groupe maximal. En effet, soit n un entier tel que $\varphi(y^n)$ soit l'identité de S. Alors, pour tout $f \in A^*$, si $\varphi(f) \mathscr{H} \varphi(y)$, on a $\varphi(f) = \varphi(y^n f y^n)$. D'après le corollaire1, les mots $y^n f y^n$ et y ont le même nombre de X-interprétations. On en déduit alors que $y^n f y^n$ est un mot X-plein.

Soit g un mot de Y^* tel que $\psi(g) = \psi(f)$.

Du lemme 2, il s'ensuit que $\varphi(y^n g y^n) = \varphi(y^n f y^n)$. Par conséquent $\varphi(f) \in S$ et donc S est une $\mathscr{H}$-classe entière.

C.Q.F.D. □

Le résultat suivant est conséquence du théorème 3 :

PROPOSITION 6 : *Tout groupe de permutations transitif fini est un groupe syntaxique d'un sous-monoïde finiment engendré.*

Preuve : Soient G un groupe de permutations transitif fini et H le sous-groupe de G, fixant un point donné de l'ensemble sur lequel opère G. Soit encore A un alphabet en bijection avec une partie génératrice de G. On étend cette bijection à un morphisme ψ de A^* sur G et soit $Z = Z(G, H)_\psi$ le code à groupe associé.

On choisit, pour chaque lettre $a \in A$, un mot $y \in A^*$ tel que :

1° $\psi(y) = \psi(a)$.

2° l'ensemble $\{ z \in Z / z \in A^* y A^* \}$ est fini.

On note Y l'ensemble des mots, en bijection avec A, ainsi obtenus.

On définit X' comme la partie de Z formée des mots qui sont facteurs d'au moins un mot de Y^*, c'est-à-dire :

$$X' = \{ z \in Z / \exists y \in Y^* \text{ tel que } y \in A^* z A^* \} = F(Y^*) \cap Z.$$

Évidemment X' est non vide puisque tout mot de A^* est facteur d'un mot de Z^*. De plus, X' est fini; en effet :

$$X' = (A^* Y A^* \cap X') \cup (X' \setminus A^* Y A^*).$$

Or l'ensemble $(A^* Y A^* \cap X')$ est fini car Y est fini et chaque $y \in Y$ n'est facteur que d'un nombre fini (disons k le maximum) de mots de Z donc :

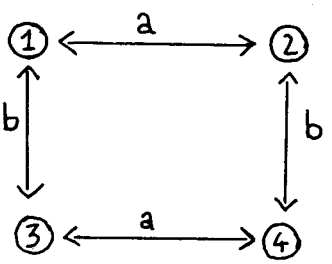
$$\text{Card}\,(A^* Y A^* \cap X') \leqq k.\ \text{Card}\,(Y),$$

et, d'autre part,

$$\text{Card}(X' \setminus A^* Y A^*) \leqq \sum_{y \in Y} |y|.$$

Pour toute partie finie X de Z telle que $X' \subseteq X$, le monoïde syntaxique de X^* contient un groupe maximal équivalent à G puisque toutes les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites. □

Exemple : Considérons le groupe de permutations G sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ engendré par les éléments $\alpha = (12)\ (34)$ et $\beta = (13)\ (24)$ et soit $\psi : \{a, b\}^* \to G$ le morphisme défini par $\psi(a) = \alpha$ et $\psi(b) = \beta$. Soit encore $Z = Z(G, H)_\psi$ le code à groupe associé, où H est l'identité de G. L'automate de Z^* peut être ainsi représenté :



Posons $y_a = ababa$ et $y_b = abababa$.

On vérifie facilement que l'ensemble $Y = \{y_a, y_b\}$ satisfait les conditions de la preuve de la proposition précédente. Le calcul des Z-interprétations des mots de Y^* donne l'ensemble :

$$X = \{abab, aa, baba, abaaba, baab\}.$$

Un choix différent de Y, $Y = \{aabab, bbaba\}$, donne un ensemble X de cardinalité 12. Dans les deux cas, G est, à un isomorphisme près, le groupe de structure de la $\mathcal{D}$-classe régulière de $M(X^*)$ de rang maximal. Nous verrons au paragraphe suivant que Card (X) est borné en fonction du degré de G et, dans le cas présent, Card $(X) = 5$ est la borne optimale.

Lorsque le groupe G contient un cycle de longueur égale à son degré, la construction donnée dans la proposition 6 fournit un ensemble ayant « le bon nombre d'éléments » :

PROPOSITION 7 [7]. — *Soit G un groupe de permutations transitif sur l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ engendré par la permutation $\alpha=(0, 1, \ldots, n-1)$ et par une partie T de G.*

Soit $A=(a_t)_{t\in T+\alpha}$ un alphabet indexé par $T+\alpha$ et

$$X=a_\alpha^n+\{a_\alpha^i a_t a_\alpha^{n-it}/i\in\{1, \ldots, n\}, t\in T\},$$

où les entiers i et n-it sont pris mod n.

Alors le monoïde syntaxique de X^* contient un groupe maximal équivalent à G.

Preuve : Soit $\psi : A^* \to G$ le morphisme défini par :

$$\psi(a_t)=t, \qquad \forall t\in T+\alpha.$$

On choisit, comme dans la preuve de la proposition 6 :

$$y_{a_\alpha}=a_\alpha^{n+1}$$

et pour tout $t\in T$:

$$y_{a_t}=a_\alpha^n a_t a_\alpha^n.$$

Le résultat est alors établi puisque l'ensemble X de l'énoncé est l'ensemble $F(Y^*)\cap Z$ où $Z=Z(G, H)_\psi$ (H étant le sous-groupe de G fixant le point 0). □

Exemple : Soit $G=\mathscr{S}_3$ le groupe symétrique sur $\{0, 1, 2\}$ engendré par $\alpha=(012)$ et $\beta=(0, 1)$. La construction précédente donne l'ensemble :

$$X=\{a^3, ba^2, ab, a^2ba\}.$$

RELATION ENTRE LE DEGRÉ D'UN GROUPE SYNTAXIQUE DE X^* et Card (X)

Un premier résultat à l'égard de la relation entre le degré des groupes syntaxiques de X^* (avec X une partie finie quelconque de A^*) et Card (X) est dû à M. P. Schützenberger. Il démontre dans [10] que si G est un groupe syntaxique de X^* de degré d et si G n'est pas cyclique alors $d\leqq 2\,\text{Card}\,(X)$.

Il conjecture que, sous les mêmes hypothèses, on ait :

$$d\leqq \text{Card}\,(X)-1.$$

Un résultat combinatoire sur les mots a permis de ramener cette borne à : $d\leqq\text{Card}\,(X)$ (*cf.* [2, 3]).

Nous allons démontrer que, si X est une partie d'un code à groupe, nous avons le résultat cherché.

Nous avons vu que, pour tout $w \in \varphi^{-1}(G) \cap \bar{F}(X)$, $\mathrm{Card}(I_X(w)) = d$. Il suffit alors de montrer que si $d = \mathrm{Card}(X)$, alors G est cyclique.

Soit $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ un mot de A^*, $(a_i \in A)$. Le plus petit entier p tel que $a_i = a_{i+p}$ est appelé *la période de w*; on le note $p(w)$.

Soit (w_1, w_2) un point de w. Le plus petit entier r tel qu'il existe un mot $u \in A^*$ de longueur r vérifiant les deux conditions ci-dessous est appelé *la répétition* de w au point (w_1, w_2) :

$$1^\circ \quad A^* u \cap A^* w_1 \neq \varnothing \qquad \text{et} \qquad 2^\circ \quad u A^* \cap w_2 A^* \neq \varnothing.$$

Un point (w_1, w_2) de w est un *point critique* de w si la répétition de w au point (w_1, w_2) est égale à la période de w.

Soit X une partie quelconque de A^*. Deux X-interprétations (q, x, p) et (q', x', p') d'un mot $w \in A^* \setminus F(X)$ sont *adjacentes* si elles passent toutes les deux par un même point de w; c'est-à-dire s'il existe $x_1, x_2, x'_1, x'_2 \in X^*$ tels que $q x_1 = q' x'_1$ et $x_2 p = x'_2 p'$ avec $x = x_1 x_2$ et $x' = x'_1 x'_2$.

Deux X-interprétations non adjacentes sont dites *disjointes*.

Nous remarquons que si X est un code bipréfixe, deux X-interprétations distinctes d'un mot w sont toujours disjointes.

PROPOSITION 8 [5] : *Soient X une partie quelconque de A^*; $k = \mathrm{Card}(X)$, $w \in A^* \setminus F(X)$ un mot suffisamment long. Si w admet k X-interprétations disjointes deux à deux et l'une d'entre elles passe par un point critique de w, alors il existe $x \in X$ tel que $p(w) \leqq |x|$.*

Preuve : Soit (w_1, w_2) un point critique de w et $(q, d_1 d_2, p)$ l'interprétation qui passe par ce point. Supposons d'abord que $d_1 \neq 1$ et $d_2 \neq 1$. Soient x_1, $x_2 \in X$ tel que $d_1 \in X^* x_1$ et $d_2 \in x_2 X^*$.

Si $x_1 = x_2$, la répétition de w au point (w_1, w_2) est inférieure ou égale à $|x_1|$. Si $x_1 \neq x_2$, puisque w admet k X-interprétations disjointes deux à deux, il existe $x \in X$ qui recouvre deux fois le point (w_1, w_2). x est alors de la forme $x = h^n l$ $(h, l \in A^*, h \in l A^*$ et $n \geqq 0)$. Le point (w_1, w_2) de w détermine alors un point (h_1, h_2) de h et la répétition de w au point (w_1, w_2) résulte inférieure ou égale à $|h| \leqq |x|$.

Supposons maintenant $d_1 = 1$ $(d_2 = 1)$; et soient $p', q' \in A^*$ tels que $p' q \in X$ $(pq' \in X)$. En posant $p' q = x_1$ $(pq' = x_2)$, nous sommes ramenés au cas précédent. □

Nous sommes en mesure de démontrer le résultat énoncé plus haut :

PROPOSITION 9 : *Soient* $Z = Z\ (G, H)_\psi$ *un code à groupe de degré* d *et* X *une partie finie de* Z *telle que* G *est un groupe syntaxique de* X^*. *Si* G *n'est pas cyclique alors* Card $(X) \geqq d+1$.

Preuve : Si G est un groupe syntaxique de X^*, il existe, d'après le théorème 3, un ensemble $Y \subset A^*$ tel que $F\ Y^*) \cap Z \subseteq X$ ce qui implique que tout mot de Y^+ est X-plein. En outre, d'après la preuve de ce théorème, on peut choisir Y tel que, pour tout $y \in Y^+$, $y \notin F\ (X)$ et $\varphi\ (Y^+) = G$.

Supposons maintenant $d = \text{Card}\ (X)$. De la proposition précédente on déduit que l'ensemble des périodes des mots de Y^+ est borné; il existe alors un mot $h \in A^*$ tel que $Y^+ \subseteq h^*$. Soit i la plus petite puissance de h tel que $\varphi\ (h^i) \in G$. Alors $\varphi\ (h^i)$ engendre G et G est cyclique contre l'hypothèse. □

BIBLIOGRAPHIE

1. J. BERSTEL et D. PERRIN, *The Theory of Codes*, Academic Press (à paraître), *cf.* rapport L.I.T.P. n° 82-33, 84-5.
2. Y. CÉSARI et M. VINCENT, *Une caractérisation des mots périodiques*, C.R. Acad. Sc., t. 286, série A, 1978, p. 1175-1177.
3. J. P. DUVAL, *Périodes et répétitions des mots du monoïde libre*, Theoret. Comput. Sc., vol. 9, 1979, p. 17-26.
4. G. LALLEMENT, *Semigroups and Combinatorial Applications*, 1979, Wiley, New York.
5. E. LE REST et M. LE REST, *Sur les relations entre un nombre fini de mots*, 1979, Thèse 3e cycle, Rouen.
6. J. F. PERROT, *Groupes de permutations associés aux codes préfixes fini* in *Permutations*, Actes du Colloque, 1972, Gauthier-Villars, Paris.
7. D. PERRIN, *Sur les groupes dans les monoïdes finis*, Actes du Colloque « Non Commutatives Methods in Algebraic and Geometric Combinatorics », A. DE LUCA, éd., Quaderni de la Ricerca Scientifica, vol. 109, 1981, p. 27-36.
8. M. P. SCHÜTZENBERGER, *Une théorie algébrique du codage*, C.R. Acad. Sc., t. 242, 1956, p. 862-864.
9. M. P. SCHÜTZENBERGER, *On Finite Monoids Having Only Trivial Subgroups*, Inform. and Control, vol. 8, 1965, p. 190-194.
10. M. P. SCHÜTZENBERGER, *A Property of Finitely Generated Submonoids of Free Monoids*, in *Algebraic Theory of Semigroups*, G. POLLACK, éd., North-Holland, 1979, p. 545-576.