RAIRO. INFORMATIQUE THÉORIQUE

SERGE DULUCQ

Séries algébriques solutions d'équations linéaires avec opérateurs

RAIRO. Informatique théorique, tome 16, n° 2 (1982), p. 139-163

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1982__16_2_139_0>

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics
(vol. 16, n° 2, 1982, p. 139 à 163)

SÉRIES ALGÉBRIQUES SOLUTIONS D'ÉQUATIONS LINÉAIRES AVEC OPÉRATEURS (*)

par Serge DULUCQ ([1])

Communiqué par la Rédaction

Abstract. — *R. Cori et J. Richard have introduced two operators to define languages coding certain maps families with equations including these operators. J. Richard has shown that the solution of linear equations with these two operators is algebraic if the coefficient series are too.*

In this paper we will show that the algebraic properties of the solution series of equations of the same type are valid to a more general operators' class. The obtained results light the principal points of the algebraicity proofs of J. Richard, particularly in case of a two letters alphabet.

Résumé. — *R. Cori et J. Richard ont été amenés à introduire deux opérateurs pour définir des langages codant certaines familles de graphes dessinés à l'aide d'équations comportant ces opérateurs. J. Richard a montré que la solution d'équations linéaires en ces deux opérateurs est algébrique si les séries coefficients le sont.*

Le but de cet article est de montrer que les propriétés d'algébricité pour la série solution d'équations du même type sont valables pour une classe plus générale d'opérateurs. Les résultats obtenus mettent en lumière les points cruciaux des preuves d'algébricité de J. Richard, en particulier dans le cas à deux variables.

INTRODUCTION

Depuis quelque temps se sont développés toute une série d'outils permettant de construire les mots d'un langage formel à partir d'un nombre fini d'entre eux en utilisant des opérateurs de réécriture divers. Ainsi, les travaux de L. Chottin [2] et F. Kierszenbaum [3] ont permis de mettre en évidence des familles de langages particuliers contenant tous les langages déterministes, langages solutions d'équations avec opérateurs de réécriture.

Un autre intérêt porté aux langages solutions d'équations avec opérateurs vient de leur lien avec la combinatoire. En effet, l'étude de la structure d'une famille d'objets combinatoires permet souvent de définir un codage de ces objets par des mots et de construire ensuite un système d'équations avec opérateurs

(*) Reçu novembre 1980.
([1]) Université de Bordeaux-I, Mathématiques et Informatique, 351, Cours de la Libération, 33405 Talence Cedex.

dont la solution est le langage L constitué des mots codes. La série génératrice de ces objets est alors obtenue par une opération algébrique simple à partir de L et l'étude de ces équations avec opérateurs dans l'algèbre des séries formelles permet ainsi de résoudre des problèmes d'énumération par calcul des séries génératrices solutions de ces équations.

Dans ce travail nous avons montré que certaines séries génératrices de langages sont algèbriques dans le cas d'opérateurs particuliers. En effet, l'intérêt des séries algébriques vient du fait qu'il est souvent possible de calculer leurs coefficients à partir des équations dont elles sont solutions. D'où l'intérêt des langages algébriques pour coder les objets que l'on désire énumérer : si, pour une classe d'objets donnée, un tel codage s'avère possible, alors les équations dont celui-ci est solution donnent, par passage à l'image commutative, des équations ayant pour solution la série énumératrice cherchée. R. Cori et J. Richard [4] ont réservé un traitement particulier à certains objets ne pouvant se coder par des langages algébriques.

Ils ont été amenés à introduire deux opérateurs Λ et ∇ pour définir des langages codant certaines familles de graphes dessinés à l'aide d'équations comportant ces opérateurs. J. Richard [10] a alors montré que la solution d'équations linéaires en ces deux opérateurs est algébrique si les séries coefficients le sont.

Dans cet article nous avons montré que les propriétés d'algébricité de la série solution d'équations du même type que celles étudiées par J. Richard sont valables pour une classe plus générale d'opérateurs. Les résultats que nous avons obtenus mettent en lumière des points cruciaux des preuves d'algébricité de J. Richard, en particulier dans le cas où l'alphabet considéré est à deux variables.

Ces opérateurs, considérés ici, qui sont en quelque sorte des dérivations, sont définis à partir d'un morphisme φ et vérifient les deux relations :

pour toutes séries A et B de $K\langle\langle X\rangle\rangle$:

$$T(A.B)=T(A).B+\varphi(A).T(B), \tag{C1}$$

$$T(\varphi(A).B)=\varphi(A).T(B). \tag{C2}$$

Notons que G. Hotz [8] a introduit certains opérateurs pour étudier les problèmes du mot et de l'équivalence des langages formels dont les φ-dérivations constituent un cas particulier.

Cet article est divisé en trois sections :

Dans la première nous définissons les φ-dérivations et nous énonçons leurs propriétés après en avoir donné deux exemples. En particulier, nous montrons que sous certaines conditions, une φ-dérivation est une transduction algébrico-rationnelle.

Dans la seconde section, nous définissons un opérateur résolvant associé à une φ-dérivation T. Cet opérateur nous permettra ensuite de résoudre l'équation $\xi = A + B . T(\xi)$.

Celle-ci est résolue dans la troisième section après avoir étudié les propriétés de l'opérateur résolvant. Ces propriétés permettent de montrer que la solution de cette équation est algèbrique si les séries coefficients le sont, ceci dans le cas d'un alphabet comportant deux lettres.

Dans le cas d'un alphabet quelconque fini, nous résolvons cette même équation et nous montrons que sa solution est algébrique sous réserve que les séries coefficients soient rationnelles.

1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS D'UNE φ-DÉRIVATION

1. Définition et exemples

Soit $X = \{x, y\}$ un alphabet à deux lettres et K un corps commutatif. On considère l'algèbre $K \langle\langle X \rangle\rangle$ des séries formelles en les variables non commutatives x et y.

DÉFINITION. — *Étant donnée une application φ de $K \langle\langle X \rangle\rangle$ dans lui-même, partout définie,*

un opérateur T (*c'est-à-dire une application linéaire de* $K \langle\langle X \rangle\rangle$ *dans lui-même*) est appelé une φ-dérivation *s'il vérifie les conditions suivantes :*

(c_1) *pour toutes séries A et B de $K \langle\langle X \rangle\rangle$:*

$$T(A . B) = T(A) . B + \varphi(A) . T(B),$$

(c_2) *pour toute série A de $K \langle\langle X \rangle\rangle$:*

$$\varphi(A) \text{ et } T \text{ commutent},$$

c'est-à-dire, pour toute série B de $K \langle\langle X \rangle\rangle$:

$$T(\varphi(A) . B) = \varphi(A) . T(B).$$

Nous pouvons alors démontrer la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 1.1 : *S'il existe une φ-dérivation T non identiquement nulle, alors :*

$$\varphi \text{ est un morphisme idempotent de } K \langle\langle X \rangle\rangle \textit{ dans } K \langle\langle X \rangle\rangle.$$

Preuve : Considérons trois séries C, D et E de $K\langle\langle X\rangle\rangle$. A l'aide de la condition (c_1) nous obtenons :

$$T((C.D).E)=T(C.D).E+\varphi(C.D).T(E)$$
$$=T(C).D.E+\varphi(C).T(D).E+\varphi(C.D).T(E)$$

et :

$$T(C.(D.E))=T(C).D.E+\varphi(C).T(D.E)$$
$$=T(C).D.E+\varphi(C).T(D).E+\varphi(C).\varphi(D).T(E).$$

Comme K est un corps, nous pouvons en déduire que :

$$\varphi(C.D).T(E)=\varphi(C).\varphi(D).T(E).$$

Sachant que l'algèbre $K\langle\langle X\rangle\rangle$ est intègre et supposant T non idenquement nulle, nous avons :

$$\boxed{\varphi(C.D)=\varphi(C).\varphi(D).}$$

Un raisonnement analogue conduirait au résultat :

$$\boxed{\varphi(C+D)=\varphi(C)+\varphi(D).}$$

Alors φ *est un morphisme* de $K\langle\langle X\rangle\rangle$ dans lui-même.

Soient maintenant A et B deux séries de $K\langle\langle X\rangle\rangle$.

D'après la condition (c_2) nous avons :

$$T(\varphi(A).B)=\varphi(A).T(B).$$

Or la condition (c_1) nous montre que :

$$T(\varphi(A).B)=T(\varphi(A)).B+\varphi(\varphi(A)).T(B)=\varphi(A).T(1).B+\varphi(\varphi(A)).T(B).$$

Nous constatons immédiatement que $T(1)=0$ car :

$$T(A)=T(A.1)=T(A).1+\varphi(A).T(1)$$

et donc $\varphi(A).T(1)=0$ pour toute série A.

Ainsi, K étant un corps :

$$\varphi(A).T(B)=\varphi(\varphi(A)).T(B),$$

l'algèbre $K\langle\langle X\rangle\rangle$ étant intègre et T non identiquement nulle, φ *est idempotent.* ■

REMARQUE : Par hypothèse, dans la définition des φ-dérivations, l'application φ était partout définie sur l'algèbre $K\langle\langle X\rangle\rangle$. Ceci sera réalisé dans le cas où le morphisme φ est propre. Nous supposerons donc, dans la suite de notre exposé, que :

$$\forall z\in X,\quad (\varphi(z),\ 1)=0.$$

Dans le cas contraire, si :

$\varphi(x)=1+u$ par exemple :

$$u\in K\langle\langle X\rangle\rangle \qquad \text{et} \qquad (u,\ 1)=0,$$

alors $\varphi((1-x)^{-1}=\varphi(\sum_{n\geq 0} x^n)$ aurait pour terme constant $\sum_{n\geq 0} 1^n$ ce qui n'a pas de sens, K étant un corps. ■

Exemples de φ-dérivation : 1. Soit $X=\{x,\ y\}$ et :

$$\varphi(x)=x,\qquad T(x)=0,$$
$$\varphi(y)=s(x)\in K\langle\langle x\rangle\rangle,\qquad T(y)=t(x,\ y)\in K\langle\langle x,\ y\rangle\rangle.$$

Supposons de plus que T opère sur les mots de X^2X^* de la manière suivante :

$$\forall f\in X^2X^*,\quad T(f)=\sum_{\substack{f=f_1zf_2\\ z\in X}}\varphi(f_1).T(z).f_2.$$

Ceci nous assure, en étendant ceci par linéarité aux séries formelles, que T vérifie (c_1). La condition (c_2) est aussi vérifiée par T car $T(x)=0$ et les séries $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ sont en la seule variable x. Par exemple, dans le cas où :

$$s(x)=x,$$
$$t(x,\ y)=x,$$

alors, pour tout $f\in X^*$:

$$T(xf)=x\,T(f),$$
$$T(yf)=xf+x\,T(f).$$

Ainsi :

$$T(y^n)=xy^{n-1}+x^2y^{n-2}+\ldots+x^{n-1}y+x^n=\sum_{p=1}^{n}x^p.y^{n-p}.$$

2. Soit l'alphabet $X=\{x, \bar{x}, a, \bar{a}\}$.

Soit l'opérateur T défini par :

$$
\begin{aligned}
T(x)&=0, & \varphi(x)&=x,\\
T(\bar{x})&=0, & \varphi(\bar{x})&=\bar{x},\\
T(a)&=xa\bar{a}, & \varphi(a)&=x,\\
T(\bar{a})&=\bar{x}a\bar{a}, & \varphi(\bar{a})&=\bar{x}
\end{aligned}
$$

et opérant sur les mots de $X^2 X^*$ de la même manière que dans le premier exemple. En conséquence, T constitue une φ-dérivation d'après la définition du morphisme φ.

Soit maintenant un mot f du langage de Dyck restreint sur l'alphabet $\{x, \bar{x}\}$. Considérons alors le mot g obtenu à partir de f en remplaçant la dernière occurrence de la lettre x par la lettre a et toutes les occurrences de la lettre $\bar{x}$ qui suivent par $\bar{a}$.

Ainsi :

$$g=\varphi^{-1}(f)\cap\{x, \bar{x}\}^*.a.\bar{a}^+.$$

Soit par exemple :

$$f=x\,\bar{x}xx\bar{x}x\bar{x}\bar{x}=f_1.x\bar{x}\bar{x},$$

alors :

$$g=x\bar{x}xx\bar{x}a\bar{a}\bar{a}=f_1.a\bar{a}\bar{a}.$$

Nous avons alors :

$$
\begin{aligned}
T(g)&=T(f_1).a\bar{a}\bar{a}+\varphi(f_1).T(a\bar{a}\bar{a})=f_1.T(a\bar{a}\bar{a})\\
&=f_1.T(a).\bar{a}\bar{a}+f_1\,x.T(\bar{a}).\bar{a}+f_1\,x\bar{x}.T(\bar{a})\\
&=f_1.xa\bar{a}.\bar{a}\bar{a}+f_1\,x.\bar{x}a\bar{a}.\bar{a}+f_1\,x\bar{x}.\bar{x}a\bar{a}.
\end{aligned}
$$

Considérons l'équation : $\xi=a\bar{a}+\mathrm{T}(\xi)$. La solution de cette équation est :

$$\xi=\sum_{n\geqq 0} T^n(a\bar{a}).$$

Calculons les premiers termes de la série ξ :

$$T^0(a\bar{a})=a\bar{a},\ T(a\bar{a})=xa\bar{a}\bar{a}+x\bar{x}a\bar{a},$$

$$
\begin{aligned}
T^2(a\bar{a})&=T(xa\bar{a}\bar{a})+T(x\bar{x}a\bar{a})\\
&=(xxa\bar{a}\bar{a}\bar{a}+xx\bar{x}a\bar{a}\bar{a}+xx\bar{x}\bar{x}a\bar{a})+(x\bar{x}xa\bar{a}\bar{a}+x\bar{x}x\bar{x}a\bar{a}).
\end{aligned}
$$

Ainsi, un raisonnement par récurrence nous permettrait de montrer que :

$$\xi=\varphi^{-1}(d'_1)\odot(1-x-\bar{x})^{-1}.a\bar{a}(1-\bar{a})^{-1}$$

où d'_1 est la série caractéristique du langage de Dyck $D_1'^*$, et $\odot$ désigne le produit de Hadamard.

2. Propriétés des φ-dérivations

Nous allons tout d'abord démontrer une première propriété concernant la somme et la composition des φ-dérivations.

PROPRIÉTÉ : *Soient T_1 (T_2) une φ_1 (φ_2)-dérivation :*

1. *Si $\varphi=\varphi_1=\varphi_2$ alors :*

$$T_1+T_2 \text{ est une } \varphi\text{-dérivation.}$$

2. *Si, pour toute série A de $K\langle\langle X\rangle\rangle$:*

$$T_1(\varphi_2(A))=\varphi_1(T_2(A))=T_2(\varphi_1(A))=0$$

alors $T_1\circ T_2$ est une $\varphi_1\circ\varphi_2$-dérivation.

Preuve : T_1 et T_2 étant des φ_1 et φ_2-dérivations, il est immédiat de constater que les conditions données sont suffisantes pour que T_1+T_2 dans le premier cas, $T_1\circ T_2$ dans le second, vérifient les conditions (c_1) et (c_2) de la définition des φ-dérivations. ■

Nous allons maintenant démontrer une propriété des morphismes propres et idempotents sur un alphabet à deux lettres :

PROPRIÉTÉ 1.2 : *Soit φ un morphisme propre, idempotent et distinct de l'identité. Alors, pour toutes séries r et s de $K\langle\langle x, y\rangle\rangle$:*

$$\varphi(r.s)=\varphi(s.r).$$

Preuve : φ étant propre, supposons donc :

$$\varphi(x)=ax+by+s \quad \text{où} \quad \mathrm{Supp}(s)\subseteqq X^*X^2,$$
$$\varphi(y)=cx+dy+t \quad \text{où} \quad \mathrm{Supp}(t)\subseteqq X^*X^2.$$

Rappel : $\mathrm{Supp}(s)$ désigne le support de la série s, c'est-à-dire l'ensemble $\{w\in X^*/(s, w)\neq 0\}$.

1^{er} *cas : $b\neq 0$ ou $c\neq 0$.*

D'après la symétrie en x et y nous traiterons uniquement le cas où $b\neq 0$:

$\varphi(x)=ax+by+s(x, y)$ *et* φ idempotent impliquent :

$$\varphi(x)=a\,\varphi(x)+b\,\varphi(y)+s(\varphi(x), \varphi(y)).$$

Nous avons alors :

$$\varphi(y)=b^{-1}(1-a)\,\varphi(x)-b^{-1}\,s(\varphi(x), \varphi(y)).$$

Supposons que la série $\varphi(x)$ soit connue. La série $\varphi(y)$ solution de l'équation précédente se présente alors sous la forme :

$$\varphi(y)=u_0(x, y)+u[x, y, \varphi(y)].$$

Considérons alors l'équation :

$$\xi=b^{-1}(1-a)\,x-b^{-1}\,s(x, \xi).$$

Sachant que $\operatorname{Supp}(s)\subseteq X^2 X^*$ et que cette équation ne comporte pas de terme constant, l'application : $\xi \to b^{-1}(1-a)\,x-b^{-1}\,s(x, \xi)$ est une contraction de l'algèbre $K \langle\langle X \rangle\rangle$ et de ce fait cette équation admet une solution unique qui est :

$$\xi=\xi[x].$$

Ainsi, la solution de $\varphi(y)=b^{-1}(1-a)\,\varphi(x)-b^{-1}\,s(\varphi(x), \varphi(y))$ est :

$$\varphi(y)=\xi[\varphi(x)].$$

En conséquence $\varphi(x).\varphi(y)=\varphi(x).\xi[\varphi(x)]$.

ξ étant une série en une seule variable, elle commute avec cette variable, ce qui nous prouve que :

$$\varphi(x).\varphi(y)=\varphi(y).\varphi(x)$$

et donc le résultat cherché.

2^e *cas :* $b=0$ *et* $c=0$.

Nous avons alors :

$$\varphi(x)=ax+s(x, y), \qquad \operatorname{Supp}(s)\subseteq X^2 X^*,$$
$$\varphi(y)=cy+t(x, y), \qquad \operatorname{Supp}(t)\subseteq X^2 X^*,$$

φ étant idempotent, nous en déduisons que :

$$a(ax+s)+\varphi(s)=ax+s.$$

Comme $\operatorname{Supp}(s)\subseteq X^2 X^*$ et sachant, φ étant propre, que $(\varphi(x), 1)=(\varphi(y), 1)=0$, nous en déduisons que $\operatorname{Supp}(\varphi(s))\subseteq X^2 X^*$, et donc $a^2=a$.

De la même manière, on obtiendrait $d^2=d$.

Nous pouvons alors étudier séparément les quatre cas se présentant et nous obtenons simplement le résultat désiré excepté dans le cas où $a=d=1$ où l'on a $\varphi=\mathrm{Id}$. ■

REMARQUE : Le résultat précédent est faux en général dans le cas d'un alphabet comportant plus de deux lettres comme le montre le contre-exemple suivant :

Soit $X=\{x, y, z\}$ et le morphisme φ donné par :

$$\varphi(x)=0,$$

$$\varphi(y)=x+y,$$

$$\varphi(z)=z,$$

φ est donc un morphisme idempotent et propre mais :

$$\varphi(y.z) \neq \varphi(z.y),$$

dans l'algèbre des séries formelles en variables non commutatives x, y et z.

Nous allons maintenant voir un certain nombre de propriétés des opérateurs φ-dérivations.

Soit donc T une φ-dérivation.

REMARQUE : Le morphisme propre et idempotent φ étant déterminé par la donnée des séries $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$, l'opérateur T est parfaitement déterminé par la donnée des séries $T(x)$ et $T(y)$ à l'aide de la formule :

$$T(f)=\sum_{f=f_1 z f_2} \varphi(f_1).T(z).f_2 \quad \text{pour tout } f\in X^2 X^*,$$

celle-ci provenant immédiatement de la condition (c_1).

A l'aide de cette importante remarque, nous allons démontrer la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 1.3 : *Si le morphisme φ est propre et les séries $\varphi(x)$, $\varphi(y)$, $T(x)$ et $T(y)$ algébriques, alors T* est une transduction algébrico-rationnelle *et donc T opère dans $K^{\mathrm{alg}}\langle\langle X\rangle\rangle$* [6].

Preuve : D'après la remarque précédente et la formule qui y est donnée, on peut associer à la transduction T la représentation :

$$\mu:\quad X^* \to (K^{\mathrm{alg}}\langle\langle x, y\rangle\rangle)^{2\times 2} \quad [6],$$

définie par :

$$\mu x=\begin{pmatrix} \varphi(x) & T(x) \\ 0 & x \end{pmatrix}; \qquad \mu y=\begin{pmatrix} \varphi(y) & T(y) \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

En conséquence, si les séries $\varphi(x)$, $\varphi(y)$, $T(x)$ et $T(y)$ sont algébriques, T est alors une transduction algébrico-rationnelle, c'est-à-dire que l'image par T de toute série algébrique est une série algébrique.

Il est à noter que dans le cas où les séries $\varphi(x)$, $\varphi(y)$, $T(x)$ et $T(y)$ sont toutes quatre rationnelles, T est alors une transduction rationnelle [6]. ■

Nous allons maintenant donner une condition nécessaire que doit vérifier un opérateur T pour qu'il soit une φ-dérivation :

PROPRIÉTÉ 1.4 : *Soit φ un morphisme propre et idempotent défini sur* $K \langle\langle X \rangle\rangle$ *par la donnée de $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$. Soit T un opérateur défini par la donnée de $T(x)$ et $T(y)$ et sur les mots de $X^2 X^*$ par la formule de la remarque précédente. Alors, si T est une φ-dérivation :*

$$T(\varphi(x)) = T(\varphi(y)) = 0.$$

Preuve : Comme T est une φ-dérivation, d'après la condition (c_2) nous avons :

$$T(\varphi(x)) = \varphi(x).T(1) \qquad \text{et} \qquad T(\varphi(y)) = \varphi(y).T(1).$$

Comme nous l'avons vu lors de la démonstration de la propriété 1.1 :

$$T(1) = 0.$$

En conséquence :

$$T(\varphi(x)) = T(\varphi(y)) = 0. \quad ■$$

REMARQUE : Par la suite, il sera alors raisonnable de supposer $\varphi \neq \mathrm{Id}$, sinon T est identiquement nul.

Nous allons maintenant donner deux ensembles de conditions suffisantes vérifiées par une φ-dérivation T pour que l'équation $\xi = A + B.T(\xi)$ admette une solution unique dans l'algèbre $K \langle\langle X \rangle\rangle$.

Supposons donc que T soit une φ-dérivation vérifiant :

$$\begin{array}{ll} (c_3) & \left\{ \begin{array}{l} \forall z \in X, \quad (T(z), 1) = 0, \\ \forall f \in X^*, \quad \exists n \text{ tel que } T^n(f) = 0 \end{array} \right. \\ (c_4) & \end{array}$$

ou :

$$(c_5) \qquad \forall z \in X, \quad \forall z' \in X \qquad (T(z), 1) = (T(z), z') = 0.$$

Nous pouvons alors démontrer la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 1.5 : 1) *Si T vérifie (c_3) alors pour tout $f \in X^*$ et pour tout $h \in \mathrm{Supp}(T(f))$:*

$$|h| \geqq |f|.$$

2) *Si T vérifie (c_4) il existe alors une constante $k > 0$ telle que pour tout $f \in X^*$ et pour tout $p \geqq k \mid f \mid$:*

$$T^p(f)=0.$$

Preuve : 1) Ceci est immédiat puisque φ est un morphisme propre et :

$$T(f)=\sum_{\substack{f=f_1 z f_2 \\ z \in X}} \varphi(f_1).T(z).f_2.$$

2) Soient, d'après la condition (c_4) :

$$n_1 \text{ tel que } T^{n_1}(x)=0,$$
$$n_2 \text{ tel que } T^{n_2}(y)=0.$$

Prenons $k=\operatorname{Max}\{n_1, n_2\}$.

Soient h_1 et h_2 deux mots de X^*. D'après la condition (c_1) :

$$T(h_1.h_2)=T(h_1).h_2+\varphi(h_1).T(h_2),$$

supposons que, $\forall q \geqq 1$:

$$T^q(h_1.h_2)=T^q(h_1).h_2+\varphi(T^{q-1}(h_1)).T(h_2)+\ldots+\varphi(h_1).T^q(h_2).$$

En utilisant les conditions (c_1) et (c_2), nous obtenons :

$$T^{q+1}(h_1.h_2)=T^{q+1}(h_1).h_2+\varphi(T^q(h_1)).T(h_2)+\ldots+\varphi(h_1).T^{q+1}(h_2).$$

Nous allons utiliser ce résultat pour montrer, par un raisonnement par récurrence sur la longueur des mots de X^*, que :

$$\forall f \in X^*, \quad \forall p \geqq k.|f|, \qquad T^p(f)=0;$$

- ceci est vrai pour tout mot f de longueur 1 par définition de k;
- soit $f \in X^* \mid |f|=n > 1$; f peut alors s'écrire $f=gz$ avec $z \in \{x, y\}$.

D'après le raisonnement précédent, nous obtenons :

$$T^{k.n}(g.z)=T^{k.n}(g).z+\varphi(T^{k.n-1}(g)).T(z)+\ldots+\varphi(g).T^{k.n}(z),$$

l'utilisation de l'hypothèse de récurrence nous prouve alors :

$$T^{k.n}(g.z)=0$$

et le résultat annoncé. ■

II. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE L'OPÉRATEUR RÉSOLVANT

Soit T une φ-dérivation, où φ est un morphisme propre, vérifiant :
- soit les conditions (c_3) et (c_4);
- soit la condition (c_5).

Pour toute série r vérifiant $r=\varphi(r)$, nous allons définir un opérateur $T_{[r]}$ ($[r]$ étant considéré comme indice associé à T) qui nous permettra de résoudre l'équation $\xi=A+B.T(\xi)$ dans l'algèbre $K\langle\langle X\rangle\rangle$. *L'opérateur* $T_{[r]}$ sera appelé *l'opérateur résolvant* [4, 10].

DÉFINITION : *A toute série vérifiant* $r=\varphi(r)$, *on associe l'opérateur* $T_{[r]}$ *défini par:*

$$T_{[r]}=(1-r\,T)^{-1}=\sum_{n\geqq 0}(r.T)^n.$$

REMARQUES : 1. Il est possible de définir un opérateur $T_{[A]}=\sum_{n\geqq 0}(A.T)^n$ pour toute série $A\in K\langle\langle X\rangle\rangle$ et nous pourrions montrer que celui-ci a bien un sens. Mais comme nous pourrons le voir par la suite, l'opérateur qui nous permettra de résoudre l'équation $\xi=A+B.T(\xi)$ est du type $T_{[r]}$ où r vérifie $r=\varphi(r)$.

2. T étant une φ-dérivation et r vérifiant $r=\varphi(r)$, T et r commutent et $T_{[r]}=\sum_{n\geqq 0}r^n.T^n$. ■

Nous allons montrer maintenant que ce type d'opérateur $T_{[r]}$ a bien un sens.

PROPRIÉTÉ 2.1 : *Soit r une série vérifiant* $r=\varphi(r)$. L'opérateur $T_{[r]}$ est défini sur toute l'algèbre $K\langle\langle x, y\rangle\rangle$. *De plus, pour toutes séries A et B de* $K\langle\langle x, y\rangle\rangle$ *:*

$$T_{[r]}(A.B)=T_{[r]}(A).B+\varphi(T_{[r]}(A))(T_{[r]}(B)-B).$$

Preuve : Soit $s=\sum_{w\in X^*}(s, w)\,w$ une série de $K\langle\langle x, y\rangle\rangle$. Appliquons l'opérateur $T_{[r]}$ à cette série :

$$T_{[r]}(s)=\sum_{w\in X^*}(s, w)\,T_{[r]}(w)=\sum_{w\in X^*}(s, w).\Big[\sum_{n\geqq 0}r^n.T^n(w)\Big]$$

$$=\sum_{f\in X^*}\left[\sum_{\substack{n\geqq 0\\ w\in X^*}}(s, w)(r^n.T^n(w), f)\right]f,$$

$$qf\in \operatorname{Supp}(r^n.T^n(w)).$$

Alors l'opérateur $T_{[r]}$ est partout défini sur $K\langle\langle x, y\rangle\rangle$ si : pour tout $f\in X^*$ l'ensemble $Af=\{(w, n)\in X^*\times\mathbb{N}/f\in\operatorname{Supp}(r^n.T^n(w))\}$ est de cardinalité finie [1].

Nous allons alors envisager les deux cas suivants :

1. Dans le cas où la φ-dérivation T vérifie les conditions (c_3) et (c_4), la propriété 1.5 nous donne alors :

$$f \in \operatorname{Supp}(r^n . T^n(w)) \quad \Rightarrow \quad |f| \geqq |w| \qquad \text{et} \qquad n < k\,|w|.$$

En conséquence $n < k\,|w| \leqq k\,|f|$ et Af est de cardinalité finie.

2. Dans le cas où la φ-dérivation T vérifie la condition (c_5), nous avons alors, d'après la formule donnant T sur les mots de $X^2 X^*$:

$$\forall f \in XX^*, \quad \forall h \in \operatorname{Supp}(T(f)), \qquad |h| > |f|.$$

Alors, si $f \in \operatorname{Supp}(r^n . T^n(w))$, $|f| \geqq |w| + n$. Donc, dans ce cas aussi, Af est fini.

Considérons maintenant deux mots de X^*, h_1 et h_2 :

$$T_{[r]}(h_1 . h_2) = \sum_{n \geqq 0} r^n . T^n(h_1 . h_2).$$

En développant cette expression comme cela a été fait au cours de la démonstration de la propriété 1.5, nous obtenons :

$$\begin{aligned} T_{[r]}(h_1 . h_2) = & \sum_{n \geqq 0} r^n . T^n(h_1) . h_2 \\ & + \sum_{n \geqq 1} r^n . [\varphi(T^{n-1}(h_1)) . T(h_2) + \varphi(T^{n-2}(h_1)) . T^2(h_2) + \ldots + \varphi(h_1) . T^n(h_2)] \\ & = T_{[r]}(h_1) . h_2 + \sum_{q \geqq 1} r^q . [\sum_{p \geqq 0} r^p . \varphi(T^p(h_1))] . T^q(h_2), \end{aligned}$$

φ étant un morphisme et r vérifiant $r = \varphi(r)$:

$$T_{[r]}(h_1 . h_2) = T_{[r]}(h_1) . h_2 + \sum_{q \geqq 1} r^q . \varphi(T_{[r]}(h_1)) . T^q(h_2).$$

On peut alors étendre ce résultat aux séries par linéarité à gauche : pour toute série A de $K \langle\langle x, y \rangle\rangle$ et pour tout mot h de X^* :

$$T_{[r]}(A . h) = T_{[r]}(A) . h + \sum_{q \geqq 1} r^q . \varphi(T_{[r]}(A)) . T^q(h).$$

Comme X est un alphabet à deux lettres, nous pouvons donc écrire, d'après la propriété 2 puisque $r = \varphi(r)$, et qu'il est raisonnable de supposer $\varphi \neq \mathrm{Id}$, que :

$$\begin{aligned} T_{[r]}(A . h) = & T_{[r]}(A) . h + \varphi(T_{[r]}(A)) . \sum_{q \geqq 1} r^q . T^q(h) \\ & = T_{[r]}(A) . h + \varphi(T_{[r]}(A)) . (T_{[r]}(h) - h). \end{aligned}$$

Ce résultat, étendu par linéarité à droite aux séries, nous donne donc : pour toutes séries A et B de $K\langle\langle X\rangle\rangle$:

$$T_{[r]}(A.B)=T_{[r]}(A).B+\varphi(T_{[r]}(A)).(T_{[r]}(B)-B).$$

Ceci termine la preuve de la propriété 2.1. ■

Nous pouvons faire la remarque suivante, qui nous sera utile par la suite :

REMARQUE : Dans le cas d'un alphabet fini X comportant plus de deux lettres, ce dernier résultat n'est plus vrai car la propriété 1.2 est en général fausse comme nous avons pu le voir sur un exemple. Il reste cependant exact quand :

$$r=a.1 \qquad \text{où} \quad a\in K.$$

Ainsi $r=\varphi(r)$ et elle commute alors avec toute série $\varphi(A)$ pour $A\in K\langle\langle X\rangle\rangle$. Dans les autres cas on peut seulement affirmer : pour toute série A dans $K\langle\langle X\rangle\rangle$ et tout mot h de X^* :

$$T_{[r]}(A.h)=T_{[r]}(A).h+\sum_{p\geqq 1} r^p.\varphi(T_{[r]}(A)).T^p(h). \quad ■$$

Nous allons maintenant démontrer, en utilisant la propriété précédente, que l'équation $\xi=A+B.T(\xi)$ admet une solution unique.

COROLLAIRE : *Si la φ-dérivation T vérifie les conditions* (c_3) *et* (c_4) *ou la condition* (c_5), l'équation, dans $K\langle\langle X\rangle\rangle$, $\xi=A+B.T(\xi)$ admet une solution unique.

Preuve : Nous allons considérer les deux cas suivants :

1er *cas :* La série B n'admet pas de terme constant : $(B,1)=0$. Dans ce cas, T vérifiant (c_3) et (c_4) ou (c_5), la propriété 1.5 nous assure que l'opérateur du second membre $A+B.T$ est une contraction. En conséquence, cette équation admet une solution unique.

2e *cas :* La série B possède un terme constant : $(B,1)=a\in K$. Nous écrivons alors :

$$B=a+B' \qquad \text{avec} \quad (B',1)=0$$

et :

$$\xi=A+a.T(\xi)+B'.T(\xi).$$

Donc :

$$(1-a.T)(\xi)=A+B'.T(\xi)$$

la série $a=a.1$ vérifiant $a=\varphi(a)$, l'opérateur $T_{[a]}$ a donc un sens et :

$$\xi=T_{[a]}(A)+T_{[a]}(B'.T(\xi)).$$

Connaissant le second résultat de la propriété 2.1, nous obtenons :

$$\xi = T_{[a]}(A) + T_{[a]}(B').T(\xi) + \varphi(T_{[a]}(B')).(T_{[a]}.T(\xi) - T(\xi)).$$

D'après la définition de $T_{[r]}$ et la propriété 1.5 il est clair que cet opérateur n'abaisse pas le degré des monômes, ceci pour toute série r vérifiant $r = \varphi(r)$.

Comme B' est une série sans terme constant et φ est un morphisme propre, l'opérateur du second membre est une contraction et l'équation admet donc une solution unique.

REMARQUE : D'après la remarque précédente cette démonstration reste exacte dans le cas d'un alphabet X où $|X| = n > 2$. ■

Nous allons maintenant donner une propriété de l'opérateur $T_{[r]}$.

PROPRIÉTÉ 2.2 : 1) *Si le morphisme φ est propre et les séries $\varphi(x)$, $\varphi(y)$, $T(x)$, $T(y)$ et la série r vérifiant $r = \varphi(r)$ sont algébriques, alors :*

$T_{[r]}$ est une transduction algébrico-rationnelle [6].

2) *Pour toute série $B = B(x, y)$:*

$$\varphi(T_{[r]}(B)) = B(\varphi(T_{[r]}(x)), \varphi(T_{[r]}(y))).$$

Preuve : 1) La série $T(x)$ [respectivement la série $T(y)$] étant algébrique, elle est solution ξ_1 (respectivement λ_1) d'un système d'équations propre [11] :

$$\begin{aligned} \xi_i &= p_i(x, y, \xi_j), \qquad 1 \leqq i, \quad j \leqq k, \\ \lambda_i &= r_i(x, y, \lambda_j), \qquad 1 \leqq i, \quad j \leqq p. \end{aligned}$$

D'après la propriété 2.1 on peut alors montrer que :
pour toutes séries $A_i \in K\langle\langle x, y \rangle\rangle$, $1 \leqq i \leqq n$;
pour toute série r vérifiant $r = \varphi(r)$:

$$\begin{aligned} T_{[r]}(A_1.A_2...A_n) = T_{[r]}(A_1).A_2...A_n & \\ + \varphi(T_{[r]}(A_1)).(T_{[r]}(A_2) - A_2).A_3...A_n + ... & \\ + \varphi(T_{[r]}(A_1)).\varphi(T_{[r]}(A_2))...\varphi(T_{[r]}(A_{n-1})).(T_{[r]}(A_n) - A_n). & \end{aligned}$$

En conséquence $T_{[r]}(\xi_i) = T_{[r]}(p_i(x, y, \xi_j))$ développée suivant cette formule est un polynôme q_i en les variables : $x, y, \xi_j, T_{[r]}(\xi_j), \varphi(T_{[r]}(\xi_j)), T_{[r]}(x), \varphi(T_{[r]}(x)), T_{[r]}(y), \varphi(T_{[r]}(y))$.

De la même manière $T_{[r]}(\lambda_i)$ est un polynôme q_i en les mêmes variables. Modifions alors ces deux polynômes q_i et q'_i en remplaçant :

$$\begin{gathered} T_{[r]}(x) \text{ par } x+\xi_0, \\ T_{[r]}(y) \text{ par } y+\lambda_0, \\ \varphi(T_{[r]}(x)) \text{ par } \varphi(x)+\varphi(\xi_0), \\ \varphi(T_{[r]}(y)) \text{ par } \varphi(y)+\varphi(\lambda_0). \end{gathered}$$

Nous obtenons :

$$(1) \quad T_{[r]}(\xi_i)=q_i(x,\, y,\, \xi_j,\, T_{[r]}(\xi_j),$$
$$\varphi(T_{[r]}(\xi_j)),\, \xi_0,\, \varphi(\xi_0),\, \lambda_0,\, \varphi(\lambda_0),\, \varphi(x),\, \varphi(y)).$$

$$(2) \quad T_{[r]}(\lambda_i)=q'_i(x,\, y,\, \lambda_j,\, T_{[r]}(\lambda_j),\, \varphi(T_{[r]}(\lambda_j)),$$
$$\xi_0,\, \varphi(\xi_0),\, \lambda_0,\, \varphi(\lambda_0),\, \varphi(x),\, \varphi(y)).$$

Considérons maintenant le système suivant :

$$(s_1) \left\{ \begin{gathered} \xi_0=r\,.\,T_{[r]}(\xi_1), \\ \lambda_0=r\,.\,T_{[r]}(\lambda_1), \\ \xi_i=p_i(x,\, y,\, \xi_j), \qquad 1 \leqq i, \quad j \leqq k, \\ \lambda_i=r_i(x,\, y,\, \lambda_j), \qquad 1 \leqq i, \quad j \leqq p, \\ T_{[r]}(\xi_i)=(1), \qquad 1 \leqq i, \quad j \leqq k, \\ T_{[r]}(\lambda_i)=(2), \qquad 1 \leqq i, \quad j \leqq p, \\ \varphi(\xi_i)=p_i(\varphi(x),\, \varphi(y),\, \varphi(\xi_j)), \qquad 1 \leqq i, \quad j \leqq k, \\ \varphi(\lambda_i)=r_i(\varphi(x),\, \varphi(y),\, \varphi(\lambda_j)), \qquad 1 \leqq i, \quad j \leqq k, \\ \varphi(\xi_0)=r\,.\,\varphi(T_{[r]}(\xi_1)), \\ \varphi(\lambda_0)=r\,.\,\varphi(T_{[r]}(\lambda_1)), \\ \varphi(T_{[r]}(\xi_i))=q_i(\varphi(x),\, \varphi(y),\, \varphi(\xi_j),\, \varphi(T_{[r]}(\xi_j)),\, \varphi(\xi_0),\, \varphi(\lambda_0)), \\ 1 \leqq i, \quad j \leqq k, \\ \varphi(T_{[r]}(\lambda_i))=q'_i(\varphi(x),\, \varphi(y),\, \varphi(\lambda_j),\, \varphi(\mathrm{T}_{[r]}(\lambda_j)),\, \varphi(\xi_0),\, \varphi(\lambda_0)), \\ 1 \leqq i, \quad j \leqq p. \end{gathered} \right.$$

système auquel on adjoint celui donnant r et ceux donnant $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$, ces séries étant, par hypothèse, algébriques.

Ainsi :

$$r\,T_{[r]}(T(x))=T_{[r]}(x)-x$$

et :

$$r\,T_{[r]}(T(y))=T_{[r]}(y)-y,$$

sont solutions ξ_0 et λ_0 de ce système qui est propre puisque $T_{[r]}$ n'abaisse pas le degré des monômes, T vérifiant (c_3) et (c_4) ou (c_5). Comme d'après ce qu'il a été vu précédemment, pour tout $x_i \in \{x, y\}$:

$$(T_{[r]}-\mathrm{Id})(x_1 x_2 \ldots x_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n} \varphi(T_{[r]}(x_1))\ldots\varphi(T_{[r]}(x_{i-1}))(T_{[r]}(x_i)-x_i).x_{i+1}\ldots x_n.$$

On peut alors associer à $(T_{[r]}-\mathrm{Id})$ la représentation [6] :

$$\mu:\quad X^* \to (K^{\mathrm{alg}}\langle\langle x, y\rangle\rangle)^{2\times 2}$$

défini par :

$$\mu(x)=\begin{pmatrix} \varphi(T_{[r]}(x)) & T_{[r]}(x)-x \\ 0 & x \end{pmatrix}, \qquad \mu(y)=\begin{pmatrix} \varphi(T_{[r]}(y)) & T_{[r]}(y)-y \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

En conséquence, $T_{[r]}$ *est une transduction algébrico-rationnelle.*

2) On montre aisément par récurrence sur la longueur des mots de X^*, à partir de la formule écrite ci-dessus, que : pour tout $x_i \in \{x, y\}$:

$$\varphi[T_{[r]}(x_1 . x_2 \ldots x_n)]=\varphi[T_{[r]}(x_1)].\varphi[T_{[r]}(x_2)]\ldots\varphi[T_{[r]}(x_n)].$$

De ceci, on déduit alors le résultat annoncé. ■

Grâce aux propriétés de l'opérateur résolvant, nous pouvons alors énoncer le théorème de résolution de l'équation $\xi=A+B.T(\xi)$ analogue à celui de J. Richard [10], mais étendu au type d'opérateur considéré ici.

III. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION $\xi=A+B.T(\xi)$:

1. Dans le cas d'un alphabet à deux lettres

THÉORÈME 3.1 : *Soit, dans $K\langle\langle x, y\rangle\rangle$, l'équation $\xi=A+B.T(\xi)$ où T est une φ-dérivation vérifiant les conditions (c_3) et (c_4) ou la condition (c_5) et où φ est un morphisme propre distinct de l'identité. Alors* la solution de cette équation *est donnée par :*

$$\xi=A+B.(1-T.T_{[r]}(B))^{-1}.TT_{[r]}(A)$$

où r *est solution de l'équation* :

$$r=\varphi(T_{[r]}(B)).$$

De plus, si les séries A, B, $T(x)$, $T(y)$, $\varphi(x)$ *et* $\varphi(y)$ *sont toutes algébriques :*

cette solution est algébrique.

Preuve : Nous allons tout d'abord prouver l'existence de la série r vérifiant :

$$r=\varphi(T_{[r]}(B)).$$

Pour cela, nous étendrons la définition de l'opérateur T à une φ-dérivation sur l'algèbre $K\langle\langle x, y, r\rangle\rangle$, où r est une nouvelle variable, en posant :

$$T(r)=0; \qquad \varphi(r)=r.$$

Considérons alors, dans $K\langle\langle x, y, r\rangle\rangle$, l'équation :

$$\eta=B+r.T(\eta).$$

D'après la remarque faite lors de la démonstration du corollaire précédent, cette équation admet une solution unique, l'opérateur du second membre étant une contraction. De plus, cette solution est :

$$\eta=\eta(x, y, r)=\sum_{n\geq 0} r^n.T^n(B).$$

Considérons maintenant, dans $K\langle\langle x, y\rangle\rangle$, l'équation :

$$r=\varphi(\eta)=\eta(\varphi(x), \varphi(y), r).$$

Alors, r solution de cette équation, vérifie :

$$r=\varphi\Big(\sum_{n\geq 0} r^n.T^n(B)\Big)=\sum_{n\geq 0} r^n.\varphi(T^n(B)),$$

ceci puisque φ est idempotent.

Et donc, d'après la définition de l'opérateur résolvant :

$$r=\varphi(T_{[r]}(B)).$$

Avant de résoudre l'équation $\xi=A+B.T(\xi)$, nous allons montrer, avec les hypothèses du théorème, que r solution de $r=\varphi(T_{[r]}(B))$ est algébrique.

La série B étant algébrique, supposons donc qu'elle est solution η_1 du système d'équations propre [11] :

$$\eta_i = s_i(x, y, \eta_j), \qquad 1 \leqq i, \quad j \leqq q.$$

Considérons alors ce système modifié de la manière suivante :

$$\eta_i = s_i[\varphi(\xi_0) + \varphi(x), \varphi(\lambda_0) + \varphi(y), \eta_j], \qquad 1 \leqq i, \quad j \leqq q.$$

Nous transformons alors ce système en remplaçant toutes les occurrences de la variable η_1 y apparaissant par r, et en lui joignant celui figurant dans la preuve de la propriété 2.2 :

$$(s_2) \qquad \begin{cases} r = s_i[\varphi(\xi_0) + \varphi(x), \varphi(\lambda_0) + \varphi(y), \eta_j, r], & 2 \leqq j \leqq q, \\ \eta_i = s_i[\varphi(\xi_0) + \varphi(x), \varphi(\lambda_0) + \varphi(y), \eta_j, r], & 2 \leqq i, \quad j \leqq q, \\ \text{système } (s_1). \end{cases}$$

En ajoutant à ce système d'équations propre (s_2) ceux dont $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ sont solutions, nous en déduisons que r est algébrique et que r vérifie $r = \varphi(T_{[r]}(B))$. En effet, ce système a été obtenu à partir de celui dont B est solution conformément à la formule de la propriété 2.2 :

$$\varphi(T_{[r]}(B)) = B(\varphi(T_{[r]}(x)), \varphi(T_{[r]}(y))).$$

Ainsi r solution de $r = \varphi(T_{[r]}(B))$ est algébrique.

Nous allons maintenant résoudre l'équation $\xi = A + B \,.\, T(\xi)$ en lui appliquant tout d'abord l'opérateur $T_{[r]}$. La série r vérifiant $r = \varphi(T_{[r]}(B))$, elle vérifie donc $r = \varphi(r)$ car φ est un morphisme idempotent :

$$\begin{aligned} T_{[r]}(\xi) = T_{[r]}(A) + T_{[r]}(B \,.\, T(\xi)) \\ = T_{[r]}(A) + T_{[r]}(B) \,.\, T(\xi) + \varphi(T_{[r]}(B)) \,.\, (T_{[r]} T(\xi) - T(\xi)) \\ = T_{[r]}(A) + T_{[r]}(B) \,.\, T(\xi) + r \,.\, T_{[r]} T(\xi) - r \,.\, T(\xi). \end{aligned}$$

Comme nous avons $r \,.\, T_{[r]} T(\xi) = T_{[r]}(\xi) - \xi$:

$$T_{[r]}(\xi) = T_{[r]}(A) + (T_{[r]}(B) - r) \,.\, T(\xi) + T_{[r]}(\xi) - \xi.$$

Nous en déduisons :

$$\xi = T_{[r]}(A) + (T_{[r]}(B) - r) \,.\, T(\xi).$$

En appliquant l'opérateur T à l'équation obtenue :

$$T(\xi) = TT_{[r]}(A) + [TT_{[r]}(B) - T(r)] \,.\, T(\xi) + [\varphi(T_{[r]}(B)) - \varphi(r)] \,.\, T^2(\xi),$$

r vérifiant $r=\varphi(r)$, nous avons $T(r)=0$. Ainsi :

$$T(\xi)=TT_{[r]}(A)+TT_{[r]}(B).T(\xi)$$

et :

$$[1-TT_{[r]}(B)].T(\xi)=TT_{[r]}(A).$$

Comme T n'abaisse pas le degré des monômes et $T(1)=0$: pour toute série $s\in K\langle\langle x, y\rangle\rangle$ $(T(s), 1)=0$. Ainsi la série $1-TT_{[r]}(B)$ est inversible [11] et :

$$T(\xi)=(1-TT_{[r]}(B))^{-1}.TT_{[r]}(A).$$

En reportant ceci dans l'équation initiale, on obtient :

$$\xi=A+B.(1-TT_{[r]}(B))^{-1}.TT_{[r]}(A).$$

D'autre part, r étant algébrique, $T_{[r]}$ est une transduction algébrico-rationnelle. Il en résulte que la solution est alors algébrique. ■

Nous nous sommes, par la suite, posés le problème de savoir s'il était possible de résoudre une équation de la forme :

$$\xi=A+B.T_{[r]}(\xi)$$

où T est une φ-dérivation et r une série vérifiant $r=\varphi(r)$.

Pour cela, nous allons démontrer la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 3.1 : *Si T est une φ-dérivation vérifiant (c_3) et (c_4) ou (c_5), alors : pour toute série r vérifiant $r=\varphi(r)$, $T_{[r]}-\mathrm{Id}=r.TT_{[r]}$ est une φ'-dérivation vérifiant les mêmes conditions.*

Preuve : Posons $T'=T_{[r]}-\mathrm{Id}$.

D'après la propriété 2.1, pour toutes séries A et B de $K\langle\langle x, y\rangle\rangle$:

$$T_{[r]}(A.B)=T_{[r]}(A).B+\varphi(T_{[r]}(A)).(T_{[r]}(B)-B).$$

Nous en déduisons alors :

$$T'(A.B)=T'(A).B+\varphi'(A).T'(B)$$

où :

$$\varphi'(A)=\varphi(T_{[r]}(A)).$$

Et :

$$\begin{aligned}T'(\varphi'(A).B)&=T_{[r]}(\varphi(T_{[r]}(A)).B)-\varphi(T_{[r]}(A)).B\\&=\varphi(T_{[r]}(A)).B+\varphi(T_{[r]}(A)).(T_{[r]}(B)-B)-\varphi(T_{[r]}(A)).B\\&=\varphi'(A).T'(B).\end{aligned}$$

En conséquence, T' est une φ'-dérivation.

Comme $T'=r.TT_{[r]}=r.T_{[r]}T$ nous constatons immédiatement que T' conserve les mêmes propriétés que T puisque $T_{[r]}$ n'abaisse pas le degré des monômes [T vérifiant (c_3) et (c_4) ou (c_5)]. ■

Nous pouvons, à l'aide de cette propriété, déduire du théorème 3.1 :

COROLLAIRE : *Soit, dans* $K\langle\langle x, y\rangle\rangle$, *l'équation* $\xi=A+B.T_{[r]}(\xi)$ *où* T *est une* φ-*dérivation vérifiant* (c_3) *et* (c_4) *ou* (c_5), φ *un morphisme propre, et* r *une série vérifiant* $r=\varphi(r)$. *Alors :*

1° si $(B, 1)\neq 1_K$ cette équation admet une solution unique;

2° si les séries $T(x)$, $T(y)$, $\varphi(x)$, $\varphi(y)$, r, A et B sont algébriques :

la solution est algébrique.

Preuve : Considérons cette équation $\xi=A+B.T_{[r]}(\xi)$ et réécrivons-la, de la manière suivante :

$$\xi=A+B.\xi+B.(T_{[r]}-\mathrm{Id})(\xi).$$

Nous avons donc :

$$(1-B).\xi=A+B.(T_{[r]}-\mathrm{Id})(\xi).$$

Comme $(B, 1)\neq 1_K$ par hypothèse, $(1-B)$ est donc inversible et :

$$\xi=(1-B)^{-1}.A+(1+B)^{-1}.B.(T_{[r]}-\mathrm{Id})(\xi).$$

Sachant, grâce à la propriété précédente, que $(T_{[r]}-\mathrm{Id})$ est une φ'-dérivation, nous nous sommes ramenés à la résolution d'une équation satisfaisant les hypothèses du théorème précédent. D'autre part, $T(x)$,$\varphi(x)$, $T(y)$, $\varphi(y)$ et r étant algébriques, il en est de même des séries $T_{[r]}(x)$ et $T_{[r]}(y)$ et donc des séries $T'(x)$, $T'(y)$, $\varphi'(x)$ et $\varphi'(y)$.

Nous obtenons alors le résultat désiré en utilisant le théorème précédent. ■

2. Généralisation au cas d'un alphabet fini quelconque

Considérons l'alphabet $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ où $n\geqq 3$. Soit T une φ-dérivation.

Nous pouvons alors montrer, de la même manière que dans le cas d'un alphabet à deux lettres, que :

— φ *est un morphisme idempotent* que l'on supposera *propre* de manière à ce que cette φ-dérivation soit définie sur toute l'algèbre $K\langle\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle\rangle$;

— *T est une transduction algébrico-rationnelle* si les séries $T(x_i)$ et $\varphi(x_i)$ sont algébriques pour $1\leqq i\leqq n$.

Mais, en général, comme nous l'a prouvé le contre-exemple de la propriété 1.2 :

$$\varphi(r.s) \neq \varphi(s.r) \qquad \text{pour } r \text{ et } s \text{ dans } K\langle\langle X \rangle\rangle.$$

Supposons maintenant que :

T vérifie les conditions (c_3) et (c_4).

Ainsi l'opérateur $T_{[r]}$ a un sens pour toute série r vérifiant $r=\varphi(r)$ et, d'après la remarque de propriété 2.1 : pour toute série A de $K\langle\langle X \rangle\rangle$ et tout mot h de X^* :

$$T_{[r]}(A.h)=T_{[r]}(A).h+\sum_{p\geqq 1} r^p.\varphi(T_{[r]}(A)).T^p(h).$$

Mais, comme nous pourrions le voir sur un exemple simple de φ-dérivation, le problème de savoir si $T_{[r]}$ est une transduction algébrico-rationnelle ou non n'est pas résolu. Nous allons seulement démontrer que $T_{[r]}$ transforme toute série rationnelle en une série algébrique si r est une série algébrique.

PROPRIÉTÉ 3.2 : *Supposons que les séries $\varphi(x_i)$ et $T(x_i)$ sont algébriques pour $1 \leqq i \leqq n$.*

Soit B une série rationnelle. *Alors :*

1) r solution de $r=\varphi(T_{[r]}(B))$ est algébrique;

2) si r est une série algébrique :

$$T_{[r]}(B) \text{ est algébrique.}$$

Preuve : Pour démontrer cette propriété nous utiliserons essentiellement la remarque faite précédemment, c'est-à-dire :

$$\forall A \in K\langle\langle x_1, \ldots, x_n \rangle\rangle \quad \text{et} \quad \forall h \in X^*,$$

$$T_{[r]}(A.h)=T_{[r]}(A).h+\sum_{p\geqq 1} r^p.\varphi(T_{[r]}(A)).T^p(h).$$

Comme T vérifie (c_4), cette sommation est finie d'après la propriété 1.5 et nous avons :

$$T_{[r]}(A.h)=T_{[r]}(A).h+\sum_{p=1}^{k|h|-1} r^p.\varphi(T_{[r]}(A)).T^p(h),$$

où $k=\operatorname{Max}_{1\leqq i \leqq n}\{n_i\}$ et n_i est tel que $T^{n_i}(x_i)=0$ $((c_4))$.

B étant une série rationnelle, elle est donc solution d'un système d'équations propre linéaire gauche [11]. Supposons donc que B soit solution ξ_1 du système :

$$\xi_i=\xi_{i_1}.p_{i_1}+\ldots+\xi_{i_j}.p_{i_j}+p_{i_{j+1}}+\ldots+p_{i_n}, \qquad 1\leqq i\leqq k,$$

où les p_{i_m} sont des monômes et $\xi_{i_j}\in\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$.

Comme T vérifie la condition (c_4), pour chaque monôme p_{i_m} il existe une constante l_{i_m} telle que :

$$l_{i_m}=k\,|p_{i_m}|-1 \qquad \text{et} \qquad T^{l_{i_m}+1}(p_{i_m})=0.$$

Afin d'exprimer les résultats 1) et 2) nous allons développer le système dont B est solution suivant la formule écrite plus haut.

1. Soit donc le système :

$$\left\{\begin{array}{l}\xi_i=\sum_{m=1}^{j}\sum_{p=0}^{\lim}\xi_1^p\,\xi_{i_m}\,\varphi(T^p(p_{i_m}))+\sum_{m=j+1}^{n}\sum_{p=0}^{\lim}\xi_1^p\,\varphi(T^p(p_{i_m})),\\ \qquad\qquad 1\leqq i\leqq k.\end{array}\right.$$

Nous pouvons alors développer les termes $\varphi(T^p(p_{i_m}))$ pour tout p, $0\leqq p\leqq \lim$, en fonction des séries $\varphi(x_i)$ et $T(x_i)$ à l'aide des conditions (c_1) et (c_2) que vérifie la φ-dérivation T. Ce système, ainsi développé, auquel on adjoint ceux dont les séries $\varphi(x_i)$ et $T(x_i)$ sont solutions puisque algébriques, admet pour composante ξ_1 de la solution la série r vérifiant :

$$r=\varphi(T_{[r]}(B)).$$

En conséquence, r est algébrique car ce système est propre, T n'abaissant pas le degré des monômes.

2. Considérons le système :

$$\xi_i=\sum_{m=j+1}^{n}\sum_{p=0}^{\lim}r^p.T^p(p_{i_m})+\sum_{m=1}^{j}\xi_{i_m}.p_{i_m}+\sum_{m=1}^{j}\sum_{p=1}^{\lim}r^p.\xi'_{i_m}.T^p(p_{i_m}),$$

$$\xi'_i=\sum_{m=j+1}^{n}\sum_{p=0}^{\lim}r^p.\varphi(T^p(p_{i_m}))+\sum_{m=1}^{j}\xi'_{i_m}.\varphi(p_{i_m})+\sum_{m=1}^{j}\sum_{p=1}^{\lim}r^p.\xi'_{i_m}.\varphi(T^p(p_{i_m})),$$

$1\leqq i\leqq k$,

la série r étant par hypothèse algébrique, on adjoint à ce système, après l'avoir correctement développé suivant (c_1) et (c_2), celui dont r est solution et ceux donnant les séries $\varphi(x_i)$ et $T(x_i)$ pour $1\leqq i\leqq r$.

Nous obtenons alors un système d'équations propre car T n'abaisse pas le degré des monômes et $T_{[r]}(B)$ est composante ξ_1 de la solution de ce système et de ce fait est algébrique. ■

Grâce à cette propriété, nous pouvons énoncer le théorème suivant de résolution de l'équation $\xi = A + B . T(\xi)$.

THÉORÈME 3.2 : *Soit l'équation* $\xi = A + B . T(\xi)$ *sur* $K \langle\langle x_1, \ldots, x_n \rangle\rangle$ *où* T *est une* φ*-dérivation vérifiant* (c_3) *et* (c_4). *Alors :*

– *cette équation admet une* solution unique;

– *la solution est* $\xi = A + B . (1 - TT_{[r]}(B))^{-1} . TT_{[r]}(A)$ *où* r *est solution de l'équation* $r = \varphi(T_{[r]}(B))$.

De plus, si les séries $\varphi(x_i)$ *et* $T(x_i)$, $1 \leqq i \leqq n$, *sont algébriques et* les séries A et B rationnelles :

la solution est algébrique.

Preuve : La preuve de l'unicité résulte de la remarque sur l'unicité dans le cas de deux variables x et y;

– l'existence de r vérifiant $r = \varphi(T_{[r]}(B))$ peut se démontrer de la même manière que pour le théorème 3.1;

– le choix de la série r vérifiant $r = \varphi(T_{[r]}(B))$ explique que la solution de l'équation a exactement la même forme que dans le cas à deux variables;

– B étant supposée rationnelle, $T_{[r]}$ est alors une transduction algébrique et la solution est alors algébrique si A est rationnelle car T est une tranduction algébrico-rationnelle.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. BERSTEL *et al.*, *Séries formelles en variables commutatives et non commutatives*, Cinquième école de Printemps d'Information théorique, 1976, L.I.P.T. 1978.
2. L. CHOTTIN, *Langages algébriques et systèmes de réécriture rationnels*, A.A.I. Université Bordeaux-I, n° 8016 1980.
3. L. CHOTTIN, *Étude syntaxique de certains langages solutions d'équations avec opérateurs*, Theor. Comp. Sc., vol. 5, 1977, p. 51-84.
4. R. CORI et J. RICHARD, *Énumération des graphes planaires à l'aide des séries formelles en variables non commutatives*, Discrete Mathematics, vol. 2, 1972.
5. R. CORI, *Un code pour les graphes planaires et ses applications*, Astérisque, vol. 27, 1975.
6. M. FLIESS, *Transductions algébriques*, R.I.R.O., Analyse numérique, 1970, p. 109-125.

7. M. FLIESS, *Séries reconnaissables, rationnelles et algébriques*, Bull. Sc. Math., vol. 94, 1970, p. 231-239.
8. G. HOTZ, *Eine neue Invariante k. f. Sprachen*, Zur veröffentlichung eingereicht, 1978, p. 1-12.
9. F. KIERSZENBAUM, *Les langages à opérateur d'insertion*, Thèse de 3e cycle, Université Bordeaux-I, 1979.
10. J. RICHARD, *Sur un type d'équations liées à certains problèmes combinatoires*, C.R. Acad. Sc., Paris, t. 272, 1971, p. 203-206.
11. A. SALOMAA et M. SOITTOLA, *Automata-Theoretic Aspects of Formal Power Series*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.