

E. LILIN

## **Transducteurs finis d'arbres et tests d'égalité**

*RAIRO. Informatique théorique*, tome 15, n° 3 (1981), p. 213-232

[http://www.numdam.org/item?id=ITA\\_1981\\_\\_15\\_3\\_213\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ITA_1981__15_3_213_0)

© AFCET, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## TRANSDUCTEURS FINIS D'ARBRES ET TESTS D'ÉGALITÉ (\*)

par E. LILIN (1)

Communiqué par M. NIVAT

---

*Résumé. — L'égalité de deux ou plusieurs arbres ne peut être vérifiée par un transducteur d'états finis classique. Nous généralisons donc les transducteurs d'états finis en introduisant des états munis d'une arité. Nous montrons que dans le cas linéaire ces transducteurs admettent une caractérisation en termes de bimorphismes. Nous étudions les propriétés de clôture par composition et comparons les différentes classes introduites.*

*Abstract. — The equality of two or more trees can't be verified by a classical finite state tree transducer. In this aim we generalize the finite state tree transducers and we introduce the S-transducers whose states have an arity. We shall show that the linear transducers will be characterized in terms of bimorphisms. We give also some properties of composition closure and compare the different classes introduced.*

### INTRODUCTION

L'étude des forêts, ou langages d'arbres, qui généralise celle des langages, se développe considérablement depuis quelques années, poussée en cela par de nombreuses motivations (linguistique, compilation, schémas de programmes...). Doner [8], Pair et Quéré [14], Thatcher [17] généralisent ainsi les automates d'états finis des langages aux forêts.

Les transducteurs sont apparus dès lors qu'il s'agissait de transformer des compositions d'opérateurs (traduction et génération de langages naturels et artificiels, transformation de programme, compilation-syntax directed translators [1]). Les transducteurs peuvent alors être vus comme un modèle pour l'étude de telles transformations.

Baker [5], Rounds [15], Thatcher [18] et Engelfriet [9] définissent les transducteurs en ajoutant une sortie aux automates. Ces transducteurs ne

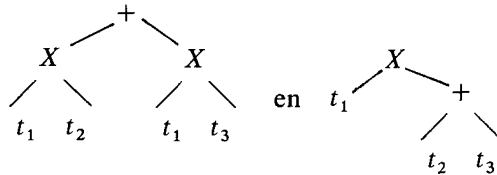
---

(\*) Reçu novembre 1979.

(1) Université de Lille-I, U.E.R. I.E.E.A. Informatique, 59655 Villeneuve-d'Ascq, France.

peuvent par exemple pas tester l'égalité de deux arbres. Pour cela nous introduisons une généralisation raisonnable de ces transducteurs.

Par exemple, si nous voulons exprimer en termes de transformation d'arbres la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, nous devons réaliser la transformation de l'arbre :



où  $t_1, t_2, t_3$  sont des arbres quelconques. Il est nécessaire de vérifier l'égalité des deux occurrences de  $t_1$ , ce qui contrairement aux transducteurs habituels, est assuré simplement par nos transducteurs.

L'intérêt qu'il y a à décrire des transformations complexes comme composées de transformations simples, et réciproquement à caractériser et construire effectivement des compositions de transformations données, nous amène à une étude détaillée des propriétés de composition et décomposition de nos transducteurs.

Un transducteur d'arbre classique lit une seule fois chaque nœud de l'arbre (de manière ascendante ou descendante) et engendre simultanément en sortie un autre arbre. A chaque lecture d'un nœud de l'arbre il se trouve dans un état  $q$  donné. Nous appellerons transduction la transformation réalisée par un transducteur.

Baker [5], Rounds [15] et Engelfriet [9] ont étudié les propriétés de tels transducteurs qui réalisent des transformations incomparables selon que l'arbre en entrée est lu de manière descendante ou ascendante. En effet un transducteur ascendant peut reconnaître puis abandonner un sous-arbre, tandis qu'un transducteur descendant peut réaliser des copies différentes d'un même sous-arbre. Les classes de transductions ne sont pas en général fermées par composition; seules les sous-classes des transductions associées aux transducteurs ascendants linéaires (on s'interdit de réaliser des copies de sous-arbres) ou déterministes sont fermées par composition. Des hiérarchies infinies sont montrées [11]. Comme le transducteur, se trouvant dans un état  $q$ , ne lit qu'un nœud de l'arbre à la fois, il ne peut vérifier l'égalité de deux ou plusieurs sous-arbres.

Dans cette optique, en remarquant que la notion d'arbre est apparue en généralisant le nombre de successeurs de chaque lettre de l'alphabet, nous

développons une généralisation des transducteurs d'états finis d'arbres, en définissant des états munis d'une arité et d'une co-arité, ce qui nous permet par exemple d'explorer en parallèle deux sous-arbres et d'en vérifier l'égalité.

Nous montrons que dans le cas linéaire, ces nouvelles classes de transducteurs se caractérisent en termes de bimorphismes comme c'est le cas pour les transducteurs d'états finis de langages (Nivat [13]); la transduction est un triplet  $(\varphi, K, \psi)$  où  $\varphi$  et  $\psi$  sont des  $k$  et  $k'$ -morphisms linéaires et  $K$  une forêt reconnaissable. Nous en déduisons que les forêts obtenues par transduction ascendante et descendante sont exactement les mêmes. Notons que Dauchet dans [7] a développé une étude systématique de tels bimorphismes qui sont un bon cadre théorique pour étudier les propriétés générales. Cependant lorsqu'on désire les implémenter il est plus simple d'adopter le point de vue des transducteurs.

Ces transducteurs linéaires ne sont cependant pas fermés par composition. Nous définissons quelques sous-classes intéressantes de transducteurs en imposant que l'arité ou la co-arité des états soit un. Ces sous-classes, dans le cas linéaire se caractérisent en termes de bimorphismes et sont fermées par composition. La composition est souvent non triviale, c'est-à-dire que le transducteur composé ne s'obtient pas en composant règle par règle. Par contre, les transductions ascendantes et descendantes ne sont plus les mêmes.

Dans la section 1, nous rappelons les définitions classiques d'alphabet gradué, d'arbre et de morphisme de magmoïde.

Dans la section 2, nous définissons les  $\overline{\overline{S}}$ -transducteurs dont les états sont munis d'une arité et d'une co-arité. Nous présentons quelques exemples concrets qui nous donnent une bonne intuition du fonctionnement des  $\overline{\overline{S}}$ -transducteurs.

Dans la section 3, nous caractérisons ces classes, dans le cas linéaire, en termes de bimorphismes. Nous montrons qu'elles ne sont pas fermées par composition, ce qui nous amène à introduire deux sous-classes fermées par composition et se caractérisant toujours en termes de bimorphismes.

Dans la section 4 nous comparons les différentes classes introduites avec les transducteurs classiques et les transducteurs avec « Look-Ahead » ( $T^R$ -FST) introduits par Engelfried [10]. Nous remarquons notamment que  $\overline{\overline{S}}$ TD contient strictement  $T^R$ -FST.

## 1. PRÉLIMINAIRES

Nous supposons que le lecteur est familiarisé avec les notions classiques de la théorie des langages d'arbres étudiés notamment par Brainerd [6]. Doner [8],

Rounds [16], Thatcher [18]. Nous utilisons le formalisme du magmoïde, nouvelle structure algébrique, introduite par Arnold et Dauchet [2, 3, 7], qui permet de prendre en compte les opérations sur les arbres et les forêts. Rappelons brièvement quelques définitions.

Un alphabet gradué est la donnée d'un couple  $(\Sigma, d)$  où  $\Sigma$  est un ensemble fini et  $d$  une application de  $\Sigma$  dans  $\mathbb{N}$ . L'application  $d$  définit l'arité ou le degré de chaque symbole de  $\Sigma$ . Nous posons  $\Sigma_i = d^{-1}(i)$  pour tout  $i$ .

Considérons un ensemble  $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  de variables. Nous définissons l'ensemble  $T(\Sigma)^1$  des arbres indexés sur  $\Sigma$  comme étant le plus petit ensemble tel que :

- $\Sigma_0 \cup X \subset T(\Sigma)^1$ ;
- $\forall a \in \Sigma_n, \forall t_1, \dots, t_n \in T(\Sigma)^1$  alors  $a(t_1, \dots, t_n) \in T(\Sigma)^1$ .

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $T(\Sigma)^p$  désignera l'ensemble des suites ordonnées de  $p$  arbres de  $T(\Sigma)^1$ . Pour tout  $q \in \mathbb{N}$ ,  $T(\Sigma)_q^p$  désignera l'ensemble des  $\langle q, t \rangle$  où  $t \in T(\Sigma)^p$  et où toutes les occurrences des variables appartiennent à  $X_q = \{x_1, \dots, x_q\}$ .

Lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté nous désignerons par  $t$  les éléments de  $T(\Sigma)_q^p$ .

Notons  $\tilde{T}(\Sigma)_q^p$  l'ensemble des éléments de  $T(\Sigma)_q^p$  dont la suite des occurrences des variables, lue de gauche à droite, est  $(x_1, \dots, x_q)$ .

On pose :

$$T(\Sigma) = \bigcup_{p, q \in \mathbb{N}} T(\Sigma)_q^p \quad \text{et} \quad \tilde{T}(\Sigma) = \bigcup_{p, q \in \mathbb{N}} \tilde{T}(\Sigma)_q^p.$$

Remarquons que tout  $a \in \Sigma_i$  s'écrira  $a(x_1, \dots, x_i) \in \tilde{T}(\Sigma)_i^1$ .

$T(\Sigma)_q^p$  est encore appelée une fibre de  $T(\Sigma)$ .

Notons, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $[p] = \{1, \dots, p\}$ .

Nous désignons par  $\Theta_q^p$  l'ensemble des applications de  $[p]$  dans  $[q]$ .

Posons  $\Theta = \bigcup_{p, q \in \mathbb{N}} \Theta_q^p$ . Nous appelons  $\Theta$  l'ensemble des torsions. Nous identifierons  $\theta \in \Theta_q^p$  à  $\langle q, x_{\theta(1)}, \dots, x_{\theta(p)} \rangle$ .

Notons  $\text{Id}_n$  l'élément  $\langle n, x_1, \dots, x_n \rangle, \forall n \in \mathbb{N}$ .

L'opération binaire de composition sur des  $n$ -uples d'arbres est défini comme suit : soit  $t \in T(\Sigma)_q^p$  et  $u = \langle r, u_1, \dots, u_q \rangle \in T(\Sigma)_r^q$ . Le composé  $t.u \in T(\Sigma)_r^p$  de  $t$  par  $u$  est obtenu en substituant dans  $t u_i$  à chaque occurrence  $x_i$ , pour tout  $i \in [q]$ .

L'opération produit tensoriel, noté  $t_1 \otimes t_2$ , consiste à juxtaposer les séquences finies d'arbres en translatant les indices des variables figurant dans le deuxième opérande, d'un entier déterminé par le premier opérande. Par exemple le produit

tensoriel entre les arbres  $t_1(x_1, x_2, x_3) \in T(\Sigma)_3^1$  et  $t_2(x_2, x_1) \in T(\Sigma)_2^1$  est le 2-uple d'arbres  $\langle t_1(x_1, x_2, x_3), t_2(x_2, x_1) \rangle \in T(\Sigma)_5^2$ .

Soit  $t$  un arbre de  $T(\Sigma)_n^1$ , on appelle *nœud* de  $t$  toute occurrence dans  $t$  d'un symbole.

Pour tout arbre  $t \in T(\Sigma)_n^1$  nous pouvons définir un ordre partiel entre ses nœuds que nous noterons  $<_t$  :

–  $a R_t b$  si et seulement si  $t$  se met sous la forme :

$$t = t_1 \cdot (t'_1 \otimes a \cdot (t'_2 \otimes b \cdot t'_3 \otimes t'_4) \otimes t'_5)$$

où :

$$a \in \Sigma_m, \quad b \in \Sigma_n, \quad t_1 \in T(\Sigma)_p^1, \quad t'_i \in T(\Sigma) \quad \text{pour } i \in [5];$$

–  $<$  est la clôture transitive de  $R_t$ .

L'ensemble des nœuds de  $t$  muni de la relation  $<_t$  est un inf demi-treillis.

L'élément minimal est le *sommet* de  $t$ . Si  $a R_t b$ , alors  $a$  est prédécesseur immédiat de  $b$  et  $b$  est successeur immédiat de  $a$ . Les *branches* de  $t$  sont les suites  $(a) = (a_1, \dots, a_n)$  telles que pour tout  $i \in [n-1]$   $a_{i+1}$  soit successeur immédiat de  $a_i$ ,  $a_1$  est minimal et  $a_n$  est maximal. La *longueur* de la branche  $(a)$  est égale à  $p-1$  si  $a_p$  est une variable, à  $p$  sinon. La *profondeur* de  $t$ , notée  $\text{prof}(t)$ , est la borne supérieure des longueurs des branches de  $t$ .

Un morphisme  $\varphi$  de  $T(\Sigma)$  dans  $T(\Delta)$  est défini par une application de  $\Sigma$  dans  $T(\Delta)$  telle que, pour tout  $i$ ,  $\varphi(\Sigma_i) \subset T(\Delta)_i^1$ .  $\varphi$  est étendu à  $T(\Sigma)$  par :

- $\varphi$  est l'identité sur  $\Theta$ ;
- $\varphi(t \cdot u) = \varphi(t) \cdot \varphi(u)$ ;  $\varphi(t \otimes u) = \varphi(t) \otimes \varphi(u)$ .

Cette définition est une extension de la notion classique; elles coïncident sur  $T(\Sigma)_0^1$ .

Pour pouvoir traiter des problèmes de la théorie classique des arbres Arnold et Dauchet ont introduit une généralisation des morphismes de magmoïde : les *k-morphismes* de magmoïde [2, 3, 7]. Ce sont des morphismes qui à un arbre font correspondre un  $k$ -uple d'arbre, donc au lieu de conserver la fibration du magmoïde, la  $k$ -dilatent ( $\varphi(T(\Sigma)_q^p) \subset T(\Delta)_{kq}^{kp}$ ); chaque variable est « éclatée » en  $k$ -variables. Notons que les 1-morphismes sont les morphismes définis ci-dessus.

Nous dirons qu'un  $k$ -morphisme  $\varphi$  de  $T(\Sigma)$  dans  $T(\Delta)$  est *linéaire* si pour tout  $a \in \Sigma$ ,  $\varphi(a) = \tilde{r} \cdot \theta$  où  $\tilde{r} \in \tilde{T}(\Delta)$  et  $\theta$  est une application injective.

Une forêt  $F$  sur l'alphabet gradué  $\Sigma$  est une partie de  $T(\Sigma)_0^1$ .  $F$  est reconnaissable si elle est reconnue par un automate d'états finis d'arbres [6]. On montre que la classe des forêts reconnaissables, notée  $\text{Rec}$ , est close par union, intersection, morphisme linéaire et morphisme inverse [16].

$F$  est une forêt de la classe *Rat lin* si  $F$  est la première projection par un  $k$ -morphisme linéaire d'une forêt reconnaissable ( $\varphi(F) = \{ \varphi(t) \mid t \in F \}$ ). Cette classe, introduite par Arnold [2], est fermée par 1-morphisme linéaire inverse, intersection avec une forêt reconnaissable et  $k$ -morphisme linéaire. Il est clair que  $\text{Rec} \not\subseteq \text{Rat lin}$ .

## 2. DÉFINITIONS ET EXEMPLES

**DÉFINITION :** Un ensemble d'états gradués est la donnée d'un triplet  $(Q, d_{\text{sup}}, d_{\text{inf}})$  où  $Q$  est un ensemble fini,  $d_{\text{sup}}$  et  $d_{\text{inf}}$  des applications de  $Q$  dans  $\mathbb{N}$ ;  $d_{\text{sup}}$  et  $d_{\text{inf}}$  définissent les arités supérieures et inférieures de chaque état de  $Q$ . Nous noterons ce triplet  $Q$ .

**DÉFINITION :** Un  $\bar{S}$ -transducteur descendant (noté  $\bar{std}$ ) est un 5-uple  $\langle Q, \Sigma, \Delta, \mathcal{R}, P \rangle$  où :

- $Q$  est un ensemble d'états gradués;
- $\Sigma$  et  $\Delta$  sont des alphabets gradués finis;
- $P$  est l'ensemble des états initiaux: de plus  $\forall q \in P, d_{\text{sup}}(q) = d_{\text{inf}}(q) = 1$ ;
- $\mathcal{R}$  est un ensemble fini de règles de la forme :

$$\langle q.(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \rangle \rightarrow \tilde{u}.\theta.(q_1 \otimes \dots \otimes q_m).\theta'$$

avec :

- $q \in Q, d_{\text{sup}}(q) = n_1, d_{\text{inf}}(q) = n$ ;
- $a_i \in \Sigma \cup \{ \text{Id}_1 \}$  pour  $i \in [n]$ ;
- $\tilde{u} \in \tilde{T}(\Delta)_{n_2}^{n_1}$ ;
- $\theta$  est une bijection de  $\Theta_{n_2}^{n_1}, n_2 = \sum_{i=1}^m d_{\text{sup}}(q_i)$ ;
- $q_i \in Q$  pour  $i \in [m]$ ;
- $\theta' \in \Theta_{n_4}^{n_3}, n_3 = \sum_{i=1}^m d_{\text{inf}}(q_i), n_4 = \sum_{i=1}^n d(a_i)$ .

**DÉFINITION :** Nous dirons que l'arbre  $t$  se dérive immédiatement en un arbre  $t'$  par le  $\bar{std}$   $T$  (que nous notons  $t \Rightarrow_T t'$ ) si et seulement si :

1°  $t = \hat{u} . \theta . w . \hat{v}$  où :

- $\hat{u} \in \tilde{T}(\Delta)_s^1$ ;
  - $\theta$  est une bijection de  $\Theta_s^s$ ;
  - $w = q_1 \otimes \dots \otimes q_p \otimes \dots \otimes q_m$ ,  $q_i \in Q$  pour  $i \in [m]$ ;  $s = \sum_{i=1}^m d_{\text{sup}}(q_i)$ ;
  - $\hat{v} \in \tilde{T}(\Sigma)_0^{n_3}$ ,  $\tilde{v} = (\text{Id}_{n_1} \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes \text{Id}_{n_2}) . \tilde{v}_1$ ,
- $$n_1 = \sum_{i=1}^{p-1} d_{\text{inf}}(q_i), \quad n_2 = \sum_{i=p+1}^m d_{\text{inf}}(q_i), \quad n_3 = n_1 + n_2 + n,$$
- $$a_i \in \Sigma \cup \{ \text{Id}_1 \} \quad \text{pour } i \in [n].$$

2° Il existe une règle de  $\mathcal{R}$  :

$$\langle q_p . (a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \rangle \rightarrow \hat{u}_1 . \theta_1 . (q'_1 \otimes \dots \otimes q'_m) . \theta'_1 .$$

3°  $t' = \hat{u}' . \theta' . w' . \hat{v}'$  où :

- $\hat{u}' . \theta' = \hat{u} . \theta . (\text{Id}_{m_1} \otimes \hat{u}_1 \otimes \text{Id}_{m_2}) . (\text{Id}_{m_1} \otimes \theta_1 \otimes \text{Id}_{m_2})$ ,
- $$m_1 = \sum_{i=1}^{p-1} d_{\text{sup}}(q_i), \quad m_2 = \sum_{i=p+1}^m d_{\text{sup}}(q_i);$$
- $w' = q_1 \otimes \dots \otimes q_{p-1} \otimes q'_1 \otimes \dots \otimes q'_m \otimes q_{p+1} \otimes \dots \otimes q_m$ ;
  - $\hat{v}' = (\text{Id}_{n_1} \otimes \theta'_1 \otimes \text{Id}_{n_2}) . \hat{v}_1$ .

Nous noterons par  $\xrightarrow[\tau]{*}$  la clôture transitive de la dérivation immédiate.

DEFINITION : Un  $\bar{S}$ -transducteur ascendant (noté  $\bar{s}ta$ ) est un 5-uple  $\langle Q, \Sigma, \Delta, \mathcal{R}, P \rangle$  où  $Q, \Sigma, \Delta$  sont les mêmes ensembles que ceux introduits dans la définition d'un  $\bar{s}td$ .  $P$  est l'ensemble des états finaux ( $d_{\text{sup}}(q) = d_{\text{inf}}(q) = 1, \forall q \in P$ ).  $\mathcal{R}$  est un ensemble fini de règles de la forme :

- $\langle (a_1 \otimes \dots \otimes a_n) . \theta . (q_1 \otimes \dots \otimes q_m) \rangle \rightarrow q . \tilde{u} . \theta'$  où :
- $a_i \in \Sigma \cup \{ \text{Id}_1 \}$  pour  $i \in [n]$ ;
- $\theta$  est une bijection de  $\Theta_{n_1}^{n_1}$ ;  $n_1 = \sum_{i=1}^n d(a_i) = \sum_{i=1}^m d_{\text{sup}}(q_i)$ ;
- $q_i \in Q$  pour  $i \in [m]$ ;
- $q \in Q, d_{\text{sup}}(q) = n, d_{\text{inf}}(q) = n_2$ ;
- $\tilde{u} \in \tilde{T}(\Delta)_{n_3}^{n_2}$ ;
- $\theta' \in \Theta_{n_4}^{n_3}, n_4 = \sum_{i=1}^m d_{\text{inf}}(q_i)$ .



DÉFINITION : Nous dirons que  $t$  se dérive immédiatement en  $t'$  par le  $\overline{s}$  ta si et seulement si :

1°  $t = \tilde{u} \cdot \theta \cdot w \cdot \tilde{v}$  où :

$$- \tilde{u} \in \tilde{T}(\Sigma)_m^1, \tilde{u} = \tilde{u}_1 \cdot (\tilde{u}'_1 \otimes \dots \otimes \tilde{u}'_n \otimes \text{Id}_{n_{n+1}}),$$

$$\tilde{u}'_i = \text{Id}_{n_i} \otimes a_i, a_i \in \Sigma \cup \{\text{Id}_1\} \quad \text{pour } i \in [n],$$

$$m = \sum_{i=1}^{n+1} n_i + \sum_{i=1}^n d(a_i);$$

-  $\theta$  est une bijection de  $\Theta_m^n$ ,  $\theta = \langle \theta_1, \theta'_1, \dots, \theta_n, \theta'_n, \theta_{n+1} \rangle$ ,

$$\theta_i \in \Theta_m^{n_i}, \quad \theta'_i \in \Theta_m^{d(a_i)} \quad \text{pour } i \in [n+1];$$

-  $w = (q_1 \otimes \dots \otimes q_{j_1} \otimes \dots \otimes q_{j_2} \otimes \dots \otimes q_{j_p} \otimes \dots \otimes q_p)$ ;

$$m = \sum_{i=1}^p d_{\text{sup}}(q_i);$$

-  $\tilde{v} = \tilde{v}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{v}'_p$ ,  $\tilde{v}_i \in \tilde{T}(\Delta)_{0^{\text{int}(q_i)}}^{d(a_i)}$  pour  $i \in [p]$ .

Nous supposons en outre que :

$$- \theta'_i(k) = \sum_{k'=1}^{j_i-1} d_{\text{sup}}(q_{k'}) + l', \quad l' \in [p], l' \leq d_{\text{sup}}(q_{j_i}) \quad \text{pour } i \in [n], k \in [d(a_i)];$$

$$- \sum_{i=1}^p d_{\text{sup}}(q_{j_i}) = \sum_{i=1}^n d(a_i) = s.$$

2° Il existe une règle de  $\mathcal{R}$  :

$$\langle (a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \cdot \theta'' \cdot (q_{j_1} \otimes \dots \otimes q_{j_p}) \rangle \rightarrow q \cdot v'' \cdot \theta''',$$

où  $\theta'' = \langle \theta''_1, \dots, \theta''_n \rangle$  et si  $\theta'_i(k) = \sum_{k'=1}^{j_i-1} d_{\text{sup}}(q_{k'}) + l'$  alors :

$$\theta''_i(k) = \sum_{k'=1}^{l-1} d_{\text{sup}}(q_{j_{k'}}) + l' \quad \text{pour } i \in [n], k \in [d(a_i)].$$

3°  $t' = u_1 \cdot \hat{\theta} \cdot w' \cdot v'$  où :

$$- \hat{\theta} = \langle \hat{\theta}_1, x_{m-s+1}, \hat{\theta}_2, x_{m-s+2}, \dots, \hat{\theta}_n, x_{m-s+n}, \hat{\theta}_{n+1} \rangle$$

$$\hat{\theta}_i \in \Theta_{m-s+n}^{n_i} \quad \text{pour } i \in [n+1]$$

et si :

$$\theta_i(k) = \sum_{k'=1}^{s'-1} d_{\text{sup}}(q_{k'}) + s''$$

avec  $s'' \leq d_{\text{sup}}(q_{s'})$ , alors  $\hat{\theta}_i(k) = \theta_i(k) - \left( \sum_{k'=1}^l d_{\text{sup}}(q_{k'}) \right)$ ,  $l$  étant le plus grand entier tel que  $j_i < s'$ ;

$$\begin{aligned}
 - w' &= q_1 \otimes \dots \otimes q_{j_i-1} \otimes q_{j_i+1} \otimes \dots \otimes q_{j_p-1} \otimes q_{j_p+1} \otimes \dots \otimes q_p \otimes q; \\
 - v' &= v_1 \otimes \dots \otimes v_{j_i-1} \otimes v_{j_i+1} \otimes \dots \otimes v_{j_p-1} \otimes v_{j_p+1} \otimes \dots \otimes v_p \\
 &\quad \otimes v'' \cdot \theta''' \cdot (v_{j_1} \otimes v_{j_2} \otimes \dots \otimes v_{j_p}).
 \end{aligned}$$

Remarquons que lorsque toutes les règles du  $\overline{\text{std}}$   $T$  (respectivement  $\overline{\text{sta}}$ ) sont telles que pour tout symbole  $a$  apparaissant en partie gauche,  $a \neq \text{Id}_1$ , et lorsque l'arité supérieure et inférieure de tout état  $q$  de  $T$  est égale à 1, alors nous retrouvons les définitions des transducteurs descendants (resp. ascendants) classiques [9]. En effet on peut toujours choisir un ordre des états  $q_1, \dots, q_m$  tel que la bijection soit l'application identité.

DÉFINITION : Nous dirons que  $T$  est un transducteur linéaire si, dans chaque règle de  $T$ , la torsion  $\theta'$  est injective;  $T$  est complet si la torsion  $\theta'$  est surjective;  $T$  est déterministe s'il n'existe pas deux règles de  $T$  ayant même partie gauche.

La transduction associée à  $T$  est la relation  $\hat{T}$  de  $\tilde{T}(\Sigma)_0^1 \times \tilde{T}(\Delta)_0^1$  définie par  $\{(t, u) | \exists q \in P \text{ tel que } q \cdot t \xrightarrow{*}_T u\}$  dans le cas descendant, et  $\{(t, u) | \exists q \in P \text{ tel que } t \xrightarrow{*}_T q \cdot u\}$  dans le cas ascendant.

Notation : Nous noterons par des lettres minuscules le type de transducteur (par exemple  $\overline{\text{std}}$ ,  $\overline{\text{sta}}$ ,  $\overline{\text{std lin}}$ ,  $\overline{\text{sta lin}}$ ), par des lettres majuscules la classe des transductions associées (par exemple  $\overline{\text{STD}}$ ,  $\overline{\text{STA}}$ ,  $\overline{\text{STD lin}}$ ,  $\overline{\text{STA lin}}$ ). Donc, si  $T$  est un  $\overline{\text{S}}$ -transducteur descendant,  $\hat{T} \in \overline{\text{STD}}$ .

Le domaine d'un transducteur  $T$  est l'ensemble noté :

$$\text{Dom}(T) = \{ t | \exists u \text{ tel que } (t, u) \in \hat{T} \};$$

son codomaine est  $\text{Codom}(T) = \{ u | \exists t \text{ tel que } (t, u) \in \hat{T} \}$ .

Donnons quelques exemples de  $\overline{\text{S}}$ -transducteur :

Exemple 1 : Soit le  $\overline{\text{std}}$  :  $T = \langle Q, \Sigma, \Delta, \mathcal{R}, P \rangle$  où  $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ ,

$$d_{\text{inf}}(q_0) = d_{\text{inf}}(q_1) = 1,$$

$$d_{\text{inf}}(q_2) = 2, \quad d_{\text{sup}}(q_i) = 1 \text{ pour } i = 0, 1, 2;$$

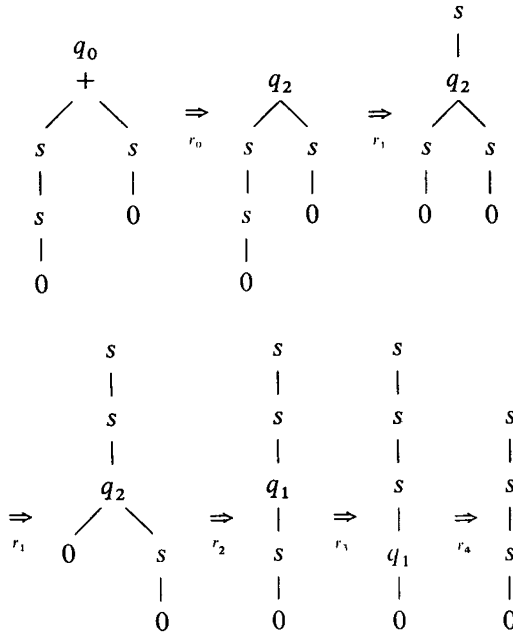
$$\Sigma = \Sigma_2 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_0, \quad \Sigma_2 = \{ + \}, \quad \Sigma_1 = \{ s \}, \quad \Sigma_0 = \{ 0 \};$$

$$\Delta = \Sigma_1 \cup \Sigma_0; \quad P = \{ q_0 \}; \quad \mathcal{R} = \{ r_0, r_1, r_2, r_3, r_4 \},$$

avec :

- $r_0 : \langle q_0. + \rangle \rightarrow \text{Id}_1.q_2;$
- $r_1 : \langle q_2.(s \otimes \text{Id}_1) \rangle \rightarrow s.q_2;$
- $r_2 : \langle q_2.(0 \otimes \text{Id}_1) \rangle \rightarrow \text{Id}_1.q_1;$
- $r_3 : \langle q_1.s \rangle \rightarrow s.q_1;$
- $r_4 : \langle q_1.0 \rangle \rightarrow 0.$

La transduction associée est  $\hat{T} = \{ (+.(s^n.0 \otimes s^m.0), s^{n+m}.0) \mid n, m \geq 0 \}$ . En effet, soit l'arbre  $t = +.(s^2.0 \otimes s.0)$ , nous aurons en notation arborescente les dérivations suivantes :



En interprétant  $s$  comme étant la fonction successeur, nous avons réalisé l'addition. Notons que  $T$  est linéaire complet déterministe.

*Exemple 2 :* Soient 2 nombres entiers  $A$  et  $B$  décomposés en facteurs premiers :

$$A = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n},$$

$$B = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}, \quad \alpha_i, \beta_i \geq 0 \text{ pour } i \in [n].$$

$A$  et  $B$  sont complètement déterminés par  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ ,  $i \in [n]$ .

Considérons le std  $T = \langle Q, \Sigma, \Sigma, \mathcal{R}, p \rangle$  où  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ ,

$$d_{\text{inf}}(q_0) = d_{\text{inf}}(q_3) = 1, \quad d_{\text{inf}}(q_1) = d_{\text{inf}}(q_2) = 2,$$

$$d_{\text{sup}}(q_i) = 1 \quad \text{pour } i = 0, 1, 2,$$

$$d_{\text{sup}}(q_3) = 0; \quad \Sigma = \Sigma_2 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_0,$$

$$\Sigma_2 = \{a, b\}, \quad \Sigma_1 = \{s\}, \quad \Sigma_0 = \{\#, 0\}; \quad P = \{q_0\};$$

$\mathcal{R} = \{r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\}$  avec :

$$r_0 : \langle q_0 \cdot a \rangle \rightarrow \text{Id}_1 \cdot q_1,$$

$$r_1 : \langle q_1 (b \otimes b) \rangle \rightarrow b \cdot (q_1 \otimes q_2) \cdot \langle 4, x_1, x_3, x_2, x_4 \rangle,$$

$$r_2 : \langle q_2 (s \otimes s) \rangle \rightarrow s \cdot q_2,$$

$$r_3 : \langle q_2 (s \otimes s) \rangle \rightarrow \text{Id}_1 \cdot q_2,$$

$$r_4 : \langle q_2 (0 \otimes s) \rangle \rightarrow 0 \cdot q_3,$$

$$r_5 : \langle q_2 (s \otimes 0) \rangle \rightarrow 0 \cdot q_3,$$

$$r_6 : \langle q_2 (0 \otimes 0) \rangle \rightarrow 0,$$

$$r_7 : \langle q_3 \cdot s \rangle \rightarrow \text{Id}_0 \cdot q_3,$$

$$r_8 : \langle q_3 \cdot 0 \rangle \rightarrow 0,$$

$$r_9 : \langle q_1 \cdot (\# \otimes \#) \rangle \rightarrow \#.$$

La transduction associée est :

$$\hat{T} = \{(a \cdot (t_1 \otimes t_2), t_3) \mid t_i = b \cdot (b \otimes u_{i,1}) \cdot (b \otimes u_{i,2}) \dots (b \otimes u_{i,n}) \cdot \#$$

$$\text{pour } i \in [3], n > 0,$$

$$u_{1,j} = s^{\alpha_j} \cdot 0, u_{2,j} = s^{\beta_j} \cdot 0, u_{3,j} = s^{\gamma_j} \cdot 0 \text{ pour } j \in [n]\}.$$

Remarquons que pour tout  $j \in [n]$   $\gamma_j \leq \inf(\alpha_j, \beta_j)$ . Le transducteur  $T$  détermine tous les diviseurs communs  $C = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \dots p_n^{\gamma_n}$  de  $A$  et  $B$ .

Notons que  $T$  est linéaire, non déterministe et complet (les règles  $r_7$  et  $r_8$  reconnaissent les sous-arbres abandonnés : nous avons pour cela introduit un état  $q_3$  d'arité supérieure nulle). Remarquons que  $C$  est le P.G.C.D. de  $A$  et  $B$  en considérant  $T$  sans la règle  $r_3$ .  $T$  devient alors déterministe.

**Exemple 3 :** En reprenant l'écriture des nombres de l'exemple 2, considérons le  $\text{std } T = \langle Q, \Sigma, \Sigma, \mathcal{R}, P \rangle$  où  $\Sigma$  est le même ensemble que dans l'exemple 2;  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$  avec :

$$\begin{aligned} d_{\text{inf}}(q_0) = d_{\text{inf}}(q_3) = 1, \quad d_{\text{inf}}(q_1) = d_{\text{inf}}(q_2) = 2, \\ d_{\text{inf}}(q_4) = d_{\text{inf}}(q_5) = 0, \\ d_{\text{sup}}(q_i) = 1 \text{ pour } i = 0, \dots, 5; \quad P = \{q_0\}; \end{aligned}$$

$\mathcal{R} = \{r_0, r_1, r_2, \dots, r_{13}\}$  avec :

$$\begin{aligned} r_0 : \langle q_0.a \rangle &\rightarrow \text{Id}_1.q_1, \\ r_1 : \langle q_1.(b \otimes b) \rangle &\rightarrow b.(q_1 \otimes q_2). \langle 4, x_1, x_3, x_2, x_4 \rangle, \\ r_2 : \langle q_2.(s \otimes s) \rangle &\rightarrow s.q_2, \\ r_3 : \langle q_2.(\text{Id}_1 \otimes \text{Id}_1) \rangle &\rightarrow s.q_2, \\ r_4 : \langle q_2.(0 \otimes s) \rangle &\rightarrow s.q_3, \\ r_5 : \langle q_2.(s \otimes 0) \rangle &\rightarrow s.q_3, \\ r_6 : \langle q_2.(0 \otimes 0) \rangle &\rightarrow 0, \\ r_7 : \langle q_3.s \rangle &\rightarrow s.q_3, \\ r_8 : \langle q_3.0 \rangle &\rightarrow 0, \\ r_9 : \langle q_1.(\# \otimes \#) \rangle &\rightarrow b.(q_4 \otimes q_5), \\ r_{10} : \langle q_4 \rangle &\rightarrow b.(q_4 \otimes q_5), \\ r_{11} : \langle q_4 \rangle &\rightarrow \#, \\ r_{12} : \langle q_5 \rangle &\rightarrow s.q_5, \\ r_{13} : \langle q_5 \rangle &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

La transduction associée est :

$$\begin{aligned} \hat{T} = \{ (a.(t_1 \otimes t_2), t_3) \mid t_i = b.(b \otimes u_{i,1}) (b \otimes u_{i,2}) \dots (b \otimes u_{i,n_i}). \# \text{ pour } i \in [3], \\ n_1 = n_2 > 0, n_3 \geq n_1, u_{1,j} = s^{\alpha_j}.0, u_{2,j} = s^{\beta_j}.0, \\ u_{3,j} = s^{\gamma_j}.0 \text{ pour } j \in [n_i], \gamma_j \geq \sup(\alpha_j, \beta_j) \}. \end{aligned}$$

$T$  détermine les multiples communs  $C = p_1^{\gamma_1}.p_2^{\gamma_2} \dots p_{n_3}^{\gamma_{n_3}}$  de  $A$  et  $B$ . Remarquons que  $C$  est le P.P.C.M. de  $A$  et  $B$  si nous supprimons les règles  $r_3, r_{10}$  et  $r_{12}$ ;  $T$  devient alors déterministe.

3. RÉSULTATS

Nous caractérisons dans cette section les  $\overline{\overline{S}}$ -transducteurs linéaires en termes de bimorphismes. Nous montrons auparavant que, lorsque nous généralisons les  $\overline{\overline{S}}$ -transducteurs en supposant pouvoir reconnaître un  $n$ -uple d'arbres (au lieu d'un  $n$ -uple de lettres) par chaque règle, les transductions associées restent les mêmes. C'est un résultat différent du cas classique : en effet les transducteurs classiques sont inclus strictement dans les transducteurs généralisés correspondants [7].

Les  $\overline{\overline{S}}$ -transducteurs linéaires ne sont pas clos par composition, ce qui nous amène à définir des sous-classes des  $\overline{\overline{S}}$ -transducteurs pour lesquelles nous avons des résultats similaires et qui sont fermées par composition.

**DÉFINITION :** Un  $\overline{\overline{S}}$ -transducteur descendant (respectivement ascendant) généralisé noté  $\overline{\overline{std}} \text{ gén}$ , est un 5-uple  $\langle Q, \Sigma, \Delta, \mathcal{R}, P \rangle$  où  $Q, \Sigma, \Delta$  et  $P$  sont les mêmes ensembles que ceux introduits dans la définition du  $\overline{\overline{std}} (sta)$ , et  $\mathcal{R}$  est un ensemble fini de règles de la forme :  $\langle q.(\tilde{t}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{t}_n) \rangle \rightarrow \tilde{u}.\theta.(q_1 \otimes \dots \otimes q_m).\theta'$  [respectivement  $\langle (t_1 \otimes \dots \otimes \tilde{t}_n).\theta.(q_1 \otimes \dots \otimes q_m) \rangle \rightarrow q.\tilde{u}.\theta'$ ] où  $\tilde{t}_i \in \overline{\overline{T}}(\Sigma)_{k_i}^1$  pour  $i \in [n]$ , les autres éléments sont les mêmes que ceux de la définition du  $\overline{\overline{std}} (sta)$ .

**PROPOSITION 3.1 :** Les classes  $\overline{\overline{STD}}$  et  $\overline{\overline{STD}} \text{ gén}$  (respectivement  $\overline{\overline{STA}}$  et  $\overline{\overline{STA}} \text{ gén}$ ) sont les mêmes. Les propriétés de linéarité et de complétude sont conservées.

*Preuve :* La construction du  $\overline{\overline{S}}$ -transducteur équivalent au  $\overline{\overline{S}}$ -transducteur généralisé se fait par récurrence sur la profondeur des arbres en partie gauche des règles. Elle est détaillée dans [12].

**DÉFINITION :** Un bimorphisme  $B$  est un triplet  $(\varphi, K, \psi)$  où  $\varphi$  (respectivement  $\psi$ ) est un  $k$ -morphisme (resp.  $k'$ -morphisme) et  $K$  une forêt. La relation  $\hat{B}$  associée au bimorphisme  $B$  est :

$$\hat{B} = \{ (\prod_k^1 . \varphi(t), \prod_{k'}^1 . \psi(t)) \mid t \in K \}.$$

**THÉORÈME 3.1 :** la classe  $\overline{\overline{STD}} \text{ lin}$  (resp.  $\overline{\overline{STA}} \text{ lin}$ ) est égale à l'ensemble  $\{ \hat{B} \mid B = (\varphi, K, \psi), \varphi$  (resp.  $\psi$ ) est un  $k$  (resp.  $k'$ ) morphisme linéaire,  $K \in \text{Rec} \}$ .

La preuve, détaillée en [12], est constructive. Donnons une idée de cette construction.

1° Soit  $T$  un  $\overline{\overline{std}}$  linéaire, construisons la forêt  $F$  et les  $k$ -morphisms  $\varphi$  et  $\psi$ . Dans les arbres de  $F$  nous indiquons la succession des règles utilisées lors d'une transduction. La forêt  $F$  est caractérisée par sa grammaire  $G$  : à chaque règle  $r_i$ ,

de  $T$  on associe une variable terminale  $\bar{r}_i$  et à chaque état  $q$  une variable non terminale  $\bar{q}$ ; les axiomes sont les états initiaux; les règles de  $G$  sont de la forme  $\bar{q} \rightarrow \bar{r}_i . (\bar{q}_1 \otimes \dots \otimes \bar{q}_m)$  où  $r_i : \langle q . (a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \rangle \rightarrow \tilde{u} . \theta . (q_1 \otimes \dots \otimes q_m) . \theta'$  est une règle de  $T$ .

Le  $k$ -morphisme  $\varphi$  doit engendrer sur ses  $n$  premières composantes

$$(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) : \varphi(\bar{r}_i) = (a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes \#) . \hat{\theta};$$

$$k = \sup \{ d_{\text{mf}}(q) \mid q \in Q \}.$$

Enfin  $\psi$  doit engendrer sur ses  $p$  premières composantes

$$\tilde{u} \in \tilde{T}(\Delta)^p : \psi(\bar{r}_i) = (\tilde{u} \otimes \#) . \hat{\theta}'.$$

2° Soit un bimorphisme  $B = (\varphi, F, \psi)$ , construisons  $T$  tel que la transduction associée soit la relation  $\hat{B}$ . A toute variable non terminale  $\bar{q}$  de la grammaire  $G$  de  $F$  on associe les états  $(\bar{q}, \alpha, \beta)$  où  $\alpha \in \mathcal{P}([k'])$  et  $\beta \in \mathcal{P}([k])$ ; les états initiaux sont les états où  $\bar{q}$  est un axiome et  $\alpha = \beta = \{1\}$ ; les règles de  $T$  sont de la forme :

$$\langle (\bar{q}, \alpha, \beta) . (t_{i_1} \otimes \dots \otimes t_{i_m}) \rangle$$

$$\rightarrow (\tilde{u}_{j_1} \otimes \dots \otimes u_{j_m}) . \hat{\theta} . ((\bar{q}_1, \alpha_1, \beta_1) \otimes \dots \otimes (\bar{q}_n, \alpha_n, \beta_n)) . \hat{\theta}'$$

sachant que  $\bar{q} \rightarrow \bar{r} . (\bar{q}_1 \otimes \dots \otimes \bar{q}_n)$  est une règle de  $G$ .  $\beta = \{i_1, \dots, i_m\}$ ,  $\alpha = \{j_1, \dots, j_m\}$ ,  $t_{i_l}$  est la  $i_l$ -ième composante de  $\varphi(\bar{r})$  pour  $i_l \in \beta$ , et  $\tilde{u}_{j_l}$  est la  $j_l$ -ième composante de  $\psi(\bar{r})$  pour  $j_l \in \alpha$ .

Nous en déduisons le corollaire :

**COROLLAIRE 3.1 :** *Les classes  $\overline{\overline{STD}}$  lin et  $\overline{\overline{STA}}$  lin sont les mêmes.*

**THÉORÈME 3.2 :** *Les classes  $\overline{\overline{STD}}$  lin et  $\overline{\overline{STA}}$  lin ne sont pas closes par composition.*

*Preuve :* Nous pouvons construire un sta linéaire  $T$  tel que :

$$\hat{T} = \{ (\alpha . a^n . b^p . \bar{a}, \beta . (a^n . \bar{a} \otimes b^p . \bar{a})) \mid n, p \geq 0 \};$$

est un  $\overline{\overline{sta}}$  linéaire  $T'$  tel que :

$$\hat{T}' = \{ (\beta . (a^n . \bar{a} \otimes b^p . \bar{a}), \alpha . a^p . b^n . \bar{a}) \mid n, p \geq 0 \}.$$

La transduction composée :

$$\widehat{T \circ T'} = \{ (\alpha . a^n . b^p . \bar{a}, \alpha . a^p . b^n . \bar{a}) \mid n, p \geq 0 \}.$$

Le  $\overline{\text{sta}}$  composé, s'il existait devrait permuter les contraintes  $n$  et  $p$ . Pour cela, il lui aurait fallu « mémoriser » dans ses états le sous-arbre  $b^p$  avec  $p$  quelconque, ce qui nous aurait amené à avoir un ensemble d'états non finis.

Pour obtenir une clôture par composition dans le cas linéaire, nous allons définir deux sous-classes des  $\overline{\overline{S}}$ -transducteurs.

1° La sous-classe des  $\overline{\overline{S}}$ -transducteurs dont tous les états sont tels que  $d_{\text{sup}}(q) = 1$ ; les transducteurs de cette classe seront des  $\overline{S}$ -transducteurs (en notation abrégée  $\text{std}$  dans le cas descendant et  $\text{sta}$  dans le cas ascendant).

Nous remarquons que les règles du  $\text{std}$  se réduisent à  $\langle q.(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \rangle \rightarrow \tilde{u}.(q_1 \otimes \dots \otimes q_m).\theta'$  : en effet on peut toujours ordonner les états  $q_1, \dots, q_m$  de façon que  $\theta$  soit l'application identité. De même les règles du  $\text{sta}$  se réduisent à :  $\langle a_1.(q_1 \otimes \dots \otimes q_m) \rangle \rightarrow q.\tilde{u}.\theta'$ .

2° La sous-classe des  $\overline{\overline{S}}$ -transducteurs dont tous les états sont tels que  $d_{\text{inf}}(q) = 1$ ; les transducteurs de cette classe seront des  $\overline{S}$ -transducteurs (notés  $\overline{\text{std}}$  et  $\overline{\text{sta}}$ ). Nous montrons dans [12] que :

PROPOSITION 3.2 : *Les classes  $\text{STD}$ ,  $\text{STA}$ ,  $\overline{\text{STD}}$ ,  $\overline{\text{STA}}$  sont respectivement identiques aux classes  $\text{STD gén}$ ,  $\text{STA gén}$ ,  $\overline{\text{STD gén}}$ ,  $\overline{\text{STA gén}}$ . Les propriétés de linéarité et de complétude sont conservées.*

THÉORÈME 3.3 : *Les transductions associées aux  $\overline{S}$ -transducteurs (resp.  $\overline{\overline{S}}$ -transducteurs) linéaires se caractérisent en termes de bimorphismes :*

$$\text{STD lin complet} = \{ \hat{B} \mid B = (\varphi, K, h), \varphi \text{ est un } k\text{-morphisme linéaire, } h \text{ un 1-morphisme linéaire complet, } K \in \text{Rec} \},$$

$$\text{STA lin} = \{ \hat{B} \mid B = (h, K, \varphi), h \text{ est un 1-morphisme linéaire, } \varphi \text{ un } k\text{-morphisme linéaire, } K \in \text{Rec} \},$$

$$\overline{\text{STD}} \text{ lin} = \{ \hat{B} \mid B = (h, K, \varphi), h \text{ est un 1-morphisme linéaire, } \varphi \text{ un } k\text{-morphisme linéaire, } K \in \text{Rec} \},$$

$$\overline{\text{STA}} \text{ lin} = \{ \hat{B} \mid B = (\varphi, K, h), \varphi \text{ est un } k\text{-morphisme linéaire, } h \text{ un 1-morphisme linéaire, } K \in \text{Rec} \},$$

La classe  $\text{STD lin}$  ne peut se caractériser en termes de bimorphismes; nous avons cependant :

THÉORÈME 3.4 :

$$\text{STD lin} \subseteq \{ \hat{B} \mid B = (\varphi, K, h), \varphi \text{ est un } k\text{-morphisme linéaire, } h \text{ un 1-morphisme linéaire, } K \in \text{Rec} \}.$$



L'inclusion dans l'autre sens est fautive. Pour s'en convaincre il suffit de se définir un 1-morphisme linéaire  $h$  qui abandonne un sous-arbre  $t$  arbitrairement large. Dans ces conditions un std linéaire ne peut pas reconnaître en parallèle ce sous-arbre abandonné : il faudrait introduire un nombre non borné d'états d'arité inférieure non bornée. Par contre, si  $t$  est non expansif (ou corégulier [3]) sa reconnaissance en parallèle est possible.

**COROLLAIRE 3.2 :** *Les classes  $STA$  lin et  $\overline{STD}$  lin sont les mêmes.*

**THÉORÈME 3.5 :** *Les classes  $STD$  lin complet,  $STA$  lin,  $\overline{STD}$  lin et  $\overline{STA}$  lin sont fermées par composition.*

Comme chacune de ces classes est caractérisée en termes de bimorphismes, nous pouvons utiliser les propriétés de composition des bimorphismes [7] pour montrer le résultat; ou encore faire la construction du transducteur composé ce qui a été fait dans [12].

La classe  $STD$  lin n'est pas fermée par composition parce que le premier transducteur peut reconnaître un sous-arbre abandonné par le second ce qu'un seul transducteur ne peut faire.

La condition de linéarité est nécessaire, en effet :

**THÉORÈME 3.6 :** *Les classes  $STD$ ,  $STA$ ,  $\overline{STD}$  et  $\overline{STA}$  ne sont pas fermées par composition.*

Cela est dû, comme dans le cas des transducteurs classiques, à l'alternance du non déterminisme et de la non-linéarité.

#### 4. COMPARAISON DES DIFFÉRENTS TRANSDUCTEURS

Nous étudions dans ce chapitre les différentes relations d'inclusions entre les classes de transducteurs de forêts que nous avons introduits dans les chapitres 2 et 3, les classes de transducteurs de forêts classiques (notés  $td$  et  $ta$ ) étudiés particulièrement par J. Engelfriet [9], et enfin des classes de transducteurs avec « Look-ahead » introduits par J. Engelfriet [10]. Précisons que, lorsque nous comparons des classes de transducteurs, nous comparons les classes des transductions associées.

Les classes de transducteurs ascendants et descendants non linéaires sont incomparables, à cause de l'alternance de la non-linéarité et du non-déterminisme. Par contre, dans le cas linéaire, les classes  $\overline{STA}$  lin et  $\overline{STD}$  lin sont les mêmes. ainsi que les classes  $\overline{STD}$  lin et  $STA$  lin. Nous retrouvons pour ces classes l'équivalence entre une transduction ascendante et une transduction

descendante, comme dans le cas des transducteurs d'états finis de langages où les transductions droite-gauche et gauche-droite sont identiques.

Enfin la classe  $T^R$ -FST des transducteurs avec « Look-ahead » est une sous-classe de la classe  $\overline{STD}$ . En effet un transducteur de la classe  $T^R$ -FST reconnaît l'arbre en entrée du sommet vers les feuilles et peut, tout au long de la reconnaissance, vérifier que les branches non encore parcourues appartiennent à un ensemble donné par chaque règle du transducteur. Donc, en particulier, un tel transducteur peut abandonner la reconnaissance d'un sous-arbre tout en vérifiant que ce sous-arbre soit un élément d'un ensemble donné. En utilisant les états d'arité supérieure nulle, un  $\overline{std}$  peut réaliser la même fonction.

PROPOSITION 4.1 : *La classe STD lin est incluse dans la classe  $\overline{STA}$  lin.*

Ce résultat se déduit immédiatement du théorème 3.3.

PROPOSITION 4.2 : *La classe TD (respectivement TA) n'est pas incluse dans la classe  $\overline{\overline{STA}}$  (resp.  $\overline{\overline{STD}}$ ).*

Pour montrer que  $TD \not\subseteq \overline{\overline{STA}}$  il suffit de prendre un transducteur descendant  $T$  tel que :

$$\hat{T} = \{ (a^n . c^m . \bar{c}, t . (t_1 \otimes \dots \otimes t_m)) \mid n, m \geq 0, t \in \tilde{T}(\{b\})_2^1, \text{prof}(t) = n, t_i = (c \text{ ou } d)^m . \bar{c} \text{ pour } i \in [2^m] \}.$$

Notons que  $d(b) = 2$ . Le  $\overline{\overline{sta}}$   $T'$ , s'il existait, devrait engendrer en sortie  $2^n$  sous-arbres différents de profondeur  $n$  ce qui nous aurait amené à définir des états d'arité inférieure non bornée.

De même, pour montrer que  $TA \not\subseteq \overline{\overline{STD}}$ , choisissons un transducteur ascendant  $T$  tel que :

$$\hat{T} = \{ (a^n . c^m . \bar{c}, t . (t_1 \otimes \dots \otimes t_1)) \mid n, m \geq 0, t \in \tilde{T}(\{b\})_2^1, \text{prof}(t) = n, t_1 = (c \text{ ou } d)^m . \bar{c} \}.$$

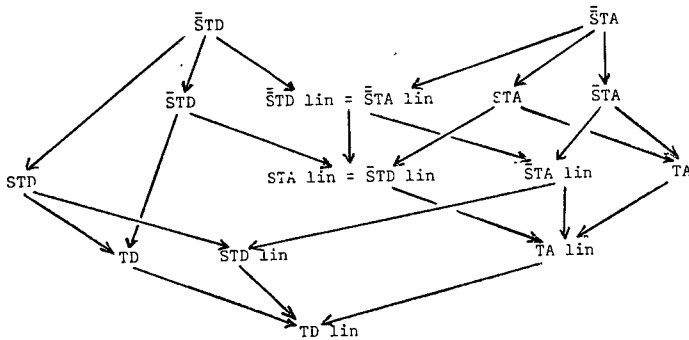
Le  $\overline{\overline{std}}$   $T'$  devrait posséder des états d'arité supérieure non bornée ce qui est en contradiction avec la définition.

PROPOSITION 4.3 : *Nous avons les non-inclusions suivantes :*

- $TA \text{ lin} \not\subseteq STD$ ;
- $STD \text{ lin} \not\subseteq STA$ ;
- $STA \text{ lin} \not\subseteq \overline{STA}$ ;
- $STD \text{ lin} \not\subseteq \overline{STD}$ .

Dans chaque cas, nous pouvons trouver un contre-exemple en utilisant les propriétés de non-linéarité, non-déterminisme et non-complétude qui déterminent des transformations différentes dans les cas descendant et ascendant.

En reprenant les résultats des chapitres III et IV, nous pouvons présenter sous forme de diagramme les relations d'inclusion stricte des différentes classes de transducteurs étudiés ( $A \rightarrow B$  signifie que  $B \not\subseteq A$ ). Nous n'avons pas d'inclusion supplémentaire.



Nous avons vu dans l'exemple 2 du chapitre II qu'un  $\bar{\bar{S}}TD$  peut abandonner un sous-arbre après l'avoir reconnu : il suffit d'introduire un état d'arité supérieure nulle; cette propriété subsiste pour la classe  $\bar{S}TD$ . C'est une propriété qu'ont aussi les transducteurs généralisés (*gfst*) introduits par Engelfriet [9]. Engelfriet a introduit une généralisation différente de la notre afin de regrouper les propriétés des transducteurs avec « Look-Ahead » étudiée dans [10]. Informellement un

Nous montrons dans [12] le résultat suivant :

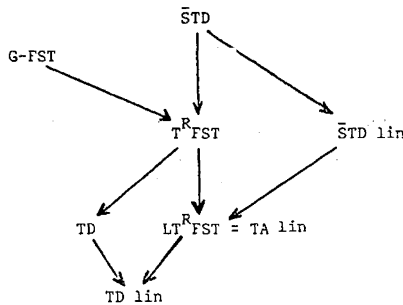
**PROPOSITION 4.4 :** *Les classes GFST et  $\bar{S}TD$  (resp.  $\bar{S}TD lin$ ) sont incomparables.*

Une sous-classe des transducteurs généralisés d'Engelfried est la classe  $T^R FST$  des transducteurs avec « Look-Ahead » étudiée dans [10]. Informellement un  $t^r fst$  est un transducteur descendant classique ayant la possibilité de vérifier des contraintes reconnaissables sur des arbres non recopiés. Les  $\bar{S}TD$  ont la même propriété (cf. l'exemple 2 du chapitre II) :

**PROPOSITION 4.5 :** *La classe  $T^R FST$  est incluse strictement dans la classe  $\bar{S}TD$ . La classe  $T^R FST$  linéaire ( $LT^R FST$ ) est incluse strictement dans la classe  $\bar{S}TD lin$ .*

COROLLAIRE 4.1 : Les classes  $T^R FST$  et  $\overline{STD}$  lin sont incomparables.

En résumé, nous présentons le diagramme des inclusions strictes et non-inclusions des classes de transducteurs avec « Look-Ahead » étudiées par Engelfriet avec les transducteurs que nous avons introduits. Nous n'avons pas d'autres inclusions.



Rappelons qu'Engelfriet a montré que  $LT^R FST = TA \text{ lin}$ , et  $TD \not\subseteq T^R FST$ .

BIBLIOGRAPHIE

1. A. V. AHO et J. D. ULLMAN, *Syntax Directed Translations and the Pushdown Assembler*, J. Comput. System Sc., vol. 3, 1969, p. 37-56.
2. A. ARNOLD, *Systèmes d'équations dans le magmaïde, ensembles rationnels et algébriques d'arbres*, Thèse d'État, Université de Lille (1977).
3. A. ARNOLD et M. DAUCHET, *Transductions de forêts reconnaissables monadiques. Forêts corégulières* R.A.I.R.O., vol. 10, 1976, p. 5-23.
4. A. ARNOLD et M. DAUCHET, *Théorie des magmaïdes*, R.A.I.R.O., vol. 12, p. 235-257 et R.A.I.R.O., vol. 13, p. 135-154.
5. B. BAKER, *Tree Transduction and Family of Tree Languages*, 5th A.C.M. proc. on Theory of Computing, 1973, p. 200-206.
6. W. S. BRAINERD, *Tree Generating Regular Systems*, Inf. and Control, vol. 14, 1969, p. 217-231.
7. M. DAUCHET, *Transductions de forêts. Bimorphismes de magmaïdes*, Thèse d'État, Université de Lille, 1977.
8. J. DONER, *Tree Acceptors and Some of Their Applications*, J. Comput. System Sc., vol. 4, 1970, p. 406-451.
9. J. ENGEFRIET, *Bottom up and Top-Down Tree Transformation, a Comparison*, Math. System Theory, vol. 9, 1975, p. 198-231.
10. J. ENGEFRIET, *Top-Down Tree Transducers with Regular Look-Ahead*, Math. System Theory, vol. 10, 1977, p. 289-303.
11. J. ENGEFRIET, *A Hierarchy of Tree Transducers*, Communication au 3<sup>e</sup> colloque de Lille sur « Les Arbres en Algèbre et Programmation », 1978.

12. E. LILIN, *Une généralisation des transducteurs d'états finis d'arbres : les S-transducteurs*, Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Université de Lille, 1978.
13. M. NIVAT, *Transduction des langages de Chomsky*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 10, 1968, p. 339-455.
14. C. PAIR et A. QUERE, *Définition et étude des bilangages réguliers*, Inf. and Control, vol. 13, 1968, p. 565-593.
15. W. C. ROUNDS, *Tree Transducers and Transformation*, Ph. D. Dissertation Stanford University, 1968.
16. W. C. ROUNDS, *Mapping and Grammars on Trees*, Math. System Theory, vol. 4, 1970, p. 257-287.
17. J. W. THATCHER, *Characterizing Derivation Trees of Context-Free Grammars Through a Generalization of Finite Automate Theory*, J. Comput. System Sc., vol. 1, 1967, p. 317-322.
18. J. W. THATCHER, *Generalized Sequential Machine Maps*, J. Comput. System Sc., vol. 4, 1970, p. 339-367.