

BRUNO COURCELLE

## **Arbres infinis et systèmes d'équations**

*RAIRO. Informatique théorique*, tome 13, n° 1 (1979), p. 31-48

<[http://www.numdam.org/item?id=ITA\\_1979\\_\\_13\\_1\\_31\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ITA_1979__13_1_31_0)>

© AFCET, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## ARBRES INFINIS ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS (\*)

par Bruno COURCELLE (1)

Communiqué par M. NIVAT

---

Résumé. — *On examine certains cas où la valeur d'un arbre infini (i. e. d'une expression infinie bien formée telle qu'une série entière) peut être définie comme l'unique solution d'un système (infini) d'équations. On en déduit une nouvelle caractérisation algébrique de l'ensemble des arbres infinis. On compare divers types de congruences sur l'ensemble des arbres infinis.*

### INTRODUCTION

Précisons tout d'abord de quel type d'arbres nous allons parler.

On se donne un ensemble  $F$  de symboles de fonction chacun muni d'une arité (i. e. nombre d'arguments). A toute expression bien formée sur cet ensemble correspond classiquement un arbre fini étiqueté par les éléments de  $F$ , tel que le nombre des descendants immédiats de tout nœud est l'arité de son étiquette. Nous allons considérer des arbres de même type mais *infinis*, qui correspondent intuitivement à des *expressions bien formées infinies*. Un exemple familier d'une telle expression est la série formelle

$$1 + z . z + z . z . z + \dots + z^n + \dots$$

écrite avec les symboles de fonction binaires  $.$  et  $+$ , la constante 1 et la variable  $z$  (1 et  $z$  sont d'arité 0).

La notion d'arbre infini s'introduit assez naturellement en théorie des schémas de programmes. Cousineau [5] représente par un arbre infini, l'ensemble des calculs d'un programme itératif. Rosen [14], Courcelle et Nivat [9, 10] associent un arbre infini  $T(\Sigma)$  à un schéma de programme récursif  $\Sigma$  en « exécutant symboliquement » tous les appels récursifs. Toutes les propriétés sémantiques de  $\Sigma$  sont alors contenues dans  $T(\Sigma)$ . On peut caractériser l'équivalence de deux schémas comme l'égalité des arbres infinis qui leur sont associés (Courcelle et Nivat [9]).

Notons  $M^\infty(F)$  l'ensemble des arbres infinis construits avec  $F$ . On peut le définir mathématiquement de plusieurs façons :

(1) comme *complétion au sens de la théorie des ensembles ordonnés* de l'ensemble des arbres finis muni d'un ordre convenable;

---

(\*) Reçu mars 1978, révisé septembre 1978.

(1) I.R.I.A., Domaine de Voluceau, Le Chesnay, France.

(2) comme *séparé-complété* (Bourbaki [4]) de l'ensemble des arbres finis muni d'une distance convenable (qui généralise la distance ultramétrique classique en théorie des séries formelles);

(3) « directement » comme ensemble des graphes infinis d'un certain type (voir § 1 ci-dessous).

On appelle *F-magma*  $A$  la donnée d'un ensemble  $|A|$  et pour chaque symbole  $k$ -aire  $f \in F$ , d'une fonction (totale)  $f_A : |A|^k \rightarrow |A|$ . Il est clair que tout arbre fini  $t$  (considéré comme une expression bien formée) a une valeur  $t_A$  dans  $A$ .

Il s'agit ici de pouvoir définir la valeur  $T_A$  d'un arbre infini. Dans le cas d'un schéma de programme  $\Sigma$ , et d'une *interprétation*  $A$  de  $\Sigma$  (i.e. un *F-magma*  $A$  muni d'un ordre partiel qui satisfait certaines propriétés) la valeur  $T(\Sigma)_A$  est la valeur calculée par  $\Sigma$  dans  $A$  c'est-à-dire par le programme  $(\Sigma, A)$ . Le lecteur consultera Courcelle et Nivat [9, 10] pour plus de détails sur les schémas de programme récursifs.

On peut définir la valeur  $T_A$  d'un arbre infini  $T$  dans un *F-magma*  $A$  en faisant sur  $A$  des hypothèses topologiques :

(i)  $A$  est un *F-magma* ordonné complet, i.e. une interprétation ([9, 10], ADJ [1]) et cette hypothèse correspond à la définition (1) des arbres infinis, ou bien

(ii)  $A$  est un *F-magma* métrique compact et à opérateurs contractants (Arnold et Nivat [2]) et cela correspond à la définition (2) ci-dessus.

En corollaire, on caractérise  $M^\infty(F)$  comme un objet initial dans les catégories respectives suivantes :

(i') la catégorie des *F-magmas* ordonnés complets;

(ii') la catégorie des *F-magmas* métriques compacts et contractants.

Cet article tente de répondre aux questions suivantes :

( $\alpha$ ) dans quelle mesure peut-on se passer des hypothèses topologiques sur  $A$  pour définir  $T_A$  ?

( $\beta$ ) de quelle catégorie  $M^\infty(F)$  est-il objet initial ?

L'idée directrice est la suivante. Si  $f$  est un symbole unaire, l'arbre  $T = f^\omega$  (constitué d'une unique branche infinie dont chaque nœud a l'étiquette  $f$ ) satisfait l'équation  $T = f(T)$ . Sa valeur  $T_A$  dans un *F-magma*  $A$  devra satisfaire l'équation  $T_A = f_A(T_A)$ . Il est clair que si l'équation  $x = f_A(x)$  a une unique solution  $x_0$  dans  $A$  alors on pourra poser  $T_A = x_0$ . Autrement,  $T$  sera dit sans valeur dans  $A$ .

Plus généralement, la valeur  $T_A$  d'un arbre infini  $T$  s'obtient (si elle existe) comme solution *unique* d'un système (éventuellement infini) d'équations associées canoniquement à  $T$ .

On considère dans cet article des systèmes d'équations de la forme  $x_i = f(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})$  où  $x_i, x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$  sont des variables et  $f$  est un opérateur d'arité  $k$ . Et l'on pose les définitions suivantes : un  $F$ -magma  $A$  est *algébriquement clos* (resp. *intègre*) si tout système d'équations, fini ou infini, a au moins (resp. au plus) une solution. Dans un  $F$ -magma  $A$  intègre et *algébriquement clos* (resp. *intègre*) si tout système d'équations, fini ou infini, a au moins (resp. au plus) une solution. Dans un  $F$ -magma  $A$  intègre et l'objet initial de la catégorie des  $F$ -magmas intègres et algébriquement clos. D'où une nouvelle question :

( $\gamma$ ) Que contient cette catégorie en dehors de  $M^\infty(F)$  ?

Elle contient les magmas métriques compacts pourvus d'opérateurs contractants, et les quotients de  $M^\infty(F)$  par des congruences *semi-fermées* (i. e. telles que chaque classe d'équivalence est fermée pour la distance sur  $M^\infty(F)$  évoquée plus haut et étudiée en détail dans [2]), et d'autres choses encore que nous ne savons pas décrire.

Par contre un  $F$ -magma de la forme  $M^\infty(F)/\equiv$  où  $\equiv$  est la congruence associée à une classe  $\mathcal{C}$  d'interprétations (Courcelle, Nivat [9, 10]) n'est pas intègre en général, même si  $\mathcal{C}$  est une classe équationnelle, donc de la forme sur laquelle nous savons dire le plus de choses (Courcelle [7]). Les propriétés de fermeture de ces congruences sont étudiées en appendice.

Beaucoup de preuves sans difficultés réelles sont laissées au lecteur.

Je remercie A. Arnold de ses critiques et de ses suggestions.

## 1. LE $F$ -MAGMA DES ARBRES INFINIS

(1.1) Soit  $F$  un ensemble fini ou infini de symboles avec *arité*. L'arité de  $f \in F$  est l'entier positif ou nul  $\rho(f)$ .

Un  $F$ -magma est un objet  $A = \langle |A|, \langle f_A \rangle_{f \in F} \rangle$  où  $|A|$  est un ensemble (le *domaine* de  $A$ ) et  $f_A$  un opérateur  $\rho(f)$ -aire sur  $|A|$  [si  $\rho(f) = 0$  alors  $f_A$  est un élément de  $|A|$ ]. Un *homomorphisme* de  $F$ -magmas  $h : A \rightarrow A'$  est une application  $h : |A| \rightarrow |A'|$  telle que  $h(f_A(d_1, \dots, d_k)) = f_{A'}(h(d_1), \dots, h(d_k))$  pour tout  $f \in F, d_1, \dots, d_k \in |A|$ , où  $k$  est l'arité de  $f$ .

Soit  $\mathbf{N}_+$  l'ensemble des entiers strictement positifs,  $\mathbf{N}_+^*$  le monoïde libre engendré (son unité, le mot vide se note  $\varepsilon$ ).

Un *arbre* est une fonction partielle  $T$  de  $\mathbf{N}_+^*$  dans  $F$  telle que :

(1)  $\text{Dom}(T) = \{u \in \mathbf{N}_+^* / T(u) \text{ est défini}\}$  est clos par préfixe i. e.  $u \in \text{Dom}(T)$  si  $uv \in \text{Dom}(T)$ ;

(2) pour tout  $u \in \text{Dom}(T)$  alors  $ui \in \text{Dom}(T)$  ssi  $1 \leq i \leq \rho(T(u))$ .

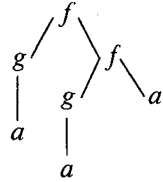
Un élément  $u$  de  $\text{Dom}(T)$  est un *nœud* de  $T$ . Le *sous-arbre* de  $T$  issu du *nœud*  $u$  est l'arbre  $T'$  tel que  $T'(v) = T(uv)$  pour tout  $v \in \mathbb{N}^*$ . On le note  $T/u$ .

Donnons quelques exemples.

Soit  $F = \{f, g, a\}$  avec  $\rho(f) = 2, \rho(g) = 1, \rho(a) = 0$ .

La fonction  $t : \{1, 2\}^* \rightarrow F$  telle que

$$\begin{aligned} t(\varepsilon) &= f, & t(21) &= g, \\ t(1) &= g, & t(211) &= a \\ t(11) &= a, & t(22) &= a \\ & & t(2) &= f. \end{aligned}$$



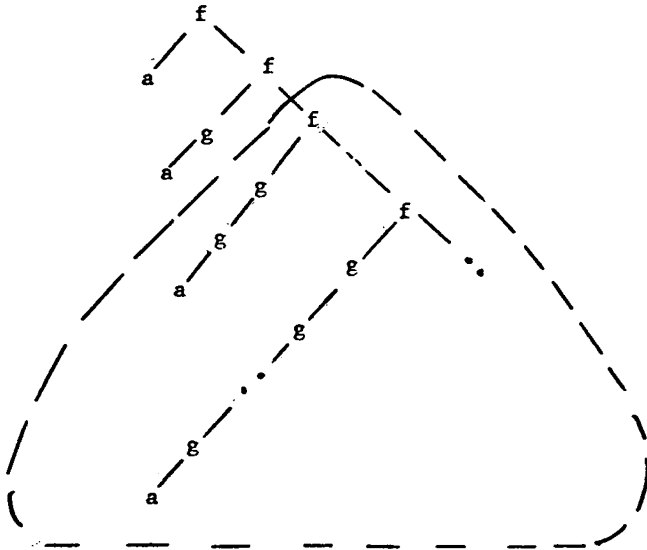
est un arbre que l'on représentera graphiquement ainsi :

Il correspond au terme  $fgafgaa$  écrit en notation polonaise préfixe (qui n'est pas ambiguë puisque les arités des symboles sont fixées).

La fonction  $T : \{1, 2\}^* \rightarrow F$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} T(2^n) = f, & n \geq 0, \\ T(2^n 1^m) = g & \text{si } 0 < m \leq n, \\ T(2^n 1^{n+1}) = a, & n \geq 0, \end{array} \right.$$

correspond à l'arbre infini représenté sur la figure. Le sous-arbre issu du nœud 22 est entouré par une ligne brisée. □



Si  $\rho(f) = 1$  pour tout  $f \in F$  alors  $M^\infty(F)$  s'identifie à  $F^\omega$ , l'ensemble des *mots infinis* sur  $F$ , c'est-à-dire des suites  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  telles que  $f_i \in F$  pour tout  $i$  (cf. [13]). Par exemple, le mot  $(fg)^\omega$  s'identifie à l'arbre  $T$  tel que  $T(1^n) = f$  si  $n$  est pair ou nul,  $T(1^n) = g$  si  $n$  est impair.

(1.2) On munit  $M^\infty(F)$  d'une structure de  $F$ -magma en définissant  $f_{M^\infty(F)}$  pour  $f \in F$  par :

- 1° si  $\rho(f) = 0$  alors  $f_{M^\infty(F)}$  est l'arbre  $T$  tel que  $T(\varepsilon) = f$  et  $T(u)$  indéfini si  $u \neq \varepsilon$ ;  
 2° si  $\rho(f) = k$  alors  $f_{M^\infty(F)}$  est la fonction  $k$ -aire sur  $M^\infty(F)$  telle que  $f_{M^\infty(F)}(T_1, \dots, T_k) = T$  avec :

$$\begin{cases} T(\varepsilon) = f, \\ T(iu) = T_i(u) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq k \text{ et } u \in \text{Dom}(T_i). \end{cases}$$

On omettra dorénavant l'indice  $M^\infty(F)$ .

Un arbre  $T$  est *fini* si  $\text{Dom}(T)$  est fini. Il s'identifie alors canoniquement à une expression (finie) bien formée écrite avec l'ensemble de symboles  $F$ . On la note en représentation polonaise préfixe.

On note  $M(F)$  l'ensemble des arbres finis. C'est un sous- $F$ -magma de  $M^\infty(F)$ , et même le  $F$ -magma libre : pour tout  $F$ -magma  $A$  il existe un unique homomorphisme  $M(F) \rightarrow A$  noté  $h_A$ . Si l'on considère  $t \in M(F)$  comme une expression bien formée, elle a dans  $A$  une valeur  $t_A = h_A(t)$ .

(1.3) On se pose le problème suivant : pour quels  $F$ -magmas  $A$  peut-on étendre de manière unique  $h_A$  en un homomorphisme :  $M^\infty(F) \rightarrow A$ ? En d'autres termes, quand peut-on attribuer à chaque  $T \in M^\infty(F)$  une valeur  $T_A$  dans  $|A|$  de telle sorte que  $T_A = f_A(T_{1_A}, \dots, T_{k_A})$  si  $T = f(T_1, \dots, T_k)$ ?

Si  $T = g^\omega$  [avec  $\rho(g) = 1$ , voir (1.1)] alors  $T = g(T)$  et la valeur  $T_A$  dans  $A$  devra satisfaire l'équation  $T_A = g_A(T_A)$ . Si l'équation  $x = g_A(x)$  a une seule solution dans  $A$ , alors  $T_A$  sera définie de manière unique comme la solution de cette équation.

Plus généralement, si  $T$  est un arbre infini arbitraire on introduit le système d'équations

$$x_{U_0} = f_A(x_{U_1}, \dots, x_{U_k}) \quad \text{si } U_0 = f(U_1, \dots, U_k)$$

où  $x_U$  est une variable associée à chaque sous-arbre  $U$  de  $T$ . Si ce système (éventuellement infini) a une et une seule solution dans  $A$ ,  $T$  aura dans  $A$  une valeur, à savoir la composante de la solution du système considéré associée à  $x_T$ .

(1.4) Donnons maintenant des définitions formelles. Soit  $X$  un ensemble de variables (d'arité 0),  $Y$  un ensemble de paramètres (d'arité 0); un système d'équations en  $X$  et  $Y$  est une application  $E : X \rightarrow M(F \cup X \cup Y)$  telle que pour tout  $x \in X$ ,  $E(x)$  est de l'une des trois formes suivantes :

- (1)  $E(x) = f$  où  $f \in F$  et  $\rho(f) = 0$ ;
- (2)  $E(x) = y$  où  $y \in Y$ ;
- (3)  $E(x) = fx_1 \dots x_k$  où  $f \in F$ ,  $\rho(f) = k \geq 1$ ,  $x_1, \dots, x_k \in X$ .

On en parlera aussi comme de l'ensemble des équations :  $\{x = E(x) / x \in X\}$ .

Étant donné un  $F$ -magma  $A$  et une application  $\varphi : Y \rightarrow |A|$ , une *solution* de  $E_{A,\varphi}$  (c'est-à-dire une solution de  $E$  dans  $A$  pour les valeurs des paramètres données par  $\varphi$ ) est une application  $\theta : X \rightarrow |A|$  telle que  $\theta(x) = f_A$  si  $E(x) = f$ ,  $\theta(x) = \varphi(y)$  si  $E(x) = y$  et  $\theta(x) = f_A(\theta(x_1), \dots, \theta(x_k))$  si  $E(x) = fx_1 \dots x_k$ . On la note aussi  $(\theta(x))_{x \in X}$ .

Donnons quelques définitions supplémentaires relatives aux systèmes.

Soit  $E : X \rightarrow M(F \cup X \cup Y)$  un système, soit  $X'$  une partie de  $X$  telle que  $E(x) \in M(F \cup X' \cup Y)$  pour tout  $x \in X'$ . On dit alors que la restriction  $E'$  de  $E$  à  $X'$  est un *sous-système* de  $E$ , ce qu'on note  $E' \subseteq E$ . Intuitivement,  $E'$  est une partie de l'ensemble des équations de  $E$  qui reste un système.

Deux systèmes  $E_1$  et  $E_2$  sont *compatibles* s'il existe un système  $E_3$  tel que  $E_1 \subseteq E_3$  et  $E_2 \subseteq E_3$ . On peut définir alors les deux sous-systèmes de  $E_3$ ,  $E_1 \cap E_2$  et  $E_1 \cup E_2$  en les ensembles de variables respectifs  $X_1 \cap X_2$  et  $X_1 \cup X_2$  (où  $X_i$  est l'ensemble des variables de  $E_i$ ). Soient enfin  $E_1$  et  $E_2$  (en les ensembles de variables  $X_1$  et  $X_2$ ) et  $\alpha : X_1 \rightarrow X_2$  une application. On dit que  $\alpha$  est un *homomorphisme de systèmes*, ce que l'on note  $\alpha : E_1 \rightarrow E_2$  si  $E_2(\alpha(x)) = \alpha(E_1(x))$  pour tout  $x \in X_1$ . A toute solution  $\theta : X_2 \rightarrow |A|$  de  $E_2$  on peut associer la solution  $\theta \circ \alpha : X_1 \rightarrow |A|$  de  $E_1$ .

Un  $F$ -magma  $A$  est *algébriquement clos* (resp. *intègre*) si tout système  $E_{A,\varphi}$  admet au moins (resp. au plus) une solution. (Dans un anneau intègre, l'équation  $x = ax + b$  admet au plus une solution; le terme algébriquement clos a été pris par analogie avec la théorie des corps.)

D'autre part, un  $F$ -magma  $A$  est *libre* si pour tous  $f, f' \in F$  d'arité  $k, l$ , tous  $d_1, \dots, d_k \in |A|$ ,  $f_A(d_1, \dots, d_k) = f'_A(d'_1, \dots, d'_l)$  si et seulement si  $f = f'$  (et  $k = l$ ,  $d_1 = d'_1, \dots, d_k = d'_k$ ).

(1.5) PROPOSITION :  $M^\infty(F)$  est libre, intègre et algébriquement clos.

Remarquons que notre définition des systèmes a exclu les équations de la forme  $x = x$  qui ont plusieurs solutions.

(1.6) PROPOSITION : Pour tout  $F$ -magma  $A$  intègre et algébriquement clos il existe un unique homomorphisme  $h_A : M^\infty(F) \rightarrow A$ .

*Preuve* : Montrons d'abord l'unicité de  $h_A$ . La famille  $(h_A(T))_{T \in M^\infty(F)}$  est solution, donc est l'unique solution du système d'équations  $E$  en l'ensemble de

variables  $X = \{x_T / T \in M^\infty(F)\}$  tel que  $E(x_T) = f(x_{T_1}, \dots, x_{T_k})$  pour tout  $T \in M^\infty(F)$  et  $T = f(T_1, \dots, T_k)$ . On appelle  $E$  le *système canonique*.

Réciproquement  $E_A$  a une solution  $(a_T)_{T \in M^\infty(F)}$  puisque  $A$  est algébriquement clos. On pose alors  $h_A(T) = a_T$ .  $\square$

Si  $A$  est intègre et algébriquement clos, on associe de manière analogue à tout  $T \in M^\infty(F \cup Y)$  (où  $Y$  est un ensemble de paramètres), une unique application  $T_A : |A|^Y \rightarrow |A|$  telle que  $y_A$  soit  $y$ -ième projection, i. e.  $y_A(\alpha) = \alpha(y)$  pour tout  $\alpha \in |A|^Y$  et telle que  $\alpha$  étant fixée dans  $|A|^Y$  l'application  $T \rightarrow T_A(\alpha)$  soit un homomorphisme de  $F$ -magmas.

Et d'autre part :

(1.7) PROPOSITION : *Tout  $F$ -magma  $A$  libre, unitaire et algébriquement clos est isomorphe à  $M^\infty(F, Y)$  pour quelque ensemble de paramètres  $Y$  dont la cardinalité est au plus celle de  $|A|$ .*

On a donc obtenu :

– une caractérisation « catégorique » de  $M^\infty(F)$ , comme un objet initial d'une catégorie [dont on montrera plus loin qu'elle ne se réduit pas à  $M^\infty(F)$  !, cf. (1.6)];

– une caractérisation « algébrique » des magmas  $M^\infty(F, Y)$  à un isomorphisme près.

(1.8) REMARQUE : Soit  $A$  un  $F$ -magma et  $\varphi$  une surjection  $Y \rightarrow |A|$ . S'il existe un homomorphisme de  $F$ -magmas  $\theta : M^\infty(F \cup Y) \rightarrow A$  qui étend  $\varphi$  alors  $A$  est algébriquement clos. Ainsi tout  $F$ -magma complet (cf. Courcelle, Nivat [9]) est algébriquement clos mais non nécessairement intègre [cf. prop. (3.9)].

## 2. QUELQUES SOUS-MAGMAS DE $M^\infty(F)$

(2.1) Pour tout  $T \in M^\infty(F)$  soit  $\mathcal{S}(T)$  l'ensemble de ses sous-arbres. Soit  $E(T)$  la restriction du système canonique  $E$  défini en (1.6) à  $X_T = \{x_U / U \in \mathcal{S}(T)\}$ .

On dit que  $T$  a une valeur dans  $A$  si  $E(T)$  a une et une seule solution dans  $A$ .

Soit  $M(T)$  le plus petit sous-magma de  $M^\infty(F)$  contenant  $\mathcal{S}(T)$ .

(2.2) PROPOSITION : *Un arbre  $T$  a une valeur dans  $A$  si et seulement si il existe un unique homomorphisme  $h : M(T) \rightarrow A$ .*

*Preuve* : Si  $T$  a une valeur dans  $A$ , la solution  $(a_U)_{U \in \mathcal{S}(T)}$  de  $E(T)$  définit  $h$  de manière unique sur  $\mathcal{S}(T)$  par  $h(U) = a_U$ , et donc de manière unique sur  $M(T)$ . Réciproquement, si  $h : M(T) \rightarrow A$  est un homomorphisme  $(h(U))_{U \in \mathcal{S}(T)}$  est une solution de  $E(T)$ .

Si  $E(T)$  admettait une autre solution, on pourrait trouver un autre homomorphisme  $h' : M(T) \rightarrow A$ .  $\square$



Soit  $M_A$  l'ensemble des  $T \in M^\infty(F)$  qui ont une valeur dans  $A$ .

(2.3) PROPOSITION : Si  $A$  est intègre,  $M_A$  est un sous-magma de  $M^\infty(F)$  et si  $T \in M_A$  alors  $\mathcal{S}(T) \subseteq M_A$ . Il existe un unique homomorphisme  $h_A : M_A \rightarrow A$ .

*Preuve* : Soient  $T_1, \dots, T_k \in M_A$  et  $f \in F$  d'arité  $k$ . Il faut montrer que  $T = f(T_1, \dots, T_k) \in M_A$ . Il est clair que chaque système  $E(T_i)$  est un sous-système de  $E(T)$  et donc qu'il existe un système  $E'$  réunissant les équations des  $E(T_i)$ , en l'ensemble de variables  $\{x_U / U \in \mathcal{S}(T_1) \cup \dots \cup \mathcal{S}(T_k)\}$ . Montrons d'abord que  $E'$  a une et une seule solution. Si  $E_1$  et  $E_2$  sont deux systèmes compatibles en les ensembles de variables respectifs  $X_1$  et  $X_2$ , ayant chacun une solution  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , alors  $\theta_1$  et  $\theta_2$  coïncident sur  $X_1 \cap X_2$  puisque,  $A$  étant intègre, le système  $E_1 \cap E_2$  a une solution au plus, et donc  $\theta_1(x) = \theta_2(x)$  si  $x \in X_1 \cap X_2$ . On a pour  $E_1 \cup E_2$  la solution  $\theta$  telle que  $\theta(x) = \theta_i(x)$  si  $x \in X_i$ .

Dans le cas qui nous intéresse, on peut donc définir une solution pour  $E(T_1) \cup E(T_2), E(T_1) \cup E(T_2) \cup E(T_3), \dots, E(T_1) \cup \dots \cup E(T_k) = E'$ .

Le système  $E(T)$  n'est autre que  $E'$  augmenté éventuellement de l'équation  $x_T = f(x_{T_1}, \dots, x_{T_k})$ . Si  $E(T) = E'$  alors  $E(T)$  a une unique solution. Sinon  $x_T \notin \{x_{T_1}, \dots, x_{T_k}\}$  et on déduit de l'unique solution de  $E'$  une unique solution pour  $E(T)$ .

Il résulte de (2.2) qu'il existe un homomorphisme  $M_A \rightarrow A$ , que l'on note  $h_A$  puisqu'il coïncide avec  $h_A : M^\infty(F) \rightarrow A$  lorsque  $A$  est intègre et algébriquement clos.  $\square$

(2.4) REMARQUE : Si  $A$  n'est pas intègre,  $M_A$  peut n'être pas un sous-magma de  $M^\infty(F)$  et l'on peut avoir  $U \in \mathcal{S}(T)$  sans valeur dans  $A$  bien que  $T$  en ait une.  $\square$

La proposition (1.7) se généralise ainsi :

(2.5) PROPOSITION : Tout  $F$ -magma  $A$  libre et intègre est isomorphe à un sous-magma de  $M^\infty(F, Y)$  pour quelque ensemble  $Y$  dont la cardinalité est au plus celle de  $|A|$ .

*Preuve* : On choisit  $Y$  en bijection par  $\theta$  avec  $|A| - \{f_A(d_1, \dots, d_{\rho(f)}) / f \in F, d_1, \dots, d_{\rho(f)} \in |A|\}$ .

Tout élément de  $|A|$  s'écrit de manière unique comme  $T_A(\theta)$  pour quelque  $T \in M^\infty(F, Y)$ .  $\square$

(2.6) REMARQUE : On pourrait tenter de définir  $T_A$  par un autre système que  $E(T)$ , par exemple de la manière suivante : à chaque nœud  $u$  de  $T$  on associe une variable  $x'_u$  et l'on définit  $X'_T = \{x'_u / u \in \text{Dom}(T)\}$ .

Soit alors

$$E'(T)(x'_u) = f \quad \text{si } T(u) = f \text{ et } \rho(f) = 0,$$

$$E'(T)(x'_u) = f(x'_{u_1}, \dots, x'_{u_k}) \quad \text{si } T(u) = f \text{ et } \rho(f) = k.$$

L'application  $\alpha : X_T \rightarrow X_T$  définie par  $\alpha(x'_u) = x_{T/u}$  réalise un homomorphisme de  $E'(T)$  sur  $E(T)$ .

On voit alors [cf. (1.4)] que :

1° si  $E(T)$  a une solution  $\theta$  alors  $E'(T)$  en a une aussi à savoir  $\theta \circ \alpha$ ;

2° si  $A$  est intègre,  $\theta \circ \alpha$  est l'unique solution de  $E'(T)$ ;

3° mais  $E'(T)$  peut avoir une solution sans que  $E(T)$  en ait une, ou en avoir plusieurs quand  $E(T)$  en a une et une seule;

4° si  $A$  est intègre et algébriquement clos,  $T_A$  peut être défini au moyen de  $E'(T)$  comme de  $E(T)$ , comme la composante de la solution de  $E'(T)_A$  associée à  $x'_e$  aussi bien que comme la composante de la solution de  $E(T)_A$  associée à  $x_T$ .

(2.7) Un  $F$ -magma  $A$  sera dit *rationnellement clos* (resp. *finiment intègre*) si pour tout système  $E$  en un nombre fini de variables, tout  $\varphi : Y \rightarrow |A|$  [cf. (1.4)]  $E_{A,\varphi}$  a au moins (resp. au plus) une solution.

Il existe un plus petit sous-magma rationnellement clos de  $M^\infty(F)$  que l'on note  $R^\infty(F)$ . C'est l'ensemble des *arbres rationnels*; il contient strictement  $M(F)$  puisque l'équation  $x = g(x)$  n'a pas de solution dans  $M(F)$ .

(2.8) PROPOSITION: *Pour tout  $F$ -magma finiment intègre et rationnellement clos  $A$ , il existe un et un seul homomorphisme (encore noté)  $h_A : R^\infty(F) \rightarrow A$ .*

La proposition suivante figure essentiellement dans Huet [12] :

(2.9) PROPOSITION : *Un arbre  $T \in M^\infty(F)$  est rationnel si et seulement si il est composante d'une solution dans  $M^\infty(F)$  d'un système fini, si et seulement si l'ensemble  $\mathcal{S}(T)$  est fini.*

Il en résulte que même si  $F$  est infini, l'ensemble  $\text{Sym}(T)$  des symboles ayant une occurrence dans un arbre rationnel  $T$  [i. e.  $\text{Sym}(T) = \{ T(u)/u \in \text{Dom}(T) \}$ ] est une partie finie de  $F$ .

Au prix de quelque technique on obtient le résultat suivant (cf. [6]; la condition nécessaire est énoncée dans [1]).

(2.10) PROPOSITION : *Un arbre  $T \in M^\infty(F)$  est rationnel si et seulement si :*

1°  $\text{Sym}(T)$  est fini;

2°  $T^{-1}(f) = \{ u \in \mathbf{N}_+^* / T(u) = f \}$  est un langage rationnel pour tout  $f \in F$ .

(2.11) *Autres travaux sur les arbres rationnels.*

Le lecteur trouvera dans Courcelle, Kahn et Vuillemin [8] des résultats de décidabilité et de mise en forme normale pour les systèmes finis d'équations et leurs solutions dans  $M^\infty(F)$  et dans Cousineau [5], la définition d'arbres rationnels par « expressions régulières ». Tiuryn [15] caractérise  $R^\infty(F \cup \{ \Omega \})$  (le symbole  $\Omega$  est introduit dans la section 4) comme « le  $F$ -magma régulier libre ». Un  $F$ -magma *régulier* (« a regular  $F$ -algebra » dans [15])  $A$  est

essentiellement un  $F$ -magma ordonné où toute équation  $x=t$  [avec  $t \in M(F \cup \{x\})$ ] admet une plus petite solution de la forme  $\text{Sup} \{t_A^n(\perp_A)/n \in \mathbf{N}\}$  ( $\perp_A$  est le plus petit élément de  $|A|$ ). On fait une hypothèse semblable pour tout système fini (plus compliquée à écrire). Remarquons qu'un système fini peut admettre plusieurs solutions dans un  $F$ -magma régulier. En résumé, un  $F$ -magma régulier est rationnellement clos mais non nécessairement finiment intègre, et de plus il est ordonné.

Elgot, Bloom et Tindell [11] introduisent l'objet  $Ftr$  (relatif à l'alphabet  $F$  muni d'une arité) défini comme la collection des  $\langle S_1, \dots, S_n \rangle$  où  $S_i \in R^\omega(F \cup V_p), V_p = \{v_1, \dots, v_p\}$  pour  $n, p \in \mathbf{N}$ . Ils montrent que c'est (une représentation de) la *théorie itérative* (Bloom, Elgot [3]) libre engendrée par  $\{fv_1 \dots v_k/k = \rho(f)\}$ , c'est-à-dire essentiellement que les systèmes d'équations de la forme

$$\begin{cases} S_1 = U_1 [S_1/v_{p+1}, \dots, S_n/v_{p+n}], \\ \vdots \\ S_n = U_n [S_1/v_{p+1}, \dots, S_n/v_{p+n}] \end{cases}$$

ont une unique solution dans  $R^\omega(F \cup V_p)$  si les  $U_i$  sont des éléments de  $R^\omega(F \cup V_{p+n}) - V_{p+n}$  et  $U_i[S_1/v_{p+1}, \dots, S_n/v_{p+n}]$  désigne la substitution de  $S_j$  à chaque occurrence de  $v_{p+j}$  dans  $U_i$  (cf. Courcelle [6]).

Mentionnons seulement la relation suivante entre théories itératives et magmas rationnellement clos (avec les définitions et notations de [3]) :

Si  $T$  est une théorie itérative, si  $\bar{f} \in T_{1,k}$  pour chaque  $f \in F$  d'arité  $k$  et chaque  $\bar{f}$  est « idéal » alors chaque  $T_{1,p}$  est un  $F$ -magma finiment intègre et rationnellement clos si l'on pose

$$f_{T_{1,p}}(a_1, \dots, a_k) = \bar{f} \cdot (a_1, \dots, a_k)$$

pour tout  $a_1, \dots, a_k \in T_{1,p}$ .

### 3. CONSTRUCTION DE MAGMAS INTÈGRES ET ALGÈBRIQUEMENT CLOS

(3.1) Commençons par donner une condition suffisante pour qu'un  $F$ -magma soit intègre et algébriquement clos.

Soit un  $F$ -magma  $A$ . L'ensemble des parties de  $|A|$  est canoniquement muni d'une structure de  $F$ -magma  $P(A)$  par

$$f_{P(A)} = \{f_A\} \quad \text{si } \rho(f) = 0,$$

$$f_{P(A)}(B_1, \dots, B_k) = f_A(B_1, \dots, B_k) = \{f_A(b_1, \dots, b_k)/b_i \in B_i\},$$

si  $\rho(f) = k$  et  $B_i \subset |A|$  pour  $i = 1, \dots, k$ .

Soit  $Y$  en bijection par  $\varphi$  avec  $|A|$ , soit  $X$  l'ensemble de variables  $\{x_T/T \in M^\infty(F \cup Y)\}$  et  $E$  le système canonique tel que

$$E(x_T) = y \text{ si } T = y \in Y, \quad E(x_T) = f \text{ si } T = f$$

et

$$E(x_T) = fx_{T_1} \dots x_{T_k} \quad \text{si } T = f(T_1, \dots, T_k).$$

Soit  $\varphi'(y) = \{\varphi(y)\}$  pour tout  $y \in Y$ .

Le système  $E_{P(A), \varphi'}$  a une plus grande solution  $(B_T)_{T \in M^\infty(F \cup Y)}$  par le théorème de Knaster-Tarski. Elle est explicitement définie par :

$$B_T = \bigcap \{B_T^\alpha / \alpha \text{ est un ordinal}\},$$

$$B_T^0 = |A|,$$

$$B_T^\lambda = \bigcap \{B_T^\alpha / \alpha < \lambda\} \quad \text{si } \lambda \text{ est un ordinal limite,}$$

$$B_T^{\alpha+1} = \{f_A\} \quad \text{si } T = f,$$

$$B_T^{\alpha+1} = \{\varphi(y)\} = \varphi'(y) \quad \text{si } T = y$$

$$B_T^{\alpha+1} = f_A(B_{T_1}^\alpha, \dots, B_{T_k}^\alpha) \quad \text{si } T = f(T_1, \dots, T_k).$$

On vérifie sans peine que  $B_T^\alpha \subseteq B_T^{\alpha'}$  pour  $\alpha > \alpha'$ .

Si maintenant  $(a_T)_{T \in M^\infty(F)}$  est une solution de  $E_{A, \varphi}$  alors  $a_T \in B_T^\alpha$  pour tout  $\alpha$  (cela se montre par induction sur  $\alpha$ ) et donc  $a_T \in B_T$ . Il en résulte, avec ces notations

(3.2) PROPOSITION : *Le  $F$ -magma  $A$  est intègre (resp. intègre et algébriquement clos) si chaque  $B_T$  a au plus un élément (resp. est singleton).*

(3.3) REMARQUES : 1° si chaque  $B_T$  a au plus un élément,  $M_A = \{T \in M^\infty(F) / B_T \neq \emptyset\}$  et  $B_T = \{T_A\}$  pour  $T \in M_A$ ;

2° pour tout  $F$ -magma  $A$ , et tout  $T \in M(F \cup Y)$ ,  $B_T^0 = \{T_A(\varphi)\}$ .

3° un exemple très simple montre que les conditions de la proposition (3.2) ne sont pas nécessaires :  $F = \{f\}$ ,  $\rho(f) = 1$ ,  $A$  de domaine  $\{1, 2, 3\}$  tel que  $f_A(1) = 1$ ,  $f_A(2) = 3$ ,  $f_A(3) = 2$ . Soit  $T = f^\omega = fff \dots$ ; alors  $B_T = \{1, 2, 3\}$  mais l'équation  $x = f_A(x)$  a une et une seule solution, à savoir  $x = 1$ .

(3.4) Un  $F$ -magma  $A$  muni d'une distance  $d$  qui le rend compact et telle que pour un réel  $c$ ,  $0 < c < 1$  on ait :

$$d(f_A(a_1, \dots, a_k), f_A(a'_1, \dots, a'_k)) \leq c \cdot \text{Max} \{d(a_i, a'_i) / 1 \leq i \leq k\}$$

pour tout  $f \in F$ ,  $a_1, \dots, a_k, a'_1, \dots, a'_k \in |A|$  avec  $k = \rho(f)$  est dit *contractant*. Les  $f_A$  sont alors des fonctions uniformément continues.

Le  $F$ -magma  $M^\infty(F)$  est contractant si on le munit de la distance ultramétrique (Bourbaki [4]) :

$$d(T, T') = \text{Sup} \{2^{-|u|} / u \in \text{Dom}(T) \cap \text{Dom}(T') \text{ et } T(u) \neq T'(u)\} \quad \text{si } T \neq T',$$

$$= 0 \quad \text{si } T = T'$$

et si l'on prend  $c = 1/2$ . D'autre part,  $M(F)$  est dense dans  $M^\infty(F)$  et  $M^\infty(F)$  est le séparé complété de  $M(F)$  (cf. Arnold et Nivat [2]).

(3.5) PROPOSITION : Un  $F$ -magma contractant  $A$  est intègre et algébriquement clos. L'homomorphisme  $h_A : M^\infty(F) \rightarrow A$  est uniformément continu.

*Preuve* : L'hypothèse de contraction entraîne que les  $f_A$  sont continues, et puisque  $B_T^0 = |A|$  est compact,  $B_T^n$  est compact (récurrence sur  $n$ ); donc  $(B_T^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante de compacts non vides; son intersection  $B_T^\omega$  est non vide.

D'autre part, le diamètre  $\delta(B_T^n)$  de  $B_T^n$  est certainement inférieur ou égal à  $c^n \cdot \delta(B_T^0) = c^n \cdot \delta(|A|)$ . Il en résulte que  $\delta(B_T^\omega) = 0$  et donc que  $B_T^\omega$  est réduit à un élément. Alors  $B_T^{\omega+1}$  est aussi non vide, contenu dans  $B_T^\omega$ . Donc  $B_T^{\omega+1} = B_T^\omega$ . Il résulte de la proposition (3.2) que  $A$  est intègre et algébriquement clos.

Finalement si  $T, T' \in M^\infty(F)$ , si  $T(u) = T'(u)$  pour tout  $u \in \mathbb{N}_*^n$  tel que  $|u| \leq n$  [c'est-à-dire si  $d(T, T') < 2^{-n}$ ],

$$d(T_A, T'_A) \leq c^{n+1} \cdot \delta(|A|).$$

Il en résulte que  $h_A : M^\infty(F) \rightarrow A$  est uniformément continu.  $\square$

Une autre construction va nous fournir des  $F$ -magmas intègres et algébriquement clos non nécessairement contractants.

(3.6) Une congruence sur  $M^\infty(F)$  est une relation d'équivalence  $\sim$  telle que  $f(T_1, \dots, T_k) \sim f(T'_1, \dots, T'_k)$  si  $T_i \sim T'_i$  pour  $1 \leq i \leq k$ .

Elle est dite *fermée* (Bourbaki [4]) si pour tout  $T, T', T_n, T'_n \in M^\infty(F)$  tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T'_n = T'$  et  $T_n \sim T'_n$  pour tout  $n$  alors  $T \sim T'$ , autrement dit si le graphe de  $\sim$  est une partie fermée de  $M^\infty(F) \times M^\infty(F)$  pour la topologie associée à la distance définie en (3.4). Elle est dite *semi-fermée* en  $T \in M^\infty(F)$  si pour tout  $S$  et  $U_n \in M^\infty(F)$  tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = T$  et  $U_n \sim S$  pour tout  $n$ , alors  $T \sim S$ . Elle est *semi-fermée* si elle est semi-fermée en tout  $T \in M^\infty(F)$  et cela équivaut à dire que la classe d'équivalence  $[S]_\sim$  de tout  $S \in M^\infty(F)$  est fermée.

(3.7) REMARQUE : Si  $A$  est contractant, le noyau  $\sim_A$  de l'homomorphisme  $h_A : M^\infty(F) \rightarrow A$ , c'est-à-dire l'équivalence telle que  $T \sim_A T' \Leftrightarrow h_A(T) = h_A(T')$  est une congruence fermée. Il en résulte que  $A$  est isomorphe au quotient de  $M^\infty(F \cup Y)$  par une congruence fermée.

(3.8) Exemple : Donnons un exemple d'une congruence semi-fermée mais non fermée.

Soit  $F = \{a, b\}$  avec  $\rho(a) = \rho(b) = 1$  [on identifie donc  $M^\infty(F)$  à  $\{a, b\}^\omega$  ainsi qu'il a été dit en (1.1)].

Définissons les suites :

$$\begin{aligned}u_n &= ababbabbba \dots ab^n a \in F^*, \\v_n &= aabaabbaabbbba \dots aab^n aa \in F^*, \\w_n &= aaabaabbaaaa \dots aaab^n aaa \in F^*,\end{aligned}$$

pour  $n \geq 1$ , ainsi que leurs bornes supérieures respectives  $u, v, w$  dans  $F^* \cup F^\omega$  ordonné par l'ordre préfixe. Ainsi

$$u = ababbabbba \dots ab^n a \dots \in F^\omega.$$

Soit  $\sim$  la congruence sur  $F^\omega$  définie par

$$x \sim x' \text{ ssi } x = x' \quad \text{ou} \quad x = yu_n w \quad \text{et} \quad x' = yv_n w$$

pour quelques  $n \in \mathbf{N}$  et  $y \in F^*$ .

L'écriture d'un mot  $x$  sous la forme  $yu_n w$  ou  $yv_n w$  étant unique, la classe de  $x$  modulo  $\sim$  contient au plus deux éléments. Elle est donc fermée. Mais  $\sim$  n'est pas fermée car  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n w = u$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n w = u$ , et  $u_n w \sim v_n w$  mais  $u \not\sim v$ .  $\square$

(3.9) PROPOSITION : Soit  $\sim$  une congruence sur  $M^\omega(F)$ . Le  $F$ -magma  $A = M^\omega(F)/\sim$  est algébriquement clos. Si  $\sim$  est semi-fermée en tout  $U \in \mathcal{S}(T)$  [pour  $T \in M^\omega(F)$ ] alors  $T$  a une valeur dans  $A$ .

Énonçons tout de suite son corollaire.

(3.10) THÉORÈME : Si  $\sim$  est une congruence semi-fermée sur  $M^\omega(F)$  alors  $M^\omega(F)/\sim$  est intègre et algébriquement clos.

Associé à (3.7) et (3.8), ce théorème montre qu'il existe des magmas intègres et algébriquement clos non contractants.

*Preuve de la proposition (3.9) :* Montrons que  $A = M^\omega(F)/\sim$  est algébriquement clos : soit  $\varphi : Y \rightarrow |A|$  de la forme  $\varphi(y) = [\varphi'(y)]_\sim$  pour quelque  $\varphi' : Y \rightarrow M^\omega(F)$  et  $E$  un système en l'ensemble  $X$  de variables et l'ensemble  $Y$  de paramètres. Le système  $E_{M^\omega(F), \varphi'}$  a une solution  $(T_x)_{x \in X}$  et  $([T_x]_\sim)_{x \in X}$  est une solution de  $E_{A, \varphi}$ .

Soit maintenant  $T \in M^\omega(F)$  tel que  $\sim$  est semi-fermée en tout  $U \in \mathcal{S}(T)$ . Le système  $E(T)$  défini en (2.1) a la solution  $([U]_\sim)_{U \in \mathcal{S}(T)}$  dans  $A$ .

Soit  $([S_U]_\sim)_{U \in \mathcal{S}(T)}$  une solution arbitraire de  $E(T)$  dans  $A$ . On va montrer que  $U \sim S_U$  pour tout  $U \in \mathcal{S}(T)$ . Définissons pour cela  $S_U^{(n)}$  pour  $n \in \mathbf{N}$  en posant

$$S_U^{(0)} = S_U,$$

$$S_U^{(n+1)} = f(S_{U_1}^{(n)}, \dots, S_{U_k}^{(n)}) \quad \text{si} \quad U = f(U_1, \dots, U_k),$$

$$S_U^{(n+1)} = f \quad \text{si} \quad U = f \in F \quad \text{et} \quad \rho(f) = 0.$$

Il est facile de montrer que pour tout  $U \in \mathcal{S}(T)$ ,  $S_U^{(n)} \sim S_U$  et  $d(S_U^{(n)}, U) \leq 2^{-n}$  (par récurrence sur  $n$ ), et donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_U^{(n)} = U$ . Puisque  $\sim$  est semi-fermée en tout  $U \in \mathcal{S}(T)$ ,  $S_U \sim U$ .  $\square$

La preuve du théorème (3.10) est analogue.

L'exemple qui suit montre qu'il existe d'autres magmas intègres et algébriquement clos que ceux issus du théorème (3.10).

(3.11) *Exemple* : Soit  $F = \{f, g, a, b\}$  avec  $\rho(f) = \rho(g) = 1$  et  $\rho(a) = \rho(b) = 0$ .

Soit  $\approx$  la plus petite congruence sur  $M(F)$  telle que

$$fa \approx a,$$

$$ga \approx a,$$

$$fgft \approx gt \text{ pour tout } t \in M(F).$$

Au moyen de la proposition (3.2), on va montrer que  $A = M(F)/\approx$  est intègre et algébriquement clos. On note  $[t]$  la classe d'équivalence de  $t \in M(F)$  modulo  $\approx$ , on identifie  $M(F)$  à  $\{f, g\}^* \{a, b\}$  et  $M^\infty(F) - M(F)$  à  $\{f, g\}^\omega$ .

On va montrer que  $B_T = \{a\}$  pour tout  $T \in \{f, g\}^\omega$ . Le résultat viendra alors de la proposition (3.2) et des remarques (3.3).

Or pour tout  $T \in \{f, g\}^\omega$ ,  $u \in \{f, g\}^*$  et  $n \in \mathbb{N}$  :

$$1^\circ [a] \in B_T^n;$$

2°  $[ub] \in B_T^n$  ssi  $ub \approx ww' b$  pour quelques  $w, w' \in \{f, g\}^*$  tels que  $|w| = n$  et  $ww'$  est un facteur gauche de  $T$ .

On va montrer que  $[ub] \notin B_T^\omega$ .

Remarquons si  $ub \approx ww' b$  alors  $u$  et  $ww'$  ont le même nombre de  $g$ . Donc  $[ub] \in B_T^\omega$  implique  $T = wgf^\omega$  ou  $T = f^\omega$ . On vérifie sans peine que l'on ne peut avoir  $ub \approx wgf^n b$  (resp.  $ub \approx f^n b$ ) pour une infinité de  $n$ . Donc  $[ub] \notin B_T^\omega$ . Ainsi  $B_T = B_T^\omega = \{a\}$ .

Ainsi  $A$  est intègre et algébriquement clos.

Soit  $\sim$  la congruence :  $T \sim T'$  si et seulement si  $T_A = T'_A$  définie sur  $M^\infty(E)$ . Elle n'est pas semi-fermée car  $f^n g f^n b \sim gb$  pour tout  $n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n g f^n b = f^\omega$ ,  $f_A^\omega = [a]$  et  $(gb)_A = [gb] \neq [a]$  et donc  $f^\omega \not\sim gb$ .  $\square$

(3.12) Ces constructions posent de nombreux problèmes :

Soit  $\approx$  une congruence finiment engendrée sur  $M(F)$  :

1° quand  $M(F)/\approx$  est-il intègre ? algébriquement clos ? que peut-on dire de la plus petite congruence  $\sim$  sur  $M(F)$  contenant  $\approx$  et telle que  $M(F)/\sim$  est intègre ?

2° que peut-on dire de la plus petite congruence  $\equiv$  sur  $M(F)$  contenant  $\approx$  et telle que  $M^\infty(F)/\equiv$  est intègre ? quand coïncide-t-elle avec la plus petite congruence semi-fermée contenant  $\approx$  ?

3° pour quelles congruences fermées sur  $M^\infty(F)$  le  $F$ -magma  $M^\infty(F)/\equiv$  est-il contractant ?

#### 4. APPENDICE : PROPRIÉTÉS DE FERMETURE DES CONGRUENCES SUR LE MAGMA ORDONNÉ $M_\Omega^\infty(F)$

(4.1) Rappelons que  $M_\Omega^\infty(F) = M^\infty(F \cup \{\Omega\})$  (où  $\Omega$  est un nouveau symbole d'arité 0) est ordonné par  $—\langle$  ainsi défini

$$\left\{ \begin{array}{l} T—\langle T' \text{ si et seulement si } \text{Dom}(T) \subseteq \text{Dom}(T') \\ \text{et pour tout } u \in \text{Dom}(T), T(u) = \Omega \text{ ou } T(u) = T'(u). \end{array} \right.$$

Ainsi,  $M^\infty(F) = \{T \in M_\Omega^\infty(F) / \Omega \notin \text{Sym}(T)\}$  et c'est l'ensemble des éléments maximaux de  $M_\Omega^\infty(F)$ . Soit  $M_\Omega(F) = M(F \cup \{\Omega\})$ .

Si l'on considère  $\Omega$  comme une notation pour « l'arbre vide »,  $T—\langle T'$  signifie approximativement que  $T$  est « un sous-arbre initial » de  $T'$ .

Le lecteur consultera Courcelle [6], Courcelle et Nivat [9, 10], ADJ [1] pour plus de détails sur  $M_\Omega^\infty(F)$ .

Étant donnée une congruence  $\alpha$  sur  $M_\Omega(F)$ , il existe plusieurs manières de l'étendre à  $M_\Omega^\infty(F)$  qui interviennent en théorie des schémas de programmes (Courcelle [7], Courcelle et Nivat [9, 10]). Nous allons les rappeler.

(4.2) On associe à  $\alpha$  un préordre  $\leq_\alpha$  sur  $M_\Omega(F)$  en prenant la clôture transitive de  $\alpha \cup —\langle$ .

On l'étend à  $M_\Omega^\infty(F)$  en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} T \leq_\alpha T' \text{ si et seulement si pour tout } t \in M_\Omega(F) \text{ tel que } t—\langle T \\ \text{il existe } t' \in M_\Omega(F) \text{ tel que } t'—\langle T' \text{ et } t \leq_\alpha t'. \end{array} \right.$$

Finalement, on définit une congruence sur  $M_\Omega^\infty(F)$  en posant

$$T \equiv_\alpha T' \text{ si et seulement si } T \leq_\alpha T' \text{ et } T' \leq_\alpha T.$$

(La congruence  $\equiv_\alpha$  est l'équivalence induite sur  $M(F)$  par la classe  $\mathcal{C}_\alpha$  de toutes les interprétations où l'ensemble d'équations  $\alpha$  est valide.)

(4.3) Une autre manière d'étendre  $\alpha$  à  $M_\Omega^\infty(F)$  consiste à définir d'abord  $\sim_\alpha^\circ$  par

$$\left\{ \begin{array}{l} T \sim_\alpha^\circ T' \text{ si et seulement si il existe dans } M_\Omega(F) \\ \text{deux suites croissantes } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (t'_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ telles que} \\ t_n \alpha t'_n \text{ pour tout } n, T = \text{Sup} \{ t_n \} \text{ et } T' = \text{Sup} \{ t'_n \}. \end{array} \right.$$



On définit ensuite  $\sim_\alpha$  comme la clôture transitive de  $\sim_\alpha^\circ$ .

(4.4) REMARQUE :  $T \sim_\alpha T'$  implique  $T \equiv_\alpha T'$  mais  $\sim_\alpha$  et  $\equiv_\alpha$  ne coïncident pas en général ainsi que le montre l'exemple suivant :

On prend le même alphabet et les mêmes conventions que dans l'exemple (3.11).

Soit  $\alpha$  la plus petite congruence sur  $M_\Omega(F)$  telle que  $fgt\alpha gft$  pour tout  $t \in M_\Omega(F)$ .

Soient  $T = (fg)^\omega$  et  $T' = (fg^2)^\omega$ .

Il n'est pas difficile de montrer que  $T \equiv_\alpha T'$ . Mais  $T$  n'est pas équivalent à  $T'$  modulo  $\sim_\alpha$ . Afin de le montrer remarquons que  $T$  satisfait la propriété suivante :

(\*) pour toute suite croissante  $t_n$  dans  $M_\Omega(F)$  telle que  $T = \text{Sup}(t_n)$ ,  $|t_n|_f / |t_n|_g \rightarrow 1$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  [ $|t|_x$  est le nombre d'occurrences de  $x$  dans  $t$  pour  $x \in F$  et  $t \in M_\Omega(F)$ ].

Si  $t \sim_\alpha t'$ ,  $t, t' \in M_\Omega(F)$  alors  $|t|_f = |t'|_f$  et  $|t|_g = |t'|_g$  et donc si  $T_1 \sim_\alpha T_2$  et  $T_1$  satisfait la propriété (\*) il en va de même de  $T_2$ . Donc tout  $T'' \sim_\alpha T$  satisfait (\*). Mais il est clair que  $T'$  ne la satisfait pas ( $|t'_n|_f / |t'_n|_g \rightarrow 2$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  si  $t'_n$  est une suite croissante dans  $M_\Omega(F)$  qui tend vers  $T'$ ).  $\square$

(4.5) REMARQUE : La congruence  $\equiv_\alpha$  de l'exemple (4.4) n'est pas semi-fermée. En effet,

$$T = (fg)^\omega \equiv_\alpha T_n = f^n g^n (fg)^\omega \quad \text{pour tout } n,$$

et  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = f^\omega$ . Or  $f^\omega \not\equiv_\alpha (fg)^\omega$  mais l'inégalité inverse n'a pas lieu car  $fg\Omega \not\leq_\alpha f^m\Omega$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .  $\square$

On a pourtant un résultat de fermeture :

Un arbre  $T \in M_\Omega^\omega(F)$  est dit  $\leq_\alpha$ -maximal si pour tout  $T' \in M_\Omega^\omega(F)$ ,  $T \leq_\alpha T'$  implique  $T \equiv_\alpha T'$ . Ces arbres sont étudiés dans Courcelle [7].

(4.6) PROPOSITION : Si  $T$  est  $\leq_\alpha$ -maximal alors  $\equiv_\alpha$  est semi-fermée en  $T$ .

Preuve : Soit  $U_n \in M_\Omega^\omega(F)$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = T$  et  $S \in M_\Omega^\omega(F)$  tel que  $U_n \equiv_\alpha S$  pour tout  $n$ . On peut supposer que  $d(U_n, T) < 2^{-n}$  et l'on définit sans peine  $t_n \in M_\Omega(F)$  tel que  $t_n \prec U_n$ ,  $t_n \prec T$  et  $T = \text{Sup}\{t_n\}$ . On a  $t_n \leq_\alpha S$  et donc  $T \leq_\alpha S$ . Puisque  $T$  est  $\leq_\alpha$ -maximal,  $T \equiv_\alpha S$ .  $\square$

Mettons en évidence pour conclure une famille remarquable de congruences sur  $M_\Omega^\omega(F)$ .

Soit  $\Pi_0$  un ensemble de paires de la forme  $(fv_1 \dots v_k, fv_{i_1} \dots v_{i_k}), f \in F, k = \rho(f), v_1, \dots, v_k$  sont des variables et  $(i_1, \dots, i_k)$  est une permutation de  $(1, \dots, k)$ .

Soit  $\Pi$  la plus petite congruence sur  $M_\Omega(F)$  telle que

$$ft_1 \dots t_k \Pi ft_{i_1} \dots t_{i_k} \text{ pour tout } t_1 \dots t_k \in M_\Omega(F)$$

et  $(fv_1 \dots v_k, fv_{i_1} \dots v_{i_k}) \in \Pi_0$ . On dit que  $\Pi$  est une congruence *permutative* et on obtient le résultat suivant :

(4.7) PROPOSITION : Soit  $\Pi$  une congruence permutative :

- 1° Les relations  $\equiv_\Pi, \sim_\Pi^0$  et  $\sim_\Pi$  coïncident;
- 2° La congruence  $\equiv_\Pi$  est fermée;
- 3° Tout  $T \in M^\infty(F)$  est  $\leq_\Pi$ -maximal.

*Preuve* : Il est montré dans [7, (4.6) et (4.15)] que pour  $t \in M_\Omega(F)$  et  $T' \in M^\infty_\Omega(F), t \leq_\Pi T'$  si et seulement si il existe  $t' \prec T'$  tel que  $t \Pi t'$ .

Soient  $T$  et  $T' \in M^\infty_\Omega(F)$  tels que  $T \equiv_\Pi T'$ . On va montrer que  $T \sim_\alpha^0 T'$ . Pour tout  $n$ , soit  $T^{(n)} \in M_\Omega(F)$  tel que :

$$\begin{aligned} T^{(n)}(u) &= T(u) \text{ si } u \in \text{Dom}(T), \quad |u| \leq n \\ &= \Omega \text{ si } u \in \text{Dom}(T), \quad |u| = n + 1, \end{aligned}$$

indéfini autrement.

On a donc  $T^{(n)} \prec T^{(n+1)}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^{(n)} = T$ .

On définit de même  $T'^{(n)}$  relativement à  $T'$ .

Pour tout  $n$ , il existe  $t' \in M_\Omega(F)$  tel que  $T^{(n)} \Pi t' \prec T'$  et à cause de la forme particulière de  $\Pi_0$ , la plus longue branche de  $t'$  a au plus  $n + 1$  nœuds et donc  $t' \prec T'^{(n)}$ . De même  $T'^{(n)} \Pi t \prec T^{(n)}$  pour quelque  $t \in M_\Omega(F)$ . Donc  $T^{(n)} \equiv_\Pi T'^{(n)}$ . La proposition (4.4) de [7] dit alors que  $T^{(n)} \Pi T'^{(n)}$ . On a donc  $T \sim_\alpha^0 T'$ .

L'assertion 1 résulte alors de (4.4).

Montrons que  $\equiv_\Pi$  est fermée.

Soient  $U_n, U'_n$  deux suites dans  $M^\infty_\Omega(F)$  telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = T, \lim_{n \rightarrow \infty} U'_n = T'$  pour tout  $n$ . On peut supposer [quitte à extraire des sous-suites de  $(U_n)$  et  $(U'_n)$ ] que  $d(U_n, T) < 2^{-n}$  et  $d(U'_n, T') < 2^{-n}$  pour tout  $n$  et donc que  $U_n^{(n)} \prec T'$  (avec les notations du début de cette preuve). On a vu que  $U_n \equiv_\Pi U'_n$  implique  $U_n^{(n)} \Pi U_n'^{(n)}$ . Puisque  $T = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n^{(n)}$  et  $T' = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n'^{(n)}$ , on a  $T \sim_\alpha^0 T'$  et donc  $T \equiv_\Pi T'$ .

Enfin, l'assertion 3 résulte de (4.8) et (4.15) de [7].  $\square$

Une question se pose : quelles sont les congruences  $\Pi$  sur  $M_\Omega(F)$  qui satisfont la proposition (4.7) ?

## BIBLIOGRAPHIE

1. ADJ (J. GOGUEN, J. THATCHER, E. WAGNER et J. WRIGHT), *Initial Algebra Semantics and Continuous Algebras*, J. Assoc. Comput. Math., vol. 24, 1977, p. 68-95.
2. A. ARNOLD et M. NIVAT, *The Metric Space of Infinite Trees, Algebraic and Topological Properties*, Rapport Laboria n° 323, septembre 1978.
3. S. BLOOM et C. ELGOT, *The Existence and Construction of Free Iterative Theories*, J. Comput. System Sc., vol. 12, 1976, p. 305-318.
4. N. BOURBAKI, *Topologie générale*, 4<sup>e</sup> édition, Hermann, Paris.
5. G. COUSINEAU, *Algebraic Definition of Control Structures*, Theor. Comput. Sc. (à paraître).
6. B. COURCELLE, *A Representation of Trees by Languages, II*, Theor. Comput. Sc., vol. 7, 1978, p. 25-55.
7. B. COURCELLE, *On Recursive Equations Having a Unique Solution*, Communication au 19<sup>e</sup> Symp. on Foundations of Computer Science, Ann Arbor, 1978.
8. B. COURCELLE, G. KAHN et J. VUILLEMIN, *Algorithmes d'équivalence et de réduction à des expressions minimales dans une classe d'équations récursives simples*, Proc. 2nd I.C.A.L.P., Saarbrücken, 1974 Lecture Notes in Computer Science, vol. 14, Springer-Verlag, p. 200-213.
9. B. COURCELLE et M. NIVAT, *Algebraic Families of Interpretations*, 17th Symp. on Foundations of Computer Science, Houston, 1978 p. 137-146 et Rapport Laboria n° 189.
10. B. COURCELLE et M. NIVAT, *The Algebraic Semantics of Recursive Program Schemes*, Communication au Colloque *Mathematical Foundation of Computer Science*, 1978, in Lecture Notes in Computer Science, J. WINKOWSKI, éd., vol. 64, Springer-Verlag, p. 16-30.
11. C. ELGOT, S. BLOOM et R. TINDELL, *On the Algebraic Theory of Rooted Trees*, J. Comput. System Sc., vol. 16, 1978, p. 362-399.
12. G. HUET, *Résolution d'équations dans les langages d'ordre 1, 2, . . . ,  $\omega$* , Thèse d'État, Université Paris-VII, 1976.
13. M. NIVAT, *Mots infinis engendrés par une grammaire algébrique*, R.A.I.R.O., Informatique théorique, vol. 11, 1977, p. 311-327.
14. B. ROSEN, *Program Equivalence and Context-Free Grammars*, J. Comput. System Sc., vol. 11, 1965, p. 358-374.
15. J. TIURYN, *Fixed-Points and Algebras with Infinitely Long Expressions I* dans *Mathematical Foundations of Computer Science 1977*, Lecture Notes in Comput. Sc., vol. 53, Springer-Verlag, 1977, p. 513-522.