RAIRO. INFORMATIQUE THÉORIQUE

MAURICE NIVAT

Mots infinis engendrés par une grammaire algébrique

RAIRO. Informatique théorique, tome 11, nº 4 (1977), p. 311-327
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1977__11_4_311_0>

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Computer Science
(vol. 11, n° 4, 1977, p. 311 à 327)

MOTS INFINIS ENGENDRÉS PAR UNE GRAMMAIRE ALGÉBRIQUE (*)

par Maurice NIVAT [1]

Communiqué par J. BERSTEL

Résumé. — *Cet article caractérise les langages de mots infinis engendrés par des grammaires algébriques (Context-free), ou « ω-context-free languages », à l'aide des points fixes maximaux d'applications associées aux grammaires algébriques sous forme normale de Greibach.*

INTRODUCTION

L'ensemble des mots infinis reconnus par un automate fini a été défini et étudié par R. MacNaugthon [5] : la famille de ces *langages rationnels de mots infinis* peut être caractérisée comme la *fermeture rationnelle infinie* de la famille des langages rationnels de mots finis. Précisément un langage de mots infinis $L \subset X^\omega$ est rationnel si et seulement si il est de la forme $L = \bigcup_{i=1}^{i=n} K_i (K_i')^\omega$ où pour tout $i = 1, \ldots, n$ K_i et K_i' sont des langages rationnels de mots finis. La preuve de ce théorème a été simplifiée par Y. Choueka [2] et on peut trouver un bon exposé de cette théorie dans l'ouvrage classique de S. Eilenkerg [4].

Une théorie similaire des ensembles de mots infinis reconnus par des automates à mémoire pile (push-down automata) a été récemment édifiée par R. Cohen et A. Gold [3]

Ces deux auteurs démontrent en particulier l'équivalence de trois définitions des *langages algébriques de mots infinis*, à savoir comme ensemble de mots infinis reconnus par un automate à mémoire pile, comme ensemble de mots infinis engendrés par une grammaire algébrique, enfin comme éléments de la fermeture rationnelle infinie de la famille des langages algébriques de mots finis (c'est-à-dire les ensembles de la forme $L = \bigcup_{i=1}^{i=n} L_i (L_i')^\omega$ où L_i et L_i' sont pour tout i des langages algébriques).

Notre but dans cet article est d'établir pour les langages algébriques de mots infinis un théorème de point fixe analogue au théorème de M. P. Schützenberger pour les langages algébriques de mots finis [6]. Si G

(*) Reçu en juillet 1977.

[1] Laboratoire d'Informatique théorique et Programmation U.E.R. de Mathématiques, Université-Paris VII.

est une grammaire algébrique sur l'alphabet X avec comme ensemble de variables (ou non-terminaux) $\Xi = \{ \xi_1, \ldots, \xi_N \}$ on peut associer à G une application $\hat{G}$ de l'ensemble des N-vecteurs de parties de X^* dans lui-même dont le plus petit point fixe $\mu(\hat{G})$ est le N-vecteur de langages

$$\overrightarrow{L(G)} = \langle L(G, \xi_1), \ldots, L(G, \xi_N) \rangle.$$

Notre théorème est tout à fait similaire : si G est une telle grammaire algébrique, en forme normale de Greibach, la même application $\hat{G}$ étendue à l'ensemble des N-vecteurs de parties de $X^* \cup X^\omega$ admet dans cet ensemble un plus grand point fixe $\nu^\omega(\hat{G})$, égal à

$$\overrightarrow{L(G)} \cup \overrightarrow{L^\omega(G)} = \langle L(G, \xi_1) \cup L^\omega(G, \xi_1), \ldots, L(G, \xi_N) \cup L^\omega(G, \xi_N) \rangle$$

où $L^\omega(G, \xi)$ est l'ensemble des mots infinis engendrés par G à partir de ξ.

Ce théorème se généralise aux ensembles d'arbres infinis engendrés par une grammaire algébrique d'arbres et, ainsi généralisé, permet de proposer une sémantique dénotationnelle des programmes récursifs non-déterministes : *voir* A. Arnold et M. Nivat [1].

Notre travail s'organise ainsi : après avoir rappelé quelques définitions et propriétés élémentaires sur les mots infinis (section I) et sur les grammaires algébriques (*alias* context-free) (section II), nous donnons dans la section III une série de propriétés de la substitution d'un vecteur de langages à un vecteur de symboles non-terminaux, que nous utilisons dans la section IV pour démontrer le théorème de Schützenberger (th. 1) et son analogue relatif au plus grand point fixe (th. 2) pour les langages algébriques de mots finis; la section V et dernière est consacrée à l'étude des dérivations infinies et à la démonstration du résultat annoncé (th. 3).

I. MOTS INFINIS

Nous notons $\mathbf{N}^+$ l'ensemble des entiers strictement positifs et $[n]$ le sous-ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ de $\mathbf{N}^+$.

Soit X un alphabet quelconque non-vide : un mot infini u sur X est une application $u : \mathbf{N}^+ \to X$. Pour chaque entier n, nous notons $u(n)$ la valeur de u en n, aussi appelée n-ième lettre de u. L'ensemble des mots infinis sur X est noté X^ω.

Si $v \in X^*$ est un mot fini c'est-à-dire une suite finie de lettres de X nous noterons également $v(n)$ la n-ième lettre de v en considérant v comme une application de $[\,|v|\,]$ dans X, $|v|$ désignant la longueur de v.

La notion fondamentale pour notre propos est celle de facteur gauche : Si $v \in X^*$ et $u \in X^\omega$, le produit vu est défini par $vu(n) = v(n)$ pour $n \in [\,|v|\,]$, et $vu(n+|v|) = u(n)$ pour $n \in \mathbf{N}^+$. Le mot $v \in X^*$ est alors dit *facteur gauche* de $u \in X^\omega$ si et seulement si il existe $u' \in X^\omega$ tel que $u = vu'$.

Nous notons $v < u$ la relation « v est facteur gauche de u » et $FG(u)$ l'ensemble des facteurs gauches de u : clairement $v < u$ ssi $\forall n \in [|v|]$: $v(n) = u(n)$. Si nous pouvons multiplier un mot infini à gauche par un mot fini nous ne pouvons en faire autant à droite. Nous posons pour tout $n \in X^\omega$, $v \in X^* \cup X^\omega$: $uv = u$.

L'ensemble des facteurs gauches $FG(u)$ de $u \in X^\omega$ possède les deux propriétés suivantes :

– $FG(u)$ est totalement ordonné par $<$ c'est-à-dire satisfait : $\forall v, v' \in FG(u), v < v'$ ou $v' < v$;

– $FG(u)$ est infini.

Réciproquement, si $A \subset X^*$ est un ensemble infini totalement ordonné par $<$ il existe un et un seul mot infini $u \in X^\omega$ tel que $A \subset FG(u)$: en effet si A est totalement ordonné par $<$, pour tout $v, v' \in A$ tels que $|v| \geqq n$ et $|v'| \geqq n$ on a $v(n) = v'(n)$ puisque $v < v'$ ou $v' < v$. Si d'autre part A est infini pour tout $n \in \mathbf{N}^+$ il existe $v \in A$ tel que $|v| \geqq n$. On prendra donc pour tout $n \in \mathbf{N}^+$, $u(n)$ égal à la valeur commune des $v(n)$, $v \in A$ $|v| \geqq n$. Nous notons $\lim(A)$ ce mot infini u unique tel que $A \subset FG(u)$.

II. GRAMMAIRES ALGÉBRIQUES ET DÉRIVATIONS

Une grammaire algébrique sur X est un système d'équations de la forme

$$G \left\{ \begin{array}{c} \xi_i = P_i, \\ i = 1, \ldots, N, \end{array} \right.$$

où $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ est l'ensemble des variables ou non-terminaux, et pour tout $i \in [N]$, P_i est une partie finie de $(X \cup \Xi)^*$.

La grammaire G est dite faiblement de Greibach ssi, pour tout $i \in [N]$, $P_i \subset (X \cup \Xi)^* X (X \cup \Xi)^*$.

Elle est dite de Greibach ssi, pour tout $i \in [N]$, $P_i \subset X(X \cup \Xi)^*$.

A une grammaire G nous associons plusieurs relations sur $(X \cup \Xi)^*$. La relation notée $\xrightarrow{*}$ est la fermeture réflexive et transitive de la relation notée $\rightarrow$ définie par :

$$t \rightarrow t' \iff \exists \alpha, \beta \in (X \cup \Xi)^*, \qquad j \in [N], \qquad p \in P_j$$

tels que

$$t = \alpha \xi_j \beta \qquad \text{et} \qquad t' = \alpha p \beta.$$

La relation $t \xrightarrow{*} t'$ se lit « t se dérive en t' », ou « t' dérive de t » dans G : c'est la relation habituelle de dérivation qui permet de définir le langage engendré par G avec t comme axiome, $L(G, t) = \{t' \in X^* \mid t \rightarrow t'\}$.

Nous utiliserons beaucoup la relation $\xrightarrow{k}$ qui est définie par :

$$t \xrightarrow{k} t' \Leftrightarrow \exists h \in [k]$$

et $h+1$ mots $t_1, \ldots, t_{h+1}$ de $(X \cup \Xi)^*$ tels que $t_1 = t$, $t_{h+1} = t'$ et, pour tout $i \in [h]$, $t_i \to t_{i+1}$. On convient que $t \xrightarrow{0} t' \Leftrightarrow t = t'$.

Rappelons deux faits bien connus :

Fait 1 : *Soit* $t = \alpha_0 \xi_{i_1} \alpha_1 \xi_{i_l} \ldots \alpha_{k_{-1}} \xi_{i_l} \alpha_l$ *un mot de* $(X \cup \Xi)^*$ *avec* $\alpha_0, \ldots, \alpha_l \in X^*$ *et* $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_l} \in \Xi$.

Nous avons $t \xrightarrow{k} t'$ *ssi il existe des entiers* $k_1, \ldots, k_l$ *des mots* $p_1, \ldots, p_l$ *tels que* $t' = \alpha_0 p_1 \alpha_1 p_2 \ldots \alpha_{l_{-1}} p_l \alpha_l$, pour tout $j \in [l]$ $\xi_{i_j} \xrightarrow{k_j} p_j$ et $k_1 + \ldots + k_l = k$.

Fait 2 : Appelons *facteur gauche terminal* de $t \in (X \cup \Xi)^*$ tout mot $v \in X^*$ tel que $v < t$, et notons $FGT(t)$ l'ensemble de ces facteurs gauches terminaux. *Nous avons* $t \xrightarrow{*} t' \Rightarrow FGT(t) \subset FGT(t')$.

III. SUBSTITUTION

Soit $\vec{Q} = \langle Q_1, \ldots, Q_N \rangle$ un N-vecteur de parties de $(X \cup \Xi)^*$ et $\vec{\xi}$ le vecteur $\langle \xi_1, \ldots, \xi_N \rangle$.

Nous définissons la substitution de $\vec{Q}$ à $\vec{\xi}$ comme l'application de $(X \cup \Xi)^*$ dans $2^{(X \cup \Xi)^*}$ donnée par : si $t \in (X \cup \Xi)^*$ s'écrit

$$t = \alpha_0 \xi_{i_1} \alpha_1 \xi_{i_2} \ldots \alpha_{l-1} \xi_{i_l} \alpha_l,$$

avec $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l \in X^*$ et $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_l} \in \Xi$, alors on pose

$$t[\vec{Q}/\vec{\xi}] = \{\alpha_0 q_1 \alpha_1 q_2 \ldots \alpha_{l-1} q_l \alpha_l \mid \forall j \in [l] \text{ et } q_j \in Q_{i_j}\}.$$

On étend $[\vec{Q}/\vec{\xi}]$ en une application de $2^{(X \cup \Xi)^*}$ dans lui-même en posant pour tout $B \subset (X \cup \Xi)^*$:

$$B[\vec{Q}/\vec{\xi}] = \bigcup_{t \in B} t[\vec{Q}/\vec{\xi}].$$

Remarquons tout d'abord que $[\vec{Q}/\vec{\xi}]$ est un morphisme du monoïde $(X \cup \Xi)^*$ dans la structure multiplicative de $2^{(X \cup \Xi)^*}$, autrement dit pour tout $t_1, t_2 \in (X \cup \Xi)^*$ on a

$$t_1 t_2 [\vec{Q}/\vec{\xi}] = t_1 [\vec{Q}/\vec{\xi}] t_2 [\vec{Q}/\vec{\xi}].$$

Il s'ensuit que $[\vec{Q}/\vec{\xi}]$ est aussi un endo-morphisme de $2^{(X \cup \Xi)^*}$ pourvu de sa structure de monoïde multiplicatif.

De la définition de $B[\vec{Q}/\vec{\xi}]$ pour $B \subset 2^{(X \cup \Xi)^*}$ résulte directement que $[\vec{Q}/\vec{\xi}]$ est une application croissante de $2^{(X \cup \Xi)^*}$, ordonné par inclusion, dans lui-même.

Nous allons maintenant établir un certain nombre de propriétés qui nous permettront de caractériser plus loin les langages engendrés par une grammaire algébrique au moyen de la substitution.

Nous notons $\vec{P}$ le vecteur $\langle P_1, \ldots, P_N \rangle$ associé à la grammaire $G : \xi_i = P_i$, $i = 1, \ldots, N$.

On remarque que :

$$t' \in t[\vec{P}/\vec{\xi}] \Rightarrow t \xrightarrow{*} t'.$$

Nous posons, comme pour toute application,

$$[\vec{P}/\vec{\xi}]^0 = \text{identité}$$

et pour tout entier l,

$$[\vec{P}/\vec{\xi}]^{l+1} = [\vec{P}/\vec{\xi}]^l [\vec{P}/\vec{\xi}].$$

LEMME 1 : *$t_1 \to t_2$ et $t_3 \in t_2 [\vec{P}/\vec{\xi}]^l$ impliquent :*

$$\exists\, t_4 \in t_1 [\vec{P}/\vec{\xi}]^{l+1} \textit{ tel que } t_3 \xrightarrow{*} t_4.$$

Démonstration : Soit $t_1 = \alpha \xi_j \beta$, $t_2 = \alpha p \beta$ avec $p \in P_j$. La substitution de $\vec{P}$ à $\vec{\xi}$ étant un morphisme on peut écrire $t_3 = \alpha' p' \beta'$, avec

$$\alpha' \in \alpha [\vec{P}/\vec{\xi}]^l, \qquad p' \in p [\vec{P}/\vec{\xi}]^l \qquad \text{et} \qquad \beta' \in \beta [\vec{P}/\vec{\xi}]^l.$$

Mais $p' \in p [\vec{P}/\vec{\xi}]^l$ implique $p' \in \xi_j [\vec{P}/\vec{\xi}]^{l+1}$.

Choisissons alors $\alpha'' \in \alpha' [\vec{P}/\vec{\xi}]$ et $\beta'' \in \beta' [\vec{P}/\vec{\xi}]$.

Nous avons

$$\alpha' \xrightarrow{*} \alpha'' \qquad \text{et} \qquad \beta' \xrightarrow{*} \beta''.$$

D'où

$$\alpha'' p' \beta'' \in t_1 [\vec{P}/\vec{\xi}]^{l+1} \qquad \text{et} \qquad t_3 \xrightarrow{*} \alpha'' p' \beta''. \quad \square$$

LEMME 2 : *$t_1 \xrightarrow{k} t_2$ implique : $\exists\, t_3 \in t_1 [\vec{P}/\vec{\xi}]^k$ tel que $t_2 \xrightarrow{*} t_3$.*

Démonstration : Pour $k = 1$ on peut prendre

$$t_1 = \alpha \xi_j \beta, \qquad t_2 = \alpha p \beta,$$

d'où, si

$$\alpha' \in \alpha [\vec{P}/\vec{\xi}] \qquad \text{et} \qquad \beta' \in \beta [\vec{P}/\vec{\xi}],$$

on a

$$\alpha' p \beta' \in t_1 [\vec{P}/\vec{\xi}] \qquad \text{et} \qquad t_2 = \alpha p \beta \xrightarrow{*} \alpha' p \beta'.$$

Supposons donc la propriété vraie pour k. Considérons $t_1 \xrightarrow{k+1} t_2$, que nous écrivons $t_1 \rightarrow t_3 \xrightarrow{k} t_2$.

Pour récurrence il existe $t_4 \in t_3 [\vec{P}/\vec{\xi}]^k$ tel que $t_2 \xrightarrow{*} t_4$. Par le lemme précédent $t_1 \rightarrow t_3$ et $t_4 \in t_3 [\vec{P}/\vec{\xi}]^k$ impliquent qu'il existe $t_5 \in t_1 [\vec{P}/\vec{\xi}]^{k+1}$ tel que $t_4 \xrightarrow{*} t_5$. Mais $t_2 \xrightarrow{*} t_4$ et $t_4 \xrightarrow{*} t_5$ impliquent $t_2 \xrightarrow{*} t_5$ d'où le résultat. □

LEMME 3 : *$t_1 \rightarrow t_2$ et $t_3 \in t_2 [\vec{P}/\vec{\xi}]^l$ impliquent*

$$\exists\, t_4 \in t_1 [\vec{P}/\vec{\xi}]^l \text{ tel que } t_4 \xrightarrow{*} t_3.$$

Démonstration : On prend, comme dans la démonstration du lemme 1,

$$t_1 = \alpha \xi_j \beta, \qquad t_2 = \alpha p \beta, \qquad t_3 = \alpha' p' \beta'$$

avec

$$p \in P_j, \qquad \alpha' \in \alpha [\vec{P}/\vec{\xi}]^l,$$

$$p' \in p [\vec{P}/\vec{\xi}]^l \qquad \text{et} \qquad \beta' \in \beta [\vec{P}/\vec{\xi}]^l.$$

Supposons $l \geqq 1$:

Comme

$$p [\vec{P}/\vec{\xi}]^l = p [\vec{P}/\vec{\xi}]^{l-1} [\vec{P}/\vec{\xi}],$$

il existe $p'' \in p [\vec{P}/\vec{\xi}]^{l+1}$ tel que $p' \in p'' [\vec{P}/\vec{\xi}]$ et donc $p'' \xrightarrow{*} p'$.

On prend alors $t_4 = \alpha' p'' \beta$ et l'on a bien

$$t_4 \in t_1 [\vec{P}/\vec{\xi}]^l \qquad \text{et} \qquad t_4 = \alpha' p'' \beta' \xrightarrow{*} \alpha' p' \beta' = t_3.$$

Dans le cas $l = 0$ il n'y a rien à démontrer. □

LEMME 4 : *$t_1 \xrightarrow{*} t_2$ et $t_2 \in X^*$ impliquent : pour tout $l \geqq 0$ il existe $u_l \in t_1 [\vec{P}/\vec{\xi}]^l$ tel que $u_l \xrightarrow{*} t_2$.*

Démonstration : Si $t_1 = t_2 \in X^*$, $t_1 \in t_1 [\vec{P}/\vec{\xi}]^l$ pour tout l et il suffit de prendre $u_l = t_1$.

Supposons la propriété vraie si $t_1 \xrightarrow{k} t_2$ et considérons $t_1 \rightarrow t_3 \xrightarrow{k} t_2$. Alors pour tout $l \geqq 0$ il existe $u_l \in t_3 [\vec{P}/\vec{\xi}]^l$ tel que $u_l \xrightarrow{*} t_2$. Par le lemme 3, pour tout l il existe $v_l \in t_1 [\vec{P}/\vec{\xi}]^l$ tel que $v_l \xrightarrow{*} u_l$ et donc aussi $v_l \xrightarrow{*} t_2$. □

Des lemmes 1, 2, 3 et 4 découlent facilement plusieurs propriétés.

PROPRIÉTÉ 1 : *Pour tout* $t \in (X \cup \Xi)^*$, *on a*

$$L(G, t) = \bigcup_{l=0}^{\infty} t[\vec{P}/\vec{\xi}]^l[\vec{\varnothing}/\vec{\xi}].$$

Nous notons $\vec{\varnothing}$ le N-vecteurs de parties de $(X \cup \Xi)^*$ dont toutes les composantes sont égales à l'ensemble vide.

Démonstration : Soit $t' \in L(G, t)$: on a par définition $t' \in X^*$ et $t \xrightarrow{*} t'$. Par le lemme 2 il existe $t'' \in t[\vec{P}/\vec{\xi}]^l$ pour quelque l tel que $t' \xrightarrow{*} t''$. Or $t' \in X^*$ et $t' \xrightarrow{*} t''$ impliquent $t' = t''$. D'où $t' \in t[\vec{P}/\vec{\xi}]^l$ et aussi $t' \in t[\vec{P}/\vec{\xi}^l[\vec{\varnothing}/\vec{\xi}]$ puisque $t'[\vec{\varnothing}/\vec{\xi}] = \{t'\}$.

Réciproquement soit $t' \in t[\vec{P}/\vec{\xi}]^l[\vec{\varnothing}/\vec{\xi}]$.

On a aussi $t' \in t[\vec{P}/\vec{\xi}]^l \cap X^*$, d'où $t' \in X^*$ et $t \xrightarrow{*} t'$ qui impliquent $t' \in L(G, t)$.

PROPRIÉTÉ 2 : *Si la grammaire G est faiblement de Greibach, pour tout* $t \in (X \cup \Xi)^*$ *on a*

$$L(G, t) = \bigcap_{l=0}^{\infty} t[\vec{P}/\vec{\xi}]^l[\vec{X}^*/\vec{\xi}].$$

Démonstration : Soit $t' \in L(G, t)$. D'après le lemme 4, puisque $t \xrightarrow{*} t'$ et $t' \in X^*$ il existe pour tout $l \geqq 0$, $u_l \in t[\vec{P}/\vec{\xi}]^l$ tel que $u_l \xrightarrow{*} t'$. Mais $u_l \xrightarrow{*} t'$ implique $u_l[\vec{X}^*/\vec{\xi}] \ni t'$.

Réciproquement, soit $t' \in \bigcap_{l=0}^{\infty} t[\vec{P}/\vec{\xi}]^l[\vec{X}^*/\vec{\xi}]$: $t[\vec{P}/\vec{\xi}]^l$ est formé de mots qui dérivent de t au moins à l'ordre l, à moins qu'ils n'appartiennent à X^*.

Ainsi, pour l assez grand, $t' \in t''[\vec{X}^*/\vec{\xi}]$, $t'' \in t[\vec{P}/\vec{\xi}]^l$ impliquent $t'' \in X^*$ puisque autrement on aurait $|t''| \geqq l > |t'|$, ce qui est impossible. Mais $t' = t'' \in t[\vec{P}/\vec{\xi}]^l$ implique $t \xrightarrow{*} t'$ d'où $t' \in L(G, t)$. □

IV. THÉORÈME DE SCHÜTZENBERGER

Considérons l'ensemble noté $(2^{X^*})^N$ des N-vecteurs dont les composantes sont des parties de X^*.

Cet ensemble est ordonné par inclusion composante à composante :

$$\vec{Q} = \langle Q_1, \ldots, Q_N \rangle \subset \vec{Q}' = \langle Q'_1, \ldots, Q'_N \rangle$$
$$\Leftrightarrow \forall i \in [N], \quad Q_i \subset Q'_i.$$

Il est clair que $(2^{X^*})^N$ ainsi ordonné est un treillis complet avec comme *sup* l'union (composante à composante) et comme *inf* l'intersection (composante à composante).

Associons alors à la grammaire $G : \xi_i = P_i$, $i - 1, \ldots, N$, l'application $\hat{G}$ de $(2^{X^*})^N$ dans lui-même définie par :

$$\hat{G}(\vec{Q}) = \vec{P}[\vec{Q}/\vec{\xi}],$$

où $\vec{P}[\vec{Q}/\vec{\xi}]$ est défini comme le N-vecteur,

$$\langle P_1[\vec{Q}/\vec{\xi}], \ldots, P_N[\vec{Q}/\vec{\xi}]\rangle.$$

L'application $\hat{G}$ jouit d'un grand nombre de propriétés.

PROPRIÉTÉ 3 : *L'application G est croissante, c'est-à-dire vérifie :*

$$\forall \vec{Q}, \vec{Q}', \qquad \vec{Q} \subset \vec{Q}' \Rightarrow \hat{G}(\vec{Q}) \subset \hat{G}(\vec{Q}').$$

PROPRIÉTÉ 4 : *L'application $\hat{G}$ est faiblement $\cup$-continue, c'est-à-dire vérifie la condition :*

pour toute chaîne croissante $\vec{Q}^{(n)} \subset \vec{Q}^{(2)} \subset \ldots \subset \vec{Q}^{(n)} \subset \ldots$ de vecteurs de $(2^{X^*})^N$, *on a*

$$\hat{G}(\bigcup_{n \geqq 1} \vec{Q}^{(n)}) = \bigcup_{n \geqq 1} \hat{G}(\vec{Q}^{(n)}).$$

Démonstration : L'inclusion

$$\bigcup_{n \geqq 1} \hat{G}(\vec{Q}^{(n)}) \subset \hat{G}(\bigcup_{n \geqq 1} \vec{Q}^{(n)})$$

est évidente.

Réciproquement soit $t \in \hat{G}(\bigcup_{n \geqq 1} \vec{Q}^{(n)})_l$. Il existe un mot

$$t' = \alpha_0 \xi_{i_1} \alpha_1 \xi_{i_2} \ldots \alpha_{k-1} \xi_{i_k} \alpha_k$$

dans P_l et des mots $h_1, \ldots, h_k$ tels que pour tout $j = 1, \ldots, k$, $h_j \in (\bigcup_{n \geqq 1} Q^{(n)})_{i_j}$ et $t = \alpha_0 h_1 \alpha_1 h_2 \ldots \alpha_{k+1} h_k \alpha_k$.

Mais pour tout j, $h_j \in (\bigcup_{n \geqq 1} \vec{Q}^{(n)})_{i_j}$ implique qu'il existe n_j tel que $h_j \in Q_{i_j}^{(n_j)}$, et si l'on prend $n_0 = \max_{j=1,\ldots,k} (n_j)$ on a, pour tout j, $h_j \in Q_{i_j}^{(n_0)}$ puisque la suite $\vec{Q}^{\,n)}$ est croissante.

Il s'ensuit que $t \in \hat{G}(\vec{Q}^{(n_0)})_l$, d'où l'inclusion cherchée. □

PROPRIÉTÉ 5 : *L'application $\hat{G}$ est faiblement $\cap$-continue, c'est-à-dire vérifie la condition :*

pour toute suite décroissante $\vec{Q}^{(1)} \supset \vec{Q}^{2)} \supset \ldots \supset \vec{Q}^{(n)} \supset \ldots$ de vecteur de $(2^{X^*})^N$ on a

$$\hat{G}(\bigcap_{n \geqq 1} \vec{Q}^{(n)}) = \bigcap_{n \geqq 1} \hat{G}(\vec{Q}^{(n)}).$$

Démonstration : L'inclusion $\hat{G}(\bigcap_{n \geqq 1} \vec{Q}^{(n)}) \subset \bigcap_{n \geqq 1} \hat{G}(\vec{Q}^{(n)})$ découle directement de la croissance de $\hat{G}$.

Réciproquement soit $t \in \bigcap_{n \geqq 1} \hat{G}(Q^{(n)})_l$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe $p \in P_l$ tel que $t \in p[\vec{Q}^{(n)}/\vec{\xi}]$, et comme P_l est fini il existe $p \in P_l$ tel que $t \in p[\vec{Q}^{(n)}/\vec{\xi}]$ pour une infinité de $n \in \mathbf{N}$.

Écrivons alors $p = \alpha_0 \xi_{i_1} \alpha_1 \xi_{i_2} \ldots \alpha_{k-1} \xi_{i_k} \alpha_k$.

L'appartenance de t à $p[\vec{Q}^{(n)}/\vec{\xi}]$ implique l'existence de $p_1, \ldots, p_k$ tels que

$$t = \alpha_0 p_1 \alpha_1 p_2 \ldots \alpha_{k-1} p_k \alpha_k$$

et, pour tout $j - 1, \ldots, k$, $p_j \in \vec{Q}_{ij}^{(n)}$.

Or il existe un nombre fini seulement de suites de mots $p_1, \ldots, p_k$ telles que $t - \alpha_0 p_1 \alpha_1 p_2 \ldots \alpha_{k+1} p_k \alpha_k$.

Par conséquent il en existe une $p_1, \ldots, p_k$ telle que, pour une infinité de $n \in \mathbf{N}$ on ait, pour tout $j = 1, \ldots, k$, $p_j \in Q_{ij}^{(n)}$. La suite des $\vec{Q}^{(n)}$ étant décroissante ceci implique que, pour tout $j = 1, \ldots, k$, $p_j \in \bigcap_{n \geqq 1} Q_{ij}^{(n)}$ et donc $t \in \hat{G}(\bigcap_{n \geqq 1} Q^{(n)})_l$. □

La croissance et la $\cup$-faible continuité de $\hat{G}$ nous assurent alors que :

PROPRIÉTÉ 6 : $\mu(\hat{G}) = \bigcup_{k \geqq 0} \overrightarrow{\hat{G}^k(\varnothing)}$ *est le plus petit point fixe de $\hat{G}$.*

Démonstration : En effet $\mu(\hat{G})$ est point fixe puisque

$$\hat{G}(\bigcup_{k \geqq 0} \overrightarrow{\hat{G}^k(\varnothing)}) = \hat{\bigcup_{k \geqq 1}} \overrightarrow{G^k(\varnothing)} = \bigcup_{k \geqq 0} \overrightarrow{\hat{G}^k(\varnothing)}.$$

Si d'autre part $\vec{Q}$ est point fixe de $\hat{G}$, c'est-à-dire satisfait $\hat{G}(\vec{Q}) = \vec{Q}$, on montre aisément par récurrence que, pour tout k, $\overrightarrow{\hat{G}^k(\varnothing)} \subset \hat{G}^k(\vec{Q}) = \vec{Q}$.

D'où l'inclusion $\mu(\hat{G}) \subset \vec{Q}$.

Le fait que $\mu(\hat{G})$ est plus petit point fixe découle aussi d'un théorème classique de Knaster-Tarski sur les points fixes d'applications croissantes et continues dans un treillis. □

De la même façon, la croissance et la $\cap$-faible continuité de $\hat{G}$ entraînent que :

PROPRIÉTÉ 7 : $\nu(\hat{G}) = \bigcap_{k \geq 0} \hat{G}^k(\overrightarrow{X^*})$ *est le plus grand point fixe de* $\hat{G}$.

Nous notons $\overrightarrow{X^*}$ le N-vecteur dont toutes les composantes sont égales à X^*

Nous avons ainsi établi l'existence d'un plus grand et d'un plus petit point fixe de $\hat{G}$ dans $(2^{X^*})^N$; les formules qui permettent de les calculer, rapprochées des propriétés précédentes, nous permettent de les caractériser.

THÉORÈME 1 : (Schützenberger [6])

$$\mu\hat{G} = \bigcup_{h \geq 0} \hat{G}^h(\overrightarrow{\varnothing})$$

est égal au vecteur

$$\overrightarrow{L(G)} = \langle L(G, \xi_1), \ldots, L(G, \xi_N)\rangle.$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que

$$\hat{G}^k(\overrightarrow{\varnothing}) = \vec{\xi}[\vec{P}/\vec{\xi}]^k[\overrightarrow{\varnothing}/\vec{\xi}].$$

En effet, $\overrightarrow{\varnothing} = \vec{\xi}[\overrightarrow{\varnothing}/\vec{\xi}]$, et si la propriété est vraie pour k on a

$$\begin{aligned}
\hat{G}^{k+1}(\overrightarrow{\varnothing}) &= \vec{P}[\hat{G}^k(\overrightarrow{\varnothing})/\vec{\xi}] \\
&= \vec{\xi}[\vec{P}/\vec{\xi}][\hat{G}^k(\overrightarrow{\varnothing})/\vec{\xi}] \\
&= \vec{\xi}[\vec{P}/\vec{\xi}][\vec{\xi}[\vec{P}/\vec{\xi}]^k[\overrightarrow{\varnothing}/\vec{\xi}]/\vec{\xi}] \\
&= \vec{\xi}[\vec{P}/\vec{\xi}]^{k+1}[\overrightarrow{\varnothing}/\vec{\xi}].
\end{aligned}$$

Et l'on utilise la propriété 1. □

THÉORÈME 2 : *Si la grammaire G est faiblement de Greibach,*

$$\nu\hat{G} = \bigcap_{k \geq 0} \hat{G}^k(\overrightarrow{X^*})$$

est égal au vecteur $\overrightarrow{L(G)}$.

Démonstration : On utilise la même identité que ci-dessus et la propriété 2. □

V. DÉRIVATIONS INFINIES DANS UNE GRAMMAIRE G

Nous appelons *dérivation infinie* dans G toute suite $\{ t_i \mid i \in \mathbf{N}^+ \}$ de mots de $(X \cup \Xi)^*$ tels que, pour tout $i \in \mathbf{N}^+$, $t_i \rightarrow t_{i+1}$.

Cette dérivation est dite *d'origine* t ssi $t_1 = t$.

La dérivation $\{ t_i \mid i \in \mathbf{N}^+ \}$ est dite *terminale* si et seulement si l'ensemble $\bigcup_{i \in \mathbf{N}^+} FGT(t_i)$ est infini.

Nous avons déjà remarqué (fait 2) que cet ensemble est totalement ordonné par $<$. D'où, pour toute dérivation infinie terminale $\{ t_i \mid i \in \mathbf{N}^+ \}$, l'existence d'un mot infini u unique, tel que, pour tout $i \in \mathbf{N}^+$, $FGT(t_i) \subset FG(u)$.

C'est ce mot que nous dirons *engendré par la dérivation infinie* $\{ t_i \mid i \in \mathbf{N}^+ \}$.

Nous notons $t \overset{\omega}{\longrightarrow} u$ ssi il existe une dérivation infinie $\{ t_i \mid i \in \mathbf{N}^+ \}$, d'origine t engendrant u, et nous posons

$$L^{\omega}(G, t) = \{ u \in X^{\omega} \mid t \overset{\omega}{\longrightarrow} u \}.$$

Une autre façon de caractériser les dérivations infinies terminales et les mots qu'elles engendrent est fournie par la :

Propriété 8 : *La dérivation infinie* $\{ t_i \mid i \in \mathbf{N}^+ \}$ *est terminale si et seulement si*

$$\operatorname{card}\Big(\bigcap_{i \in \mathbf{N}^+} t_i [\overrightarrow{X^* \cup \vec{X}^{\omega}/\xi}] \Big) = 1,$$

et en ce cas, le mot unique de cette intersection est le mot infini engendré par la dérivation en questions.

Démonstration : Si $\{ t_i \mid i \in \mathbf{N}^+ \}$ est terminale et engendre $u \in X^{\omega}$, pour tout $n \in \mathbf{N}^+$ il existe $i(n)$ tel que $u[n] < t_{i(n)}$. Or $u[n] < t_{i(n)}$ implique $u[n] < v$ pour tout $v \in t_{i(n)} [\overrightarrow{X^* \cup \vec{X}^{\omega}/\xi}]$. Il s'ensuit que, pour tout $v \in X^*$, il existe un entier i tel que $v \notin t_i [\overrightarrow{X^* \cup \vec{X}^{\omega}/\xi}]$, donc que l'intersection cherchée ne contient aucun mot fini.

Si v par contre est dans X^{ω} et, pour tout $i \in \mathbf{N}^+$, appartient à $t_i [\overrightarrow{X^* \cup \vec{X}^{\omega}/\xi}]$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^+$, $u[n] < v$, ce qui implique $v = u$.

Si au contraire $\{ t_i \mid i \in \mathbf{N}^+ \}$ n'est pas terminale, alors $\bigcup_{i \in \mathbf{N}^+} FGT(t_i)$ contient un plus grand élément α et il existe $n \in \mathbf{N}^+$ tel que, pour tout $i \geqq n$, $t_i \in \alpha\, \Xi\, (X \cup \Xi)^*$.

D'où, pour tout $i \geqq n$, $\alpha X^{\omega} \subset t_i [\overrightarrow{X^* \cup \vec{X}^{\omega}/\xi}]$, et finalement

$$\alpha X^{\omega} \subset \bigcap_{i \in \mathbf{N}^+} t_i [X^* \cup X^{\omega}/\xi],$$

intersection qui est donc de cardinalité infinie. $\square$

Maintenant nous pouvons établir une propriété analogue à la propriété 2, concernant $L^{\omega}(G, t)$, ce qui nécessite quelques lemmes.

LEMME 5 : *Pour tout* $\alpha \in X^*$, $\xi_j \in \Xi$, $v \in (X \cup \Xi)^*$ *et* $t \xrightarrow{*} \alpha\xi_j v$, *il existe* $l \in \mathbf{N}$ *et* $w \in (X \cup \Xi)^*$ *tels que* $\alpha\xi_j w \in t [\vec{P}/\vec{\xi}]^l$.

Démonstration : Si $t = \alpha\xi_j v$ il n'y a rien à démontrer.

Supposons alors le lemme vérifié pour $t \xrightarrow{k} \alpha\xi_j v$ et considérons $t \xrightarrow{k+1} \alpha\xi_j v$. Nous pouvons écrire $t \xrightarrow{k} \alpha' \xi_{j'} v' \to \alpha\xi_j v$, où $\alpha' \in X^*$.

Deux cas sont à examiner :

1. $\xi_{j'} \to \alpha'' \xi_j v v''$, $\alpha - \alpha' \alpha''$ et $v'' v' = v$.

Si alors w' est tel que $\alpha' \xi_{j'} w' \in t [\vec{P}/\vec{\xi}]^l$ pour tout $w'' \in w' [\vec{P}/\vec{\xi}]$, on a

$$\alpha' \alpha'' \xi_j v'' w'' \in t [\vec{P}/\vec{\xi}]^{l+1}.$$

2. $\alpha = \alpha'$, $\xi_i = \xi_{j'}$ et $v' \to v$. Il suffit de prendre $w = w'$ tel que $\alpha\xi_j w' \in t [\vec{P}/\vec{\xi}]^l$. □

Du lemme 5 on déduit alors la propriété :

PROPRIÉTÉ 9 : $L^\omega (G, t) \subset \bigcap_{l=0}^{\infty} t [\vec{P}/\vec{\xi}]^l [\overrightarrow{X^* \cup X^\omega}/\vec{\xi}]$.

Démonstration : Soit en effet $u \in L^\omega (G, t)$. Il existe une dérivation infinie terminale $\{ t_i \mid i \in \mathbf{N}^+ \}$ telle que $u = \lim (\bigcup_{i>0} FGT(t_i)$.

Ceci implique que pour tout $n > 0$ il existe un entier $i(n)$ tel que $t_{i(n)} = \alpha\xi_j v$, $\alpha \in X^*$, $|\alpha| > n$. D'après le lemme 5 il existe alors $w \in (X \cup \Xi)^*$ tel que $\alpha\xi_j w \in t [\vec{P}/\vec{\xi}]^l$.

Ceci implique que $u \in t [\vec{P}/\vec{\xi}]^l [\overrightarrow{X^* \cup X^\omega}/\vec{\xi}]$ puisque

$$u \in \alpha X^\omega \subset t [\vec{P}/\vec{\xi}]^l [\overrightarrow{X^* \cup X^\omega}/\vec{\xi}].$$

En posant $\lambda = \max \{ |p| \mid p \in P_i, | = 1, 2, \ldots, N \}$, on voit que $t' \in t [\vec{P}/\vec{\xi}]^l$ implique $|t'| \leqq |t| \lambda^l$.

On en déduit, si $n > |t| \lambda^m$, que $u \in t [\vec{P}/\vec{\xi}]^m [\overrightarrow{X^* \cup X^\omega}/\vec{\xi}]$.

En considérant, pour tout entier m, l'indice $i(|t| \lambda^m)$, on obtient $u \in t [\vec{P}/\vec{\xi}]^m [\overrightarrow{X^* \cup X^\omega}/\vec{\xi}]$ pour tout m; u appartient donc à l'intersection d'où le résultat. □

Rappelons maintenant le lemme de Kœnig, bien connu :

LEMME 6 (Kœnig) : *Soit* $\{ A_i, i \in \mathbf{N} \}$, *une suite d'ensembles finis telle que* $E = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} A_i$ *soit infini. Soit* $R \subset E \times E$ *une relation sur* E, *telle que, pour tout* $i \in \mathbf{N}$ *et* $y \in A_{i+1}$ *il existe* $x \in A_i$ *tel que* $x R y$. *Alors il existe une suite infinie* $\{ x_i, i \in \mathbf{N} \}$ *d'éléments de* E *telle que, pour tout* $i \in \mathbf{N}$, $x_i \in A_i$ *et* $x_i R x_{i+1}$.

PROPRIÉTÉ 10 : *Si la grammaire G est de Greibach, on a :*

$$\bigcap_{l \geqq 0} t[\vec{P}/\vec{\xi}]^l [\overrightarrow{X^* \cup X^\omega}/\vec{\xi}] \subset L(G, t) \cup L^\omega(G, t).$$

Démonstration : Soit A cette intersection. Il est clair que

$$A \cap X^* = \bigcap_{l=0} t[\vec{P}/\vec{\xi}]^l [\overrightarrow{X^*}/\vec{\xi}] \text{ est égal à } L(G, t),$$

c'est la propriété 2.

Considérons alors $u \in A \cap X^\omega$. Appelons A_l l'ensemble des $t' \in t[\vec{P}/\vec{\xi}]^l$ tels que $u \in t'[\overrightarrow{X^* \cup X^\omega}/\xi]$. Il est clair que, pour tout l, A_l est non vide (puisque $u \in A$) et fini (puisque G est de Greibach). La réunion E des A_l est évidemment infinie.

On sait par ailleurs que pour tout $t'' \in t[\vec{P}/\vec{\xi}]^{l+1}$ il existe $t' \in t[\vec{P}/\vec{\xi}]^l$ tel que $t'' \in t'[\vec{P}/\vec{\xi}]$ et par suite $t' \xrightarrow{*} t''$.

Une application du lemme de Kœnig nous permet alors d'affirmer qu'il existe une suite infinie $\{t_l \mid l \in \mathbf{N}\}$ telle que $t_0 = t$ et, pour tout l, $t_l \xrightarrow{*} t_{l+1}$ et $t_l \in A_l$.

On en déduit facilement une dérivation infinie d'origine t,

$$\{t'_j \mid j \in \mathbf{N}^+\}, \qquad \text{telle que} \quad u \in \bigcap_{j \in \mathbf{N}^+} t'_j[\overrightarrow{X^* \cup X^\omega}/\vec{\xi}].$$

Il suffit d'insérer entre t_l et t_{r+1} les éléments d'une dérivation finie de t_l en t_{l+1}.

Le caractère terminal de la dérivation $\{t'_j \mid j \in \mathbf{N}^+\}$ vient de ce que la grammaire est de Greibach : en effet G de Greibach implique que tout $t' \in t \cdot [\vec{P}/\vec{\xi}]^l$ a un facteur gauche terminal de longueur au moins l. □

Rapprochant les propriétés 9 et 10 nous avons ainsi la :

PROPRIÉTÉ 11 : *Soit G l'application de* $(2^{X^* \cup X^\omega})^N$ *dans lui-même associée à la grammaire G supposée de Greibach. Le vecteur*

$$\overrightarrow{L(G)} \cup \overrightarrow{L^\omega(G)} = \langle L(G, \xi_1) \cup L^\omega(G, \xi_1), \ldots, L(G, \xi_N) \cup L^\omega(G, \xi_N) \rangle,$$

est égal à l'intersection infinie $\bigcap_{l \geqq 0} \hat{G}^l (\overrightarrow{X^* \cup X^\omega})$.

Démonstration : On remarque simplement que, pour tout l,

$$\hat{G}^l(\overrightarrow{X^* \cup X^\omega}) = \vec{\xi}[\vec{P}/\vec{\xi}]^l [\overrightarrow{X^* \cup X^\omega}/\vec{\xi}]. \quad \square$$

Nous obtenons alors le résultat principal de notre travail :

THÉORÈME 3 : *Si la grammaire G est de Greibach, alors*

$$\overrightarrow{L(G)} \cup \overrightarrow{L^{\omega}(G)} = \bigcap_{l \geqq 0} \hat{G}^{l}(\overrightarrow{X^{*} \cup X^{\omega}}),$$

est le plus grand point fixe de l'application $\hat{G}$.

Démonstration : Si $\bigcap_{l \geqq 0} \hat{G}^{l}(\overrightarrow{X^{*} \cup X^{\omega}})$ est point fixe de $\hat{G}$ alors il est plus grand que tous les autres.

En effet, supposons $\vec{Q} = \hat{G}(\vec{Q})$.

De $\vec{Q} \subset \overrightarrow{X^{*} \cup X^{\omega}}$ on tire

$$\vec{Q} = \hat{G}(\vec{Q}) \subset \hat{G}(\overrightarrow{X^{*} \cup X^{\omega}})$$

et, par récurrence, pour tout $l \in \mathbf{N}$,

$$\vec{Q} \subset \hat{G}^{l}(\overrightarrow{X^{*} \cup X^{\omega}}),$$

qui implique

$$\vec{Q} \subset \bigcap_{l \geqq 0} \hat{G}^{l}(\overrightarrow{X^{*} \cup X^{\omega}}).$$

Nous avons trivialement :

$$\hat{G}\Big(\bigcap_{l \geqq 0} \hat{G}^{l}(\overrightarrow{X^{*} \cup X^{\omega}})\Big) \subset \bigcap_{l \geqq 0} \hat{G}^{l}(\overrightarrow{X^{*} \cup X^{\omega}}).$$

Si nous établissons que

$$\overrightarrow{L(G)} \cup \overrightarrow{L^{\omega}(G)} \subset \hat{G}(\overrightarrow{L(G)} \cup \overrightarrow{L^{\omega}(G)}),$$

compte tenu de l'égalité

$$\overrightarrow{L(G)} \cup \overrightarrow{L^{\omega}(G)} = \bigcap_{l \geqq 0} \hat{G}^{l}(\overrightarrow{X^{*} \cup X^{\omega}}),$$

nous avons

$$\hat{G}(\overrightarrow{L(G)} \cup \overrightarrow{L^{\omega}(G)}) \subset \overrightarrow{L(G)} \cup \overrightarrow{L^{\omega}(G)} \subset \hat{G}(\overrightarrow{L(G)} \cup \overrightarrow{L^{\omega}(G)}),$$

d'où l'égalité

$$\overrightarrow{L(G)} \cup \overrightarrow{L^{\omega}(G)} = \hat{G}(\overrightarrow{L(G)} \cup \overrightarrow{L^{\omega}(G)})$$

et le théorème. □

Or l'inégalité

$$\overrightarrow{L(G)} \cup \overrightarrow{L^{\omega}(G)} \subset \hat{G}(\overrightarrow{L(G)} \cup \overrightarrow{L^{\omega}(G)})$$

découle immédiatement du :

LEMME 7 : *Soit*

$$t = \alpha_0 \xi_{i_1} \alpha_1 \xi_{i_2} \ldots \alpha_{k-1} \xi_{i_k} \alpha_k \in (X \cup \Xi)^*,$$

avec $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in X^*$. *Pour tout* $u \in X^{\omega}$, *on a*

$$t \underset{G}{\overset{\omega}{\rightarrow}} u \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, l,\ 1 \leqq l \leqq k, \qquad h_1, \ldots, h_{l-1} \in X^* \qquad et \qquad u' \in X^{\omega}$$

tels que :

– *pour tout* $j - 1, \ldots, l-1$, $\xi_{i_j} \overset{*}{\rightarrow} h_j$;

– $\xi_{i_l}, \overset{\omega}{\rightarrow} u'$;

– $u = \alpha_0 h_1 \alpha_1 h_2 \ldots \alpha_{l-2} h_{l-1} \alpha_{l-1} u'$.

Démonstration : Ce lemme généralise le fait 1 rappelé plus haut. Considérons une dérivation infinie terminale de t en u dans G,

$$t \rightarrow t^{(1)} \rightarrow t^{(2)} \rightarrow \ldots \rightarrow t^{(n)} \rightarrow \ldots$$

avec

$$u = \lim(\bigcup_{n \geqq 1} FGT(t^{(n)})).$$

Pour tout n il existe $t_1^{(n)}, \ldots, t_k^{(n)} \in (X \cup \Xi)^*$ tels que

$$t^{(n)} = \alpha_0 t_1^{(n)} \alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} t_k^{(n)} \alpha_k$$

et, pour tout $j - 1, \ldots, k$, $t_j^{(n-1)} \underset{G}{\overset{*}{\rightarrow}} t_j^{(n)}$, en vertu du fait 1 et en prenant $t_j^{(0)} = \xi_{i_j}$ pour tout j.

Pour tout n il existe un plus petit indice $\pi(n)$ tel que :

– $1 \leqq \pi(n) \leqq k$;

– $t_{\pi(n)}^{(n)} \in X^* \Xi (X \cup \Xi)^*$;

– pour tout $j = 1, \ldots, \pi(n)-1$ on a $t_j^{(n)} \in X^*$.

En effet, si tel n'était pas le cas, on aurait $t^{(n)} \in X^*$, et la dérivation ne serait pas infinie.

La suite des indices $\pi(n)$ est croissante, bornée par k, donc stationnaire à partir d'un certain rang. Supposons donc que, pour tout $n \geqq N_0$, on ait $\pi(n) = l$.

La suite

$$t_l^{(N_0)} \overset{*}{\rightarrow} t_l^{(N_0+1)} \overset{*}{\rightarrow} \ldots \overset{*}{\rightarrow} t_l^{(N_0+p)} \overset{*}{\rightarrow}$$

est une dérivation terminale puisque

$$FGT(t^{(N_0+p)}) = \alpha_0\, t_1^{(N_0)} \ldots \alpha_{l-2}\, t_{l-1}^{(N_0)} \alpha_{l-1}\, FGT(t_l^{(N_0+p)}),$$

et par suite $\bigcup_{p \geqq 0} FGT(t_l^{(N_0+p)})$ est infinie.

Soit

$$u' = \lim\Big(\bigcup_{p \geqq 0} FGT(t_l^{(N_0+p)})\Big).$$

Nous avons

$$u = \alpha_0\, t_1^{(N_0)} \ldots \alpha_{l-2}\, t_{l-1}^{(N_0)} \alpha_{l-1}\, u'$$

avec, pour tout $j = 1, \ldots, l-1$, $\xi_{i_j} \xrightarrow{*} t_j^{(N_0)}$, et $\xi_{i_l} \xrightarrow{*} t_l^{(N_0)} \xrightarrow{\omega} u'$.

La réciproque est immédiate. □

Remarque : Il n'est pas vrai en général que le vecteur $\overrightarrow{L(G)} \cup \overrightarrow{L^\omega(G)}$ soit plus grand point fixe de $\hat{G}$, car, en l'absence d'hypothèses sur la grammaire G, $\hat{G}$ n'est pas faiblement $\cap$-continue comme application de $(2^{X^* \cup X^\omega})^N$ dans lui-même. Le contre exemple suivant suffit à le montrer :

G est la grammaire

$$\begin{cases} \xi_1 = a\,\xi_1\, b\,\xi_2, \\ \xi_2 = \xi_2. \end{cases}$$

On considère la suite décroissante

$$Q^{(1)} \underset{\neq}{\supset} Q^{(2)} \underset{\neq}{\supset} \ldots \underset{\neq}{\supset} Q^{(i)} \underset{\neq}{\supset} \ldots$$

où

$$Q_1^{(i)} = (ba)^i (ba)^* \qquad \text{et} \qquad Q_2^{(i)} = (ab)^\omega.$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}^+$ on a $(ab)^\omega \in a\,\xi_1\, b\,\xi_2\,[\overrightarrow{Q^{(i)}}/\vec{\xi}]$ puisque

$$(ab)^\omega = a\,(ba)^i\, b\,(ab)^\omega.$$

D'où

$$(ab)^\omega \in \bigcap_{i \geqq 0} \hat{G}(\overrightarrow{Q^{(i)}})_1.$$

Mais $(ab)^\omega \notin \hat{G}(\cap\, \overrightarrow{Q^{(i)}})_1$ puisque $(\cap\, \overrightarrow{Q^{(i)}})_1 = \Phi$. □

On peut préciser cette affirmation par l'énoncé suivant :

Scolie : *S'il existe $i \in [N]$ et $w \in (X \cup \Xi)^*$ tels que $\xi_i \to \xi_i w$, alors $\overrightarrow{L(G)} \cup \overrightarrow{L^\omega(G)}$ n'est en général pas plus grand point fixe de $\hat{G}$.*

Démonstration : Supposons $L^\omega(G, \xi_i) \neq X^\omega$ et prenons $u \in X^\omega \setminus L^\omega(G, \xi_i)$. Définissons le vecteur $\vec{A}$ par

$$A_j = L(G, \xi_j) \cup L^\omega(G, \xi_j) \quad \text{pour tout } j \neq i$$

et

$$A_i = L(G, \xi_i) \cup L^\omega(G, \xi_i) \cup \{u\}$$

et considérons $\hat{G}(\vec{A})$. Il est clair que nous avons $\vec{A} \subset \hat{G}(\vec{A})$ puisque $\overrightarrow{L(G)} \cup \overrightarrow{L^\omega(G)} \subset \hat{G}(\vec{A})$ et $u \in \hat{G}(\vec{A})_i$ (en fait $u \in \xi_i w[\vec{Q}/\vec{\xi}]$ pour tout $\vec{Q}$ tel que $u \in \vec{Q}_i$).

La suite des $\hat{G}^k(A)$ est alors croissante, et $\bigcup_{k \geq 0} \hat{G}^k(\vec{A})$ est point fixe de $\vec{G}$ en vertu de la $\cup$-continuité.

Or

$$\overrightarrow{L(G)} \cup \overrightarrow{L^\omega(G)} \underset{\neq}{\subset} \vec{A} \subset \bigcup_{k \geq 0} \hat{G}^k(\vec{A}). \quad \square$$

REMERCIEMENTS

L'auteur tient à remercier vivement A. Arnold, qui a simplifié une première preuve du théorème principal, J. Berstel, qui a lu et critiqué une première version de ce travail, et L. Boasson, avec qui une discussion matinale a fait apparaître le résultat essentiel de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Arnold et M. Nivat, *Non-Deterministic Recursive Program Schemes*, à paraître dans Fundamentals of Computation Theory, Lecture Notes in Computer Science, n° 56, p. 12-21, Springer Verlag, 1977.
2. Y. Choueka, *Theories of Automata on* ω*-Tapes: a Simplified Approach*, J. Comp. Syst. Sciences, vol. 8, 1974, p. 117-141.
3. R. Cohen et A. Gold, *Theory of* ω*-Languages; Part I: Characterizations of* ω*-Context-Free Languagés*, J. Comp. Syst. Sciences, vol. 15, 1977, p. 169-184.
4. S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, vol. A, Academic Press, New York, 1974.
5. R. McNaughton, *Testing and Generating Infinite Sequences by a Finite Automaton*, Inf. and Control, vol. 9, 1966, p. 521-530.
6. M. P. Schützenberger, *Push-Down Automata and Context-Free Languages*, Inf. and Control, vol. 6, 1963, p. 246-264.