

CHRISTIAN CHOFFRUT

**Sur les transductions reconnaissables**

*RAIRO. Informatique théorique*, tome 12, n° 3 (1978), p. 203-212

<[http://www.numdam.org/item?id=ITA\\_1978\\_\\_12\\_3\\_203\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ITA_1978__12_3_203_0)>

© AFCET, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR LES TRANSDUCTIONS RECONNAISSABLES (\*)

par Christian CHOFFRUT (1)

Communiqué par J. BERSTEL

---

Résumé. — Soient  $A^*$  et  $B^*$  deux monoïdes libres, engendrés par les deux ensembles non vides  $A$  et  $B$ . Toute partie du monoïde produit  $A^* \times B^*$  est une transduction. Un théorème classique montre que la famille des transductions reconnaissables est strictement incluse dans la famille des transductions rationnelles.

Associons à toute transduction  $\rho \subseteq A^* \times B^*$ , la fonction  $\rho_1$  de  $A^*$  dans  $2^{B^*}$  définie par :  $u \rho_1 = \{v \in B^* \mid (u, v) \in \rho\}$ . Notre résultat principal établit qu'une transduction rationnelle  $\rho$  est reconnaissable ssi l'image de  $A^*$  par  $\rho_1$  est finie.

Nous donnons plusieurs exemples d'applications de ce résultat à l'étude des séries rationnelles.

### I. INTRODUCTION

La théorie des langages rationnels repose sur la notion fondamentale d'automate fini, qui constitue le procédé le plus simple possible de reconnaissance d'un langage. En partant de cette notion, deux généralisations naturelles se sont dégagées.

On a d'abord cherché à reconnaître, non plus simplement des parties d'un monoïde libre, mais des parties du produit direct de deux monoïdes libres  $A^* \times B^*$ , où  $A$  et  $B$  sont finis et non vides. C'est ainsi que, poursuivant les travaux de Rabin et Scott, Elgot et Mezei ont dégagé en [6] la notion de *transduction rationnelle* de  $A^*$  dans  $B^*$  dont ils prouvent l'identité avec celle de la partie rationnelle de  $A^* \times B^*$ . Ces objets sont à l'origine de la théorie des familles agréables de langages (AFL en anglais) où ils fournissent une mesure de complexité particulièrement féconde. Pour les derniers développements de cette théorie on pourra consulter [2].

---

(\*) Reçu janvier 1978 et version définitive, février 1978.

(1) Université Paris VII, Département de Mathématique, Paris.

La deuxième généralisation consiste à compter le nombre de façons différentes qu'un automate fini donné reconnaît un mot. On est alors amené à définir les séries  $\mathbf{N}$ -rationnelles c'est-à-dire des applications de  $A^*$  dans le semi-anneau  $\mathbf{N}$  des entiers naturels — ou de façon générale dans n'importe quel semi-anneau unitaire, de préférence commutatif — satisfaisant à des conditions de rationalité. C'est ainsi par exemple que Schützenberger a étendu aux séries  $\mathbf{N}$ -rationnelles le théorème de Kleene sur l'égalité de la famille  $\text{Rec } A^*$  des langages reconnaissables et de la famille  $\text{Rat } A^*$  des langages rationnels de  $A^*$ .

Ces deux théories divergentes en apparence, se rejoignent en fait car à toute transduction rationnelle  $\rho$  de  $A^*$  dans  $B^*$  est associée une série  $K$ -rationnelle  $\rho_1$  où  $K$  est le semi-anneau  $\text{Rat } B^*$  des parties rationnelles de  $B^*$  (cf. [8], p. 359).

On sait que la famille  $\text{Rec } A^* \times B^*$  des transductions reconnaissables de  $A^* \times B^*$  est strictement incluse dans la famille  $\text{Rat } A^* \times B^*$  des transductions rationnelles de  $A^* \times B^*$ . Le résultat principal de ce travail établit que la transduction rationnelle  $\rho$  est reconnaissable ssi la série rationnelle  $\rho_1$  qui lui est associée est d'image finie. Ceci nous permet d'étudier certains problèmes de séries rationnelles à image finie abordés notamment en 1, 4, 7 et 10.

De manière plus formelle, introduisons la notation suivante :

NOTATION : Pour toute transduction  $\rho \subseteq A^* \times B^*$  on note  $\rho_1$  la fonction de  $A^*$  dans l'ensemble  $2^{B^*}$  des parties de  $B^*$  définie pour tout  $u \in A^*$  par

$$u \rho_1 = \{ v \in B^* \mid (u, v) \in \rho \}.$$

On a alors :

THÉORÈME 1.1 : Soit  $\rho \in \text{Rat } A^* \times B^*$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\rho \in \text{Rec } A^* \times B^*$ ;
- (ii) il existe un morphisme  $\varphi$  de  $A^*$  sur un monoïde fini  $F$  et une fonction  $\chi$  de  $F$  dans  $\text{Rat } B^*$  tels que l'on ait pour tout  $u \in A^*$  :  $u \rho_1 = (u \varphi) \chi$ ;
- (iii)  $\rho_1$  est d'image finie.

La démonstration de ce théorème utilise de façon cruciale la caractérisation suivante, due à Mezei, des transductions qui sont reconnaissables (cf. par exemple [4], prop. III . 12 . 2).

THÉORÈME 1.2 : Soit  $\rho \subseteq A^* \times B^*$ . Alors  $\rho \in \text{Rec } A^* \times B^*$  ssi il existe des parties  $X_i \in \text{Rec } A^*$  et  $Y_i \in \text{Rec } B^*$  ( $1 \leq i \leq n$ ) tels que l'on ait :

$$\rho = \bigcup_{1 \leq i \leq n} X_i \times Y_i.$$

La preuve de 1.1 est faite dans la dernière partie de ce travail. La deuxième partie est réservée aux conséquences que l'on peut tirer de ce résultat pour l'étude des séries rationnelles.

## II. APPLICATION AUX SÉRIES RATIONNELLES

1. Nous renvoyons le lecteur aux chapitres 6, 7 et 9 du traité de Eilenberg pour un exposé des concepts et résultats fondamentaux de la théorie des séries rationnelles sur un semi-anneau quelconque et des transductions (ou relations) rationnelles.

Si  $K$  est un semi-anneau unitaire et  $K^{A^*}$  la  $K$ -algèbre des séries formelles en les indéterminées  $A$  sur le semi-anneau de base  $K$ , on notera  $\text{Rat}_K A^*$  la sous-algèbre des séries  $K$ -rationnelles c'est-à-dire des séries rationnelles sur le semi-anneau  $K$ .

La plupart des résultats de la théorie portent sur les séries rationnelles dont le semi-anneau est commutatif, voire est un anneau commutatif ou même un corps commutatif. Or, comme nous l'avons remarqué dans la première partie, une transduction  $\rho \subseteq A^* \times B^*$  est rationnelle, ssi la fonction  $\rho_1$  qui lui est associée définit une série rationnelle sur le semi-anneau  $K = \text{Rat } B^*$ . Nous disposons donc, avec les transductions rationnelles, d'objets qui nous permettent de savoir dans certains cas, si tel résultat de la théorie des séries rationnelles, établi sous certaines hypothèses portant sur  $K$ , est ou non valable en dehors de ces hypothèses. C'est ce que nous faisons à propos de trois exemples particuliers.

2. Le premier exemple concerne le problème de la caractérisation des séries  $K$ -rationnelles qui sont à image finie.

Lorsque  $K$  est un corps commutatif, on connaît une caractérisation de ces séries, qui utilise la notion de rayon défini ci-dessous. De même, la notion de matrice de Hankel associée à une série formelle (*cf.* par exemple [5], p. 205), permet sous l'hypothèse que  $K$  est un anneau commutatif, de caractériser les séries rationnelles à image finie, par le fait que le nombre de lignes (ou de colonnes) distinctes de la matrice est fini (*cf.* [10], p. 379). Or les séries associées aux transductions reconnaissables sont les séries  $\text{Rat } B^*$ -rationnelles à image finie.

Nous allons d'abord montrer que le premier critère de finitude de l'image donné sous l'hypothèse que  $K$  est un corps commutatif (*cf.* th. 2.1 ci-dessous) ne peut être appliqué au cas  $K = \text{Rat } B^*$ . Puisque dans l'exemple que nous donnons, l'ensemble  $B$  est réduit à un élément et que  $\text{Rat } B^*$  est par conséquent commutatif, on ne peut espérer étendre le théorème 2.1 à tout semi-anneau commutatif.

Quant au deuxième critère énoncé pour le cas où  $K$  est un anneau commutatif (cf. th. 2.2), il est, en vertu du théorème 1.1, valable pour  $K = \text{Rat } B^*$  bien que ce dernier semi-anneau ne soit commutatif que lorsque  $B$  possède un seul élément. Nous exhibons cependant un semi-anneau commutatif, pour lequel le critère n'est pas valable. A la connaissance de l'auteur un tel exemple était, jusqu'à présent, inexistant dans la littérature.

Appelons *rayon* toute partie de  $A^*$  qui est de la forme  $uw^+v$  où  $u, v, w \in A^*$ . On montre le :

**THÉORÈME 2.1 [9] :** *Soit  $K$  un corps commutatif et  $\alpha \in \text{Rat}_K A^*$ . Alors  $\alpha$  est d'image finie ssi sa restriction à tout rayon est d'image finie.*

Nous allons voir que ce résultat n'est plus valable lorsque  $K$  est le semi-anneau unitaire commutatif  $\text{Rat } B^*$  où  $B = \{t\}$ . Posons en effet  $A = \{a, b\}$  et considérons la transduction rationnelle suivante :

$$\rho = ((a, 1)(1, t)^+)^+ (b, 1)(a, 1)^+ \cup (a, 1)^+ (b, 1)((a, 1)(1, t)^+)^+ \subseteq A^* \times B^*.$$

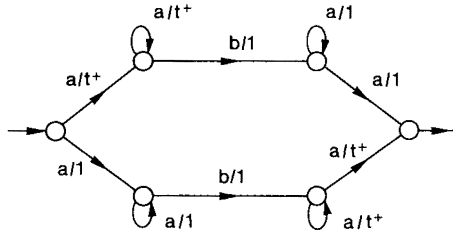


Fig. 1

On a

$$\text{Dom } \rho_1 = a^+ ba^+ \quad \text{et} \quad a^n ba^p \rho_1 = t^r t^*$$

où  $n, p, r > 0$  et  $r = \inf\{n, p\}$ . La fonction  $\rho_1$  est donc d'image infinie.

Soit  $uw^+v$  un rayon. Si  $w \in A^* b A^*$  alors on a pour  $s > 1$  :  $uw^s v \notin \text{Dom } \rho_1$ . Par contre si  $w = a^{n_1}$  où  $n_1 \geq 0$ , alors on a  $uwv \in \text{Dom } \rho_1$  ssi  $uw^+v \subseteq \text{Dom } \rho_1$ . On peut donc supposer sans perte de généralité

$$u = a^{n_2} \quad \text{et} \quad v = a^{n_3} ba^p$$

Il vient pour tout  $s > 0$  :

$$uw^s v \rho_1 = t^{r'} t^* \quad \text{où} \quad r' \leq p$$

ce qui prouve que l'image de tout rayon est finie. Donc le critère de 2.1 échoue dans ce cas.

Passons à la caractérisation qui utilise les matrices de Hankel. Nous en donnons un énoncé équivalent :

**THÉORÈME 2.2** [10] : *Soit  $K$  un anneau commutatif et  $\alpha \in K^{A^*}$  une série d'image finie. Alors  $\alpha$  est rationnelle ssi pour tout  $k \in K$  on a :  $k\alpha^{-1} \in \text{Rat } A^*$ .*

Il est clair qu'en raison du théorème 1.1, l'hypothèse «  $K$  est un anneau commutatif » peut être remplacée par «  $K = \text{Rat } B^*$  ». Sontag a cependant donné un anneau (non commutatif) ne satisfaisant pas le théorème. Nous montrons qu'il existe des semi-anneaux *commutatifs* mettant en défaut le théorème 2.2.

Posons en effet  $A = \{a, b\}$  et considérons le groupe libre cyclique  $t^{(*)}$  engendré par  $t$ . On note  $\chi$  le morphisme de  $A^*$  sur  $t^{(*)}$  défini par :  $a\chi = t$  et  $b\chi = t^{-1}$ . Le semi-anneau  $K = \text{Rat } t^{(*)}$  est évidemment commutatif.

Soit  $\alpha$  et  $\beta$  les séries rationnelles définies pour tout  $u \in A^*$  par :

$$u\alpha = t^{(*)} \setminus \{1\} = \{t\}^+ \cup \{t^{-1}\}^+ \in \text{Rat } t^{(*)} \quad \text{et} \quad u\beta = u\chi.$$

L'image de la série  $\gamma = \alpha + \beta$  est réduite aux deux éléments  $t^{(*)}$  et  $t^{(*)} \setminus \{1\}$  et la partie  $L = t^{(*)}\gamma^{-1}$  est constituée des mots dont les nombres d'occurrences des lettres  $a$  et  $b$  sont égaux. Il est bien connu que  $L$  n'est pas rationnelle et, là encore le critère échoue.

3. Le deuxième exemple d'application est relatif au produit de Hadamard de deux séries.

On définit de façon classique sur  $K^{A^*}$ , le produit de Hadamard de deux séries formelles  $\alpha, \beta$  comme étant la série formelle  $\alpha \odot \beta$  définie par :

$$(u)\alpha \odot \beta = u\alpha \odot u\beta \quad \text{pour tout } u \in A^*.$$

En particulier lorsque  $K$  est le semi-anneau de Boole  $\{0, 1\}$ , les séries formelles sur  $K$  s'identifient aux parties de  $A^*$  et le produit de Hadamard à l'intersection ensembliste. Dans ce cas le produit de Hadamard de deux séries  $K$ -rationnelles est une série  $K$ -rationnelle.

Plus généralement, lorsque  $K$  est un semi-anneau commutatif, on montre que  $\alpha \odot \beta$  est  $K$ -rationnelle si  $\alpha$  et  $\beta$  sont  $K$ -rationnelles (cf. [4], Th. VII. 5. 2). Ce résultat n'est plus vrai dans le cas général, comme le montre l'exemple suivant :

Considérons  $A = B = \{a, b\}$  et posons

$$\delta = ((a, a) \cup (b, b))^* \subseteq \text{Rat } A^* \times B^*.$$

Alors  $\delta_1 \in \text{Rat}_{\text{Rat } B^*} A^*$ . Si le produit  $\delta_1 \odot \delta_1$  était  $\text{Rat } B^*$ -rationnel, la transduction  $\Delta = \{(u, u^2) \mid u \in A^*\} \subseteq A^* \times B^*$  serait rationnelle. En notant  $\pi_2$  la projection canonique de  $A^* \times B^*$  sur  $B^*$ , on aurait en raison de la

proposition VII. 2. 4, du traité de Eilenberg :  $\Delta\pi_2 = \{u^2 \mid u \in A^*\} \in \text{Rat } B^*$  ce qui n'est pas.

On peut cependant, à l'aide du théorème 1.1, énoncer le résultat suivant :

PROPOSITION 2.3 : Soit  $\alpha, \beta \in \text{Rat}_{\text{Rat } B^*} A^*$ . Si  $\alpha$  est d'image finie alors on a

$$\alpha \odot \beta \quad \text{et} \quad \beta \odot \alpha \in \text{Rat}_{\text{Rat } B^*} A^*.$$

*Preuve* : Si  $\alpha = 0$ , alors on a  $\alpha \odot \beta = \beta \odot \alpha = 0 \in \text{Rat}_{\text{Rat } B^*} A^*$ . Nous pouvons donc supposer  $\alpha \neq 0$ .

Soit  $Y_i \in \text{Rot } B^*$  ( $1 \leq i \leq n$ ) les différentes images non nulles de  $\alpha$ . Avec les notations du théorème 1.1 on a

$$X_i = Y_i \alpha^{-1} = F_i \varphi^{-1} \in \text{Rat } A^* \quad \text{où} \quad F_i = Y_i \chi^{-1}.$$

La série  $\alpha^{(i)}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) définie pour tout  $u \in A^*$  par

$$u \alpha^{(1)} = \begin{cases} Y_i & \text{si } u \in X_i, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

est rationnelle puisque la transduction associée est  $X_i \times Y_i \in \text{Rec } A^* \times B^*$ . Comme on a de plus :

$$\beta \odot \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha^{(i)} = \sum_{1 \leq i \leq n} \beta \odot \alpha^{(i)} \quad [\text{resp.} (\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha^{(i)} \odot \beta) = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha^{(i)} \odot \beta],$$

il suffit d'envisager le cas où  $\alpha$  admet une unique image non nulle.

Soit  $\rho$  et  $\sigma$  les transductions rationnelles telles que  $\rho_1 = \alpha$  et  $\sigma_1 = \beta$ . En vertu du paragraphe précédent il existe  $X \in \text{Rat } A^*$  et  $Y \in \text{Rat } B^*$  tels que  $X \times Y = \rho$ . La transduction  $\sigma' = \sigma \cap X \times B^*$  est rationnelle en vertu de la proposition VII. 5. 3 de [4]. Mais alors la transduction associée à  $\alpha \odot \beta$  (resp.  $\beta \odot \alpha$ ) est la transduction rationnelle  $(1 \times Y) \sigma'$  [resp.  $\sigma' (1 \times Y)$ ] ce qui achève la preuve. ■

Remarquons que la condition de la proposition n'est pas nécessaire pour que le produit  $\alpha \odot \beta$  soit rationnel. Posons en effet  $A = B = \{a, b\}$  et considérons les transductions rationnelles (non reconnaissables) suivantes de  $A^* \times B^*$  :

$$r = (a, a)^+, \quad \rho = r(b, 1)^+, \quad s = (b, b)^+, \quad \sigma = (a, 1)^+ s.$$

Alors on a  $\rho_1 \odot \sigma_1 = (rs)_1 \in \text{Rat}_{\text{Rat } B^*} A^*$ . Notons qu'on peut, dans certains cas particuliers, énoncer une condition nécessaire et suffisante (cf. [3]).

4. Le dernier exemple est l'analogie pour le semi-anneau  $\text{Rat } B^*$  du problème suivant évoqué en [4], paragraphe VII. 11.

Soit  $\alpha, \beta$  des séries  $\mathbb{N}$ -rationnelles et considérons la série formelle  $\beta \dot{-} \alpha$  définie pour tout  $u \in A^*$  par :

$$(u) \beta \dot{-} \alpha = \begin{cases} u \beta - u \alpha & \text{si } u \beta - u \alpha \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La série  $\beta \dot{-} \alpha$  n'est pas rationnelle en général. Cependant on montre qu'elle l'est si  $\alpha$  est d'image finie (th. VII . 11 . 1).

De la même façon, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des séries  $\text{Rat } B^*$ -rationnelles, notons  $\beta \setminus \alpha$  la série formelle définie pour tout  $u \in A^*$  par :  $(u) \beta \setminus \alpha = u \beta \setminus u \alpha$ . En général  $\beta \setminus \alpha$  n'est pas rationnelle comme le montre l'exemple qui suit.

Posons  $A = B = \{ a, b \}$  et considérons les transductions rationnelles

$$\rho = (a, 1)^* (b, b)^* \quad \text{et} \quad \sigma = (a, b)^* (b, 1)^*.$$

Si la transduction

$$\tau = \{ (a^n b^p, b^p) \mid n \neq p \} \subseteq A^* \times B^*$$

associée à  $\rho_1 \setminus \sigma_1$  était rationnelle, en notant  $\pi_1$  la projection canonique de  $A^* \times B^*$  sur  $A^*$  on aurait :

$$\tau \pi_1 = \{ a^n b^p \in A^* \mid n \neq p \} \in \text{Rat } A^*$$

ce qui n'est pas.

Ici, comme pour le cas du semi-anneau  $\mathbb{N}$  on peut montrer :

**PROPOSITION 2.4 :** *Soit  $\alpha, \beta \in \text{Rat}_{\text{Rat } B^*} A^*$ . Si  $\alpha$  est d'image finie, alors  $\beta \setminus \alpha \in \text{Rat}_{\text{Rat } B^*} A^*$ .*

*Preuve :* Soit  $\{ Y_i \in \text{Rat } B^* \mid 1 \leq i \leq n \}$  l'image de  $\alpha$  et  $\rho, \sigma \in \text{Rat } A^* \times B^*$  les transductions telles que  $\rho_1 = \alpha$  et  $\sigma_1 = \beta$ . Avec les notations du théorème 1 . 1, on a

$$\rho = \bigcup_{1 \leq i \leq n} X_i \times Y_i.$$

La transduction  $\tau = \sigma \setminus \rho$  est associée à  $\beta \setminus \alpha$ . Il vient

$$\tau = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \sigma \cap (X_i \times B^* \setminus Y_i).$$

Cette transduction étant une union finie d'intersections d'une partie rationnelle avec une partie reconnaissable est, en raison de la proposition VII . 5 . 3 de [4], elle-même rationnelle. ■

### III. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1

Nous allons d'abord établir un lemme technique qui montre que sous certaines hypothèses portant sur la transduction rationnelle  $\rho \subseteq A^* \times B^*$  on a : pour tout  $Y \subseteq B^*$ ,  $Y \rho_1^{-1} \in \text{Rat } A^*$ . Nous montrons par un contre exemple que cette propriété n'est pas générale.



Soit  $\rho \subseteq A^* \times B^*$  une transduction et  $\pi_1$  le morphisme canonique de  $A^* \times B^*$  sur  $A^*$ . A tout  $Y \subseteq B^*$  on associe la partie  $Yc = A^* \setminus (\rho \cap A^* \times (B^* \setminus Y)) \pi_1$ .

LEMME 3.1 : Soit  $\rho \subseteq A^* \times B^*$  et  $Y \subseteq B^*$ . Alors on a :

(i)  $Y \rho_1^{-1} = Yc \setminus \bigcup_{Y' \in Y} Y'c$ ;

(ii) si  $\rho$  est rationnelle et si  $Y \in \text{Rat } B^*$ , alors  $Yc \in \text{Rat } A^*$ .

Comme conséquence immédiate on a le :

COROLLAIRE 3.2 : Soit  $\rho \subseteq A^* \times B^*$  une transduction rationnelle telle que  $u \rho_1 \subseteq B^*$  est une partie finie pour tout  $u \in A^*$ . Alors pour tout  $Y \subseteq B^*$ ,  $Y \rho_1^{-1} \in \text{Rat } A^*$ . ■

Preuve de 3.1 : (i) pour tout  $Y \subseteq B^*$  on pose

$$Z = \{u \in A^* \mid u \rho_1 \subseteq Y\}.$$

Il suffit de vérifier l'égalité  $Yc = Z$  :

(a)  $Yc \subseteq Z$  : soit  $u \in Yc$  et  $u \rho_1 = Y' \subseteq B^*$ . Pour tout  $(u, v) \in \rho$  on a  $(u, v) \in \rho \cap A^* \times (B^* \setminus Y)$  c'est-à-dire  $v \in Y$  ce qui implique  $Y' \subseteq Y$  et donc  $Yc \subseteq Z$ ;

(b)  $Z \subseteq Yc$  : supposons par l'absurde qu'il existe un mot  $u \in Z$  n'appartenant pas à  $Yc$ . On aurait donc  $(u, v) \in A^* \times (B^* \setminus Y)$  pour un certain  $v \in B^*$  ce qui contredirait  $v \in u \rho_1 \subseteq Y$ ;

(ii) si  $\rho \in \text{Rat } A^* \times B^*$ , alors en raison de la proposition VII.5.3 de [4], il en est de même de  $\rho \cap A^* \times (B^* \setminus Y)$ , donc de  $(\rho \cap (A^* \times B^* \setminus Y)) \pi_1$  (prop. VII.2.4) et finalement de  $Yc$ . ■

REMARQUE : Soit  $A = \{a, b, c\}$  et  $B = \{x, y, t\}$  et considérons les transductions rationnelles :

$$\rho = (1, x)[((a, 1)(1, t)^+)^+ (b, 1)^+ \cup (a, 1)^+ (b, 1)((b, 1) \cup (b, t))^*](c, 1)^+.$$

$$\sigma = (1, y)(a, 1)^+ [((b, 1)(1, t)^+)^+ (c, 1)^+ \cup (b, 1)^+ (c, 1)((c, 1) \cup (c, t))^*].$$

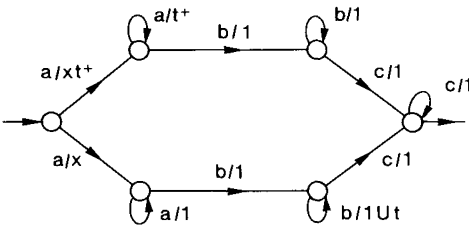


Fig. 2

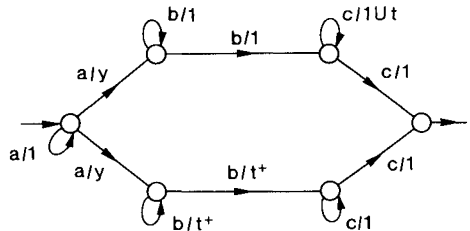


Fig. 2

Les fonctions  $\rho_1$  et  $\sigma_1$  sont définies pour tout  $u \in A^*$  par :

$$\begin{aligned} u \rho_1 &= u \sigma_1 = \emptyset & \text{si } u \notin a^+ b^+ c^+, \\ a^n b^p c^q \rho_1 &= x(t^n t^* \cup t^* \setminus t^* t^p), & n, p, q > 0, \\ a^n b^p c^q \sigma_1 &= y(t^p t^* \cup t^* \setminus t^* t^q), & n, p, q > 0. \end{aligned}$$

La transduction rationnelle  $\tau = \rho \cup \sigma$  vérifie alors :

$$u \tau_1 = \emptyset \quad \text{si } u \notin a^+ b^+ c^+,$$

et

$$a^n b^p c^q \tau_1 = x(t^n t^* \cup t^* \setminus t^* t^p) \cup y(t^p t^* \cup t^* \setminus t^* t^q)$$

où  $n, p, q > 0$ .

Alors il vient  $a^n b^p c^q \tau_1 = \{x, y\} t^*$  ssi  $0 < n \leq p \leq q$ . Or il est bien connu que  $\{a^n b^p c^q \mid 0 < n \leq p \leq q\}$  n'est pas rationnel (ni algébrique).

*Preuve du théorème 1.1 :* (i)  $\Rightarrow$  (ii) soit  $h$  un morphisme de  $A^* \times B^*$  sur un monoïde fini  $S$  et  $S' \subseteq S$  une partie tels que lon ait  $\rho = S' h^{-1}$ . Notons  $\varphi$  (resp.  $\psi$ ) la restriction de  $h$  au sous-monoïde  $A^* \times 1$  (resp.  $1 \times B^*$ ) et posons

$$F = (A^* \times 1) \varphi \quad \text{et} \quad G = (1 \times B^*) \psi$$

A tout  $x \in F$  on associe  $x \chi = \bigcup_{\substack{y \in G \\ xy \in S'}} y \psi^{-1}$ . La partie  $x \chi$  est rationnelle en vertu du

théorème de Kleene et on a pour tout  $u \in A^* : u \rho_1 = u \varphi \chi$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) évident puisque le nombre d'images distinctes de  $\rho_1$  est au plus égal au cardinal de  $F$ ;

(iii)  $\Rightarrow$  (i) soit  $Y_i \in \text{Rat } B^*$  ( $1 \leq i \leq n$ ) les images distinctes de  $\rho_1$ . On a alors :

$$\rho = \bigcup_{1 \leq i \leq n} X_i \times Y_i \quad \text{où } X_i = Y_i \rho_1^{-1}.$$

En raison du lemme 3.1, on a  $X_i \in \text{Rat } A^*$ . Le théorème 1.2 montre qu'alors  $\rho \in \text{Rec } A^* \times B^*$ . ■

### BIBLIOGRAPHIE

1. J. BERSTEL, *Some Recent Results on Recognizable Formal Power Series in Fundamentals of Computation Theory*, KARPINSKI, éd., Lecture Notes in Computer Science, n° 56, Springer, 1977, p. 39-48.
2. L. BOASSON, B. COURCELLE et M. NIVAT, *A New Complexity Measure for Languages in Conference on Theoretical Computer Sciences*, Waterloo, Canada, 1977.

3. C. CHOFFRUT, *Thèse de Doctorat d'État*, en préparation.
4. S. EILENBERG, *Automata, Languages and Machines*, Vol. A, Academic Press, New York, 1974.
5. M. FLIESS, *Matrices de Hansel*, J. Math. Pures appl., vol. 53, 1974, p. 197-222.
6. C. C. ELGOT et G. MEZEI, *On Relations Defined by Generalized Finite Automata*, I.B.M.J. Res. Develop., vol. 9, 1965, p. 47-65.
7. A. MANDEL, *K-subconjuntos limitados de um monoïde livre*, Dissertação de Maestrado, Universidade de Sao Paulo, 1976.
8. M. NIVAT, *Transductions des langages de Chomsky*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 18, 1968, p. 339-455.
9. C. REUTENAUER, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 284, série A, 1977, p. 1159.
10. E. SONTAG, *On Some Questions of Rationality and Decidability*, J. Comput. System Sc., vol. 11, 1975, p. 375-381.