RAIRO. INFORMATIQUE THÉORIQUE

MICHEL LATTEUX

Cônes rationnels commutativement clos

RAIRO. Informatique théorique, tome 11, nº 1 (1977), p. 29-51
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1977__11_1_29_0>

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Computer Science
(vol. 11, n° 1, 1977, p. 29 à 51)

CÔNES RATIONNELS COMMUTATIVEMENT CLOS (*)

par Michel LATTEUX ([1])

Communiqué par J. BERSTEL

Résumé. — *La fermeture commutative $c(L)$ d'un langage L est l'ensemble des mots obtenus par permutation à partir des mots de L. Nous montrons que le plus petit cône rationnel commutativement clos $\mathscr{L}_\psi$ (qui vérifie $L \in \mathscr{L}_\psi$ implique $c(L) \in \mathscr{L}_\psi$) est égal à $\mathscr{C}_\cap(\mathscr{C}_1)$, le plus petit cône rationnel contenant le langage $C_1 = \{ a^n b^n \mid n \geqq 0 \}$ et clos par intersection. Nous établissons que $\mathscr{L}_\psi$ n'est pas un cône principal et que $\mathscr{F}(\mathscr{L}_\psi) = \mathscr{F}(c(\mathscr{R}))$ la plus petite FAL contenant $\mathscr{L}_\psi$, n'est pas principale, ce qui apporte une réponse à un problème ouvert de S. Ginsburg. Nous terminons, en démontrant que le langage de Dyck restreint sur une lettre, $D_1'^*$, n'appartient pas à $\mathscr{F}$(COM) où COM est la famille de tous les langages commutatifs. Ce résultat a des corollaires intéressants tels que :*

Pour toute famille $\mathscr{L}$ de langages bornés ou commutatifs, $\mathscr{C}_\cap(\mathscr{L})$ et $\mathscr{F}(\mathscr{L})$ ne contiennent ni la famille Lin *des langages linéaires algébriques, ni la famille des langages à compteur itéré, et* Lin *n'est pas contenu dans $\mathscr{F}_\sigma(\mathscr{L})$, la plus petite FAL contenant $\mathscr{L}$ et close par substitution.*

INTRODUCTION

La notion de « famille abstraite de langages » (en abrégé, FAL) introduite par S. Ginsburg et S. Greibach [15], qui est un modèle mathématique pour un bon nombre de familles de langages étudiées antérieurement, introduit un concept général qui permet d'obtenir des démonstrations valables pour les classes de langages vérifiant certaines propriétés de clôture. Une des opérations fondamentales de cette théorie est la « transduction rationnelle » étudiée par M. Nivat [28] qui en a donné, en particulier, une caractérisation en terme de bimorphismes alphabétiques. Il en est fait un usage constant, aussi bien pour l'étude des familles abstraites de langages que pour celle des cônes rationnels, (terminologie due à S. Eilenberg [26]) et qui sont les familles de langages fermées par transductions rationnelles.

Les langages algébriques (en anglais « context-free languages ») sont au centre de la théorie des langages et servent de modèle pour des langages de programmation tels que « Algol ». Parikh [29] a montré, pour ces langages, une importante propriété algébrique : Soient T un alphabet et

(*) Reçu en juin 1975, Révisé en juin 1976.

([1]) Université de Lille I, U.E.R.-I.E.E.A., Service Informatique, Villeneuve d'Ascq.

ψ_T, la fonction de Parikh (i. e. l'homomorphisme canonique de T^* dans le monoïde commutatif libre engendré par T), si L est un langage algébrique inclus dans T^*, son image par ψ_T est un langage semi-linéaire ou langage rationnel commutatif [10]. Cette propriété ne caractérise pas les langages algébriques et il est intéressant d'étudier les cônes rationnels qui la vérifient, afin d'étendre certains résultats qui semblaient propres aux langages algébriques. C'est ce qu'ont fait S. Ginsburg et E. M. Spanier dans [19] où ils ont montré cette propriété pour $\mathscr{C}(c(\mathscr{R}))$, le plus petit cône rationnel contenant $c(\mathscr{R})$ qui est l'ensemble des fermetures commutatives des langages rationnels. L'étude de cette famille est à l'origine de notre travail. Le fait que certaines propriétés de $\mathscr{C}(c(\mathscr{R}))$ sont encore valables pour les cônes rationnels générés à partir de langages commutatifs, nous a amenés à étudier simultanément $\mathscr{C}(\mathrm{COM})$ le plus petit cône rationnel contenant tous les langages commutatifs. En utilisant le fait que D_1^* le langage de Dyck sur une lettre est égal au « shuffle » des langages $\{ a^n b^n / n \geqq 0 \}$ et $\{ b^n a^n / n \geqq 0 \}$ (lemme 4), nous démontrons que $\mathscr{C}(c(\mathscr{R}))$ est le plus petit cône rationnel clos par intersection et contenant $\{ a^n b^n / n \geqq 0 \}$. Cette caractérisation nous permet, alors, de montrer (th. 3) que la plus petite FAL contenant $c(\mathscr{R})$ n'est pas principale. Enfin nous mettons en évidence une différence fondamentale entre $D_1'^*$, le semi-Dyck sur une lettre et D_1^* le Dyck sur une lettre qui est un langage commutatif : $D_1'^*$ n'appartient pas à la plus petite FAL contenant tous les langages commutatifs (th. 4). Nous en déduisons que la famille des langages linéaires n'est pas incluse dans la plus petite FAL close par substitution et contenant les langages bornés (corollaire 10).

L'étude des langages commutatifs est facilitée par le fait qu'on peut les confondre avec leur image par la fonction de Parikh. Dans le cas où cette image est un semi-linéaire, le langage est appelé PSL-langage (en anglais, « slip-language » *cf.* [19]), et nous pouvons utiliser les très nombreuses propriétés algébriques des semi-linéaires ([10, 12, 24, 26]). De plus, la famille COM, de tous les langages commutatifs est fermée par intersection, homomorphisme inverse et homomorphisme alphabétique, ce qui simplifie bien des raisonnements. Enfin, comme tout langage borné est l'image par une transduction rationnelle d'un langage commutatif, nous pouvons déduire de l'étude de tels langages, des résultats concernant les langages bornés qui jouent un rôle privilégié en théorie des langages ([2, 3, 18, 20, 25, 27, 30]). Réciproquement, nous montrons que tout langage commutatif peut être obtenu à partir de langages bornés par transduction rationnelle et intersection. Nous sommes ainsi amenés à nous intéresser aux cônes rationnels clos par intersection qui, jusqu'à présent, ont été moins étudiés que les FAL closes par intersection (*cf.* [17, 14]). Cependant Baker et Book ont montré [1] que tout langage récursivement énumérable est l'image homomorphe de l'intersection de deux langages linéaires. Concernant les cônes rationnels fidèles clos par intersection, Book et Greibach ont établi [6] que tout langage

« quasi-realtime » (appartenant au plus petit cône rationnel fidèle clos par intersection et contenant les langages algébriques) est l'image par un homomorphisme strictement alphabétique « length-preserving » de l'intersection de trois langages algébriques. Book, Nivat et Paterson [7] ont précisé ce résultat et ont obtenu une propriété analogue pour les langages linéaires. La hiérarchie que nous obtenons en construisant le plus petit cône rationnel clos par intersection et contenant le langage $\{ a^n b^n / n \geq 0 \}$, noté C_1, est infinie. Ainsi $\mathscr{C}(C_1)$ est le premier exemple de cône rationnel principal tel que le plus petit cône rationnel clos par intersection et le contenant, ne soit pas principal (*cf.* [13], p. 180).

PLAN DE L'ARTICLE

Dans la section I, nous rappelons les notions et définitions que nous utiliserons par la suite. Dans la section II, nous étudions les propriétés de clôture de $\mathscr{L}_\psi$, le plus petit cône rationnel commutativement clos et nous montrons que $\mathscr{L}_\psi = \mathscr{C}(c(\mathscr{R}))$ ($\mathscr{R}$ désigne la famille des langages rationnels) est clos par intersection et produit mais pas pour l'étoile.

$\mathscr{C}(\text{COM})$ a les mêmes propriétés de clôture. Dans la section III, nous établissons l'égalité entre $\mathscr{L}_\psi$ et $\mathscr{C}_\cap(C_1)$, le plus petit cône rationnel fermé par intersection et contenant $C_1 = \{ a^n b^n \mid n \geqslant 0 \}$, ce qui implique $\mathscr{L}_\psi = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathscr{C}(O_n)$ où O_n est le langage « origin-crossing » de dimension n, étudié par M. J. Fischer et A. L. Rosenberg [11]. Le résultat de base de la section IV est que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le langage

$$E_{2n+1} = \{ b_1^t \dots b_{2n+1}^t / t \geqq 0 \}$$

n'appartient pas à $\mathscr{C}(O_n)$. Cette démonstration utilise largement les propriétés des semi-linéaires. Nous en déduisons que, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{C}(O_n)$ est strictement inclus dans $C(O_{n+1})$ et que $\mathscr{L}_\psi$ qui est égal à $\mathscr{H}(\Lambda\mathscr{C}(C_1))$, la clôture par homomorphisme de la famille des langages obtenus par intersection à partir de $\mathscr{C}(C_1)$, n'est pas un cône rationnel principal. Ceci apporte une réponse à une question ouverte de S. Ginsburg ([13], p. 180).

Nous introduisons, alors, la notion de CIL-langage qui se révèle, par la suite, d'un intérêt certain. Les CIL-langages sont définis comme étant les langages qui ne peuvent pas contenir le produit de deux langages infinis. Il est clair que tout CIL-langage est un IRS-langage [23] ou langage sans facteurs itérants [5], mais la réciproque est fausse. Nous montrons que les CIL-langages vérifient : si $\mathscr{L}$ est un cône rationnel clos par union (resp. clos par intersection) et L un CIL-langage appartenant à $\mathscr{F}(\mathscr{L})$ (resp. $\mathscr{F}_\sigma(\mathscr{L})$) alors L appartient à $\mathscr{L}$. En utilisant ce résultat, nous répondons à l'un des problèmes ouverts posés par S. Ginsburg et E. M. Spanier, dans [19], en montrant que $\mathscr{F}(c(\mathscr{R})) = \mathscr{F}(\mathscr{L}_\psi) = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathscr{F}(O_n)$ n'est pas une FAL principale. Enfin, dans la dernière section, nous établissons que le semi-Dyck sur une lettre, $D_1'^*$, générateur de la famille des langages à compteur, n'appartient pas à $\mathscr{F}$(COM). Nous améliorons ainsi un résultat de Goldstine qui a montré [20] que la FAL engendrée par les langages bornés ne contenait pas tous les langages algébriques. Nous obtenons, aussi, comme corollaire immédiat, un résultat dû à L. Boasson [4] : $D_1'^*$ n'appartient pas à la FAL engendrée par la Dyck sur une lettre D_1^* qui est un langage commutatif. En outre, en utilisant le fait que le plus petit cône rationnel contenant $L_0 = \{ wdw^R/w \in \{ a, b \}^* \}$ et clos par intersection est égal à la famille des langages récursivement énumérables [1], nous montrons que L_0 n'appartient pas à $\mathscr{C}$(COM) et comme L_0 est un CIL-langage, il n'appartient ni à $\mathscr{F}_\sigma$(COM) ni à $\mathscr{F}_\sigma(\mathscr{B})$ où $\mathscr{B}$ désigne la famille des langages bornés. Ceci précise un résultat obtenu par J. L. Durieux ([8], th. 3).

I. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Soit N l'ensemble des entiers naturels. Pour tout entier positif p, N^p est égal à $\{ (i_1, \ldots, i_p)/i_j \in N \text{ pour } j \in \{ 1, \ldots, p \} \}$. Une application θ de N^p dans N^q est une *application linéaire* ssi $\forall x, y \in N^p$, $\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$. Un sous-ensemble S de N^p est *linéaire* ssi il existe $u_0, u_1, \ldots, u_k \in N^p$ tels que S est égal à l'ensemble

$$\left\{ u_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i / \lambda_i \in N, \text{ pour } i \in \{ 1, \ldots, k \} \right\}$$

qui sera noté $L(u_0 ; \{ u_1, \ldots, u_k \})$. Un ensemble *semi-linéaire* est une union finie d'ensembles linéaires.

Soit $T = \{ a_1, \ldots, a_p \}$ un alphabet. Pour tout mot w de T^*, $l(w)$ désigne la longueur de w et pour tout $i \in \{ 1, \ldots, p \}$, $l_{a_i}(w)$ est égal au nombre d'occurrences de la lettre a_i dans w. Nous noterons ψ_T (ou ψ s'il n'y a pas d'ambiguïté) la *fonction de Parikh* de T^* dans N^p définie par

$$\psi_T(w) = (l_{a_1}(w), \ldots, l_{a_p}(w)).$$

Un langage L est un *PSL-langage* ssi $\psi(L)$ est un semi-linéaire. La *fermeture commutative* de L, notée $c(L)$, est égale à $\psi^{-1} \circ \psi(L)$, l'ensemble des mots que l'on peut obtenir par permutation à partir des mots de L. Nous dirons qu'un langage L est *commutatif* ssi $L = c(L)$. Un langage L est *borné* ssi il existe des mots $y_1, \ldots, y_k$ tels que L est inclus dans $y_1^* \ldots y_k^*$.

Une *famille de langages* est un couple $(\Sigma, \mathscr{L})$, où $\mathscr{L}$ quand Σ est sous-entendu, vérifiant :

(1) Σ est un ensemble infini de symboles ;

(2) pour tout $L \in \mathscr{L}$, il existe un ensemble fini $\Sigma_L \subseteq \Sigma$ tel que $L \subseteq \Sigma_L^*$;

(3) $\mathscr{L}$ contient un ensemble non vide.

Une famille de langage $\mathscr{L}$ est une *PSL-famille* ssi elle ne contient que des PSL-langages. $\mathscr{L}$ est *commutativement* clos ssi $c(\mathscr{L}) = \{ c(L)/L \in \mathscr{L} \}$ est inclus dans $\mathscr{L}$. Nous noterons $\mathscr{R}$, la famille des langages rationnels (en anglais « regular ») et $\mathscr{B}$ la famille de tous les langages bornés. Si $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ sont des familles de langages, posons

$$\mathscr{L}_1 \wedge \mathscr{L}_2 = \{ L_1 \cap L_2/L_1 \in \mathscr{L}_1 \text{ et } L_2 \in \mathscr{L}_2 \}$$

et $\mathcal{H}(\mathscr{L}_1) = \{ h(L_1)/L_1 \in \mathscr{L}_1, h \text{ est un homomorphisme} \}$.

Nous dirons que $\mathscr{L}$ est un *cône rationnel* (en anglais « Full Trio ») ssi $\mathscr{L}$ est clos par homomorphisme, homomorphisme inverse et par intersection avec les langages rationnels ou bien, ce qui est équivalent, ssi $\mathscr{L}$ est clos par transduction rationnelle [23]. Si, de plus, $\mathscr{L}$ est clos par union, produit et étoile, nous dirons que $\mathscr{L}$ est une famille agréable de langages ou *FAL* (en anglais « full AFL »). Nous noterons $\mathscr{C}(\mathscr{L})$ [resp. $\mathscr{C}_\cap(\mathscr{L})$] le plus petit cône rationnel contenant $\mathscr{L}$ (et clos par intersection). Une substitution s définie sur T^* est une *$\mathscr{L}$-substitution* ssi $\forall\, a \in T$, $s(a)$ est un langage de $\mathscr{L}$. Pour toutes familles de langages $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$, $\mathscr{L}_1 \sigma \mathscr{L}_2$ désignera la famille

$$\{ s(L_1)/L_1 \in \mathscr{L}_1 \text{ et } s \text{ est une } \mathscr{L}_2\text{-substitution} \}.$$

Nous noterons $\mathscr{F}(\mathscr{L})$ [resp. $\mathscr{F}_\sigma(\mathscr{L})$] la plus petite FAL contenant $\mathscr{L}$ (et close par substitution). Pour $L_1, L_2 \subseteq T^*$, définissons l'opération « shuffle » ou « produit de Hurwitz », par

$$\text{Shuf}(L_1, L_2) = \{ x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_q y_q / x_i, \quad y_i \in T^*, x_1 \ldots x_q \in L_1, y_1 \ldots y_q \in L_2 \}.$$

Nous dirons qu'un homomorphisme h, de T^* dans Δ^* est *alphabétique* ssi $h(T)$ est inclus dans $\Delta \cup \{ 1 \}$, où 1 désigne le mot vide. Enfin, nous utiliserons le terme « algébrique » pour désigner les langages « context-free ». Un cône rationnel (une FAL) $\mathscr{L}$ est principal(e) ssi il existe un langage L tel que

$$\mathscr{L} = \mathscr{C}(L)(\mathscr{L} = \mathscr{F}(L)).$$

II. PROPRIÉTÉS DE CLÔTURE DE $\mathscr{L}_\psi$ ET $\mathscr{C}$ (COM)

Montrons, d'abord, une propriété des cônes rationnels clos par intersection.

PROPOSITION 1 : *Si $\mathscr{L}$ est une famille de langages close par intersection et homomorphisme inverse alphabétique, $\mathscr{C}(\mathscr{L}) = \mathcal{H}(\mathscr{L} \wedge \mathscr{R})$ est clos par intersection, union et produit.*

Démonstration : Comme $\mathscr{L}$ est clos par homomorphisme inverse alphabétique, il est facile de vérifier que $\mathscr{C}(\mathscr{L}) \wedge \mathscr{L} \subseteq \mathscr{C}(\mathscr{L} \wedge \mathscr{L})$ et comme l'inclusion de $\mathscr{C}(\mathscr{L}) \wedge \mathscr{C}(\mathscr{L})$ dans $\mathscr{C}(\mathscr{C}(\mathscr{L}) \wedge \mathscr{L})$ est toujours vraie, nous en déduisons

$$\mathscr{C}(\mathscr{L}) \wedge \mathscr{C}(\mathscr{L}) \subseteq \mathscr{C}(\mathscr{L} \wedge \mathscr{L}) = \mathscr{C}(\mathscr{L})$$

puisque $\mathscr{L}$ est clos par intersection. Prenons $L_1, L_2 \subseteq T^*$ des langages de $\mathscr{C}(\mathscr{L})$, $T' = \{ a'/a \in T \}$ tel que $T \cap T' = \emptyset$, h, g les homomorphismes définis respectivement sur T et $T \cup T'$ par

$$h(a) = a', \qquad g(a) = g(a') = a, \quad \forall a \in T.$$

$L_1 T'^*$ et $Th(L_2)$ appartiennent à $\mathscr{C}(\mathscr{L})$ ainsi que $L_1 L_2 = g(L_1 T'^* \cap T^* h(L_2))$. De même,

$$L_1 \cup L_2 \cup \{ 1 \} = g((L_1 \cup \{ 1 \})(h(L_2) \cup \{ 1 \}) \cap (T^* \cup T'^*)) \in \mathscr{C}(\mathscr{L})$$

et $L_1 \cup L_2 \in \mathscr{C}(\mathscr{L})$.

C.Q.F.D.

En particulier si $\mathscr{L}$ est un cône rationnel, nous obtenons :

COROLLAIRE 1 : *Tout cône rationnel clos par intersection est clos par union et par produit.*

Étudions, maintenant, les propriétés de clôture de la famille COM et de $c(\mathscr{R})$ qui est la famille des fermetures commutatives des langages rationnels.

LEMME 1 : *L appartient à $c(\mathscr{R})$ si et seulement si L est un PSL-langage commutatif.*

Démonstration : Si $L = c(R)$ avec $R \in \mathscr{R}$, $\psi(L) = \psi(R)$ est un semi-linéaire. Réciproquement, soit L un PSL-langage commutatif; il existe un langage rationnel R tel que $\psi(R) = \psi(L)$ [19], et

$$L = c(L) = \psi^{-1} \circ \psi(L) = \psi^{-1} \circ \psi(R) = c(R)$$

appartient à $c(\mathscr{R})$.

C.Q.F.D.

Si L est un langage commutatif, $L = c(L) = \psi^{-1} \circ \psi(L)$. En utilisant l'égalité de la théorie des ensembles, $f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$, nous obtenons immédiatement :

LEMME 2 : *Si L est un langage commutatif, $\psi(L \cap L') = \psi(L) \cap \psi(L')$, et si de plus, L et L' sont des PSL-langages, $L \cap L'$ est aussi un PSL-langage.*

Nous pouvons maintenant établir que les familles COM et $c(\mathscr{R})$ vérifient les hypothèses de la proposition 1.

LEMME 3 : *Soit h un homomorphisme alphabétique. Si L appartient à* COM [*resp.* $c(\mathscr{R})$], *$h(L)$ et $h^{-1}(L)$ appartiennent à* COM [*resp.* $c(\mathscr{R})$].

Démonstration : Il est facile de vérifier que h et c commutent ainsi que h^{-1} et c. Si L est commutatif $L = c(L)$, $h(L) = h \circ c(L) = c \circ h(L)$ et

$$h^{-1}(L) = h^{-1} \circ c(L) = c \circ h^{-1}(L)$$

sont des langages commutatifs.

Si $L \in c(\mathscr{R})$, il existe un langage rationnel R tel que $L = c(R)$. Comme $\mathscr{R}$ est un cône rationnel, les langages $h(L) = c \circ h(R)$ et $h^{-1}(L) = c \circ h^{-1}(R)$ appartiennent à $c(\mathscr{R})$.

C.Q.F.D.

Nous obtenons, alors :

PROPOSITION 2 : *Les familles* COM *et* $c(\mathscr{R})$ *sont closes par intersection, homomorphisme alphabétique et homomorphisme inverse.*

Démonstration : Soient L_1 et L_2 des langages commutatifs.

$$\begin{aligned} L_1 \cap L_2 &= c(L_1) \cap c(L_2) = \psi^{-1} \circ \psi(L_1) \cap \psi^{-1} \circ \psi(L_2) \\ &= \psi^{-1}(\psi(L_1) \cap \psi(L_2)) \\ &= \psi^{-1} \circ \psi \circ \psi^{-1}(\psi(L_1) \cap \psi(L_2)) = c(L_1 \cap L_2), \end{aligned}$$

donc $L_1 \cap L_2$ est un langage commutatif.

Si L_1 et L_2 appartiennent à $c(\mathscr{R})$, $\psi(L_1)$ et $\psi(L_2)$ sont des semilinéaires et $\psi(L_1 \cap L_2) = \psi(L_1) \cap \psi(L_2)$ est aussi un semilinéaire [12]; du lemme 1, nous pouvons déduire que $L_1 \cap L_2 \in c(\mathscr{R})$.

Prenons, maintenant, un homomorphisme g. Il est clair que pour tout langage A, $g \circ c(A)$ est inclus dans $c \circ g(A)$. En particulier, en prenant $A = g^{-1}(L)$, on obtient $g \circ c \circ g^{-1}(L) \subseteq c \circ g \circ g^{-1}(L) = c(L)$ ce qui implique $c \circ g^{-1}(L) \subseteq g^{-1} \circ c(L)$. Si L est un langage commutatif, $L = c(L)$ et $g^{-1}(L) \subseteq c \circ g^{-1}(L) \subseteq g^{-1}(L)$.

Comme $c(\mathscr{R})$ vérifie les hypothèses de la proposition 1,

$$\mathscr{C}(c(\mathscr{R})) = \mathscr{H}(c(\mathscr{R}) \wedge \mathscr{R}).$$

D'après le lemme 2, $c(\mathscr{R}) \wedge \mathscr{R}$ est une PSL-famille. Comme l'image homomorphe d'un PSL-langage est encore un PSL-langage,

$$\mathscr{C}(c(\mathscr{R})) = \mathscr{H}(c(\mathscr{R}) \wedge \mathscr{R})$$

est une PSL-famille. Si $L \in c(\mathscr{R})$, $g^{-1}(L)$ qui appartient à $\mathscr{C}(c(\mathscr{R}))$ est un PSL-langage commutatif et d'après le lemme 1, $g^{-1}(L) \in c(\mathscr{R})$ qui est donc clos par homomorphisme inverse.

C.Q.F.D.

Nous en déduisons, en premier lieu, un résultat concernant les semilinéaires :

COROLLAIRE 2 [12] : *La classe des semi-linéaires est fermée pour les applications linéaires inverses.*

Démonstration : Soient θ une application linéaire de N^p dans N^q, $T = \{ a_1, \ldots, a_p \}$ et $\Delta = \{ b_1, \ldots, b_q \}$. Il existe un homomorphisme h de T^* dans Δ^* qui vérifie $\psi_\Delta \circ h = \theta \circ \psi_T$. Donc $\theta^{-1} = \psi_T \circ h^{-1} \circ \psi_\Delta^{-1}$ et d'après la proposition 2, pour tout semi-linéaire S de N^q, $L = h^{-1} \circ \psi_\Delta^{-1}(S)$ appartient à $c(\mathscr{R})$ ce qui entraîne $\theta^{-1}(S) = \psi_T(L)$ est un semi-linéaire.

C.Q.F.D.

Comme la famille de tous les PSL-langages est close par produit, étoile et union, la démonstration de la proposition 2 nous permet de retrouver :

COROLLAIRE 3 : [19] *$\mathscr{F}(c(\mathscr{R}))$ est une PSL-famille.*

Nous sommes, maintenant, en mesure de caractériser le plus petit cône rationnel commutativement clos.

THÉORÈME 1 : *$\mathscr{C}(c(\mathscr{R}))$ est le plus petit cône rationnel commutativement clos (noté $\mathscr{L}_\psi$). $\mathscr{L}_\psi$ et $\mathscr{C}$(COM) sont clos par intersection, union et produit.*

Démonstration : Comme $\mathscr{C}(c(\mathscr{R}))$ est une PSL-famille, $c(\mathscr{C}(c(\mathscr{R}))) = c(\mathscr{R})$ est inclus dans $\mathscr{C}(c(\mathscr{R}))$ qui est donc commutativement clos. Réciproquement, tout cône rationnel commutativement clos contient $\mathscr{R}$, donc $c(\mathscr{R})$ èt $\mathscr{C}(c(\mathscr{R}))$. Donc $\mathscr{C}(c(\mathscr{R}))$ est bien le plus petit cône rationnel commutativement clos. Le reste du théorème découle immédiatement des propositions 1 et 2.

C.Q.F.D.

Soit $\mathscr{L}_S$ la plus grande FAL ne contenant que des PSL-langages (*cf.* [19]).

Nous avons :

PROPOSITION 2 : $\mathscr{L}_S \wedge \mathscr{L}_\psi = L_S$.

Démonstration : Comme $\mathscr{L}_S$ et $\mathscr{L}_\psi$ sont des cônes rationnels, nous avons

$\mathscr{L}_S \subseteq \mathscr{L}_S \wedge \mathscr{L}_\psi \subseteq \mathscr{C}(\mathscr{L}_S \wedge \mathscr{L}_\psi) = \mathscr{H}(\mathscr{L}_S \wedge \mathscr{L}_\psi) = \mathscr{H}(\mathscr{L}_S \wedge c(\mathscr{R}))$.

Prenons $L \in \mathscr{L}_S$ et $R \in \mathscr{R}$. Comme $c(R)$ est commutatif,

$$\psi(L \cap c(R)) = \psi(L) \cap \psi(R)$$

est un semi-linéaire. Donc $\mathscr{C}(\mathscr{L}_s \wedge \mathscr{L}_\psi)$ est une PSL-famille ainsi que la FAL $\mathscr{F}(\mathscr{L}_S \wedge \mathscr{L}_\psi)$ qui est, alors, par définition de $\mathscr{L}_S$, incluse dans $\mathscr{L}_S$.

C.Q.F.D.

En particulier, comme Alg, la famille des langages algébriques est une PSL-famille, $\mathscr{F}(\text{Alg} \wedge \mathscr{L}_\psi)$ qui est inclus dans $\mathscr{L}_S$, ne contient pas tous les langages récursivement énumérables.

Comme tout langage algébrique $L \subseteq a_1^* \ldots a_n^*$ peut être obtenu par transduction rationnelle à partir de sa clôture commutative $c(L)$ qui appartient à $c(\mathscr{R})$, $\mathscr{L}_\psi$ contient tous les langages algébriques bornés. De plus $\mathscr{L}_\psi$ est fermé par intersection et ne contient que des PSL-langages; le théorème 2 de [25] permet, alors, d'énoncer :

PROPOSITION 3 : *Soit L un langage borné. L appartient à $\mathscr{L}_{\psi}(\mathscr{F}(c(\mathscr{R})))$ si et seulement si L est une intersection finie de langages algébriques.*

Prenons $C_1 = \{ a^n b^n / n \geq 0 \}$ et $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\psi}$ ou $\mathscr{C}$(COM). Comme

$$\mathscr{C}_{\cap}(C_1^*) = \mathscr{F}_{\cap}(C_1)$$

est égal à la famille de tous les langages récursivement énumérables, alors que $\mathscr{L}$ est un cône rationnel clos par intersection qui ne contient pas $D_1'^*$ le semi-Dyck sur une lettre (*cf.* th. 4, section V), $\mathscr{L}$ contient C_1, mais pas C_1^*, n'est pas clos par étoile, donc $\mathscr{L} \subsetneq \mathscr{F}(\mathscr{L})$ ce qui entraîne [21] $\mathscr{F}(\mathscr{L}) \subsetneq \mathscr{F}_{\sigma}(\mathscr{L})$.

Enfin, il était remarqué dans [19] que $\mathscr{F}(c(R)) = \mathscr{F}(\mathscr{L}_{\psi})$ était inclus dans l'ensemble des langages récursivement énumérables. Nous montrerons à la section suivante, en utilisant un résultat de Baker et Book [1], que tout langage de $\mathscr{F}(c(R))$ peut être reconnu par un automate linéairement borné déterministe. Nous pouvons, cependant, dès à présent, remarquer que tout langage de $\mathscr{F}(c(\mathscr{R}))$ est récursif. En effet, $\forall L \in \mathscr{L}_{\psi}$, $\psi(L)$ est un semi-linéaire effectivement constructible. Comme L est vide, fini ou infini si et seulement si $\psi(L)$ vérifie la même propriété, $y \in L$ ssi $L \cap \{ y \}$ est non vide, donc $\mathscr{L}_{\psi}$ et $\mathscr{F}(\mathscr{L}_{\psi}) = \mathscr{F}(c(R))$ sont des familles de langages récursifs.

III. L'ÉGALITÉ $\mathscr{L}_{\psi} = \mathscr{C}_{\cap}(C_1) = \mathscr{C}_{\cap}(D_1^*)$

Rappelons que C_1 désigne le langage $\{ a^n b^n / n \geq 0 \}$ et que D_1^*, le langage de Dyck sur une lettre est égal à $c(C_1)$.

LEMME 4 : $\mathscr{C}_{\cap}(C_1) = \mathscr{C}_{\cap}(D_1^*) \subseteq \mathscr{L}_{\psi}$.

Démonstration : Comme $C_1 = D_1^* \cap a^* b^*$ appartient à $\mathscr{C}_{\cap}(D_1^*)$ et que

$$D_1^* = c((ab)^*) \in c(\mathscr{R}) \subseteq \mathscr{L}_{\psi}.$$

Il nous reste donc à montrer que $D_1^* \in \mathscr{C}_{\cap}(C_1)$. Pour cela, établissons l'égalité $D_1^* = \text{Shuf}(C_1, C_1^R)$ où $C_1^R = \{ b^n a^n / n \geq 0 \} \in \mathscr{C}(C_1)$.

Il est clair que $L = \text{Shuf}(C_1, C_1^R)$ est inclus dans D_1^*. Réciproquement, prenons $x \in D_1^*$. Ce mot peut se factoriser en $x'x''$ avec $l(x') = l(x'') = n$. Soit p le nombre d'occurrences de a dans x'. Nous avons, alors,

$$l_a(x') = l_b(x'') = p \qquad \text{et} \qquad l_a(x'') = l_b(x') = n - p$$

et on peut vérifier facilement que $x \in \text{Shuf}(a^p b^p, b^{n-p} a^{n-p}) \subseteq L$. Comme tout cône rationnel clos par intersection est clos pour l'opération « shuffle » [16], nous obtenons bien $D_1^* = L \in \mathscr{C}_{\cap}(C_1)$.

C.Q.F.D.

Pour montrer que $\mathscr{L}_\psi$ est inclus dans $\mathscr{C}_\cap(D_1^*)$, il nous suffit d'établir $c(\mathscr{R}) \subseteq \mathscr{C}_\cap(D_1^*)$. Nous avons besoin de deux nouveaux lemmes :

LEMME 5 : *Pour tout mot w de T^*, $c(w^*)$ appartient à $\mathscr{C}_\cap(D_1^*)$.*

Démonstration : Posons $w = w_1 \dots w_p$ avec $w_i \in T$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$. Si $p \leqslant 1$, $c(w^*) = w^* \in \mathscr{R} \subseteq \mathscr{C}_\cap(D_1^*)$. Dans le cas contraire, prenons p symboles distincts $b_1, \dots, b_p$, posons $B = \{b_1, \dots, b_p\}$ et $y = b_1 \dots b_p$. Pour $j \in \{2, \dots, p\}$, définissons l'homomorphisme h_j sur B par $h_j(b_1) = a$, $h_j(b_j) = b$, $h_j(x) = 1$ pour $x \in B \setminus \{b_1, b_j\}$ et montrons que $c(y^*) = L$ avec $L = \bigcap_{j=2}^{p} h_j^{-1}(D_1^*)$. D'après la proposition 2, L est un langage commutatif et il nous suffit de vérifier que $\psi(L) = \psi(c(y^*)) = \psi(y^*)$.

Pour tout $z \in L$ et tout $j \in \{2, \dots, p\}$, $z \in h_j^{-1}(D_1^*)$, donc $l_{b_1}(z) = l_b(z)$ et $\psi(z) \in \psi(y^*)$. Réciproquement, $\forall k \in N$ et

$$\forall j \in \{2, \dots, p\},\ b_1^k \dots b_p^k \in h_j^{-1}(D_1^*),$$

donc $c(y^*) = L \in \mathscr{C}_\cap(D_1^*)$. De plus, comme l'homomorphisme g défini, sur B, par $h(b_j) = w_j$, $\forall j \in \{1, \dots, p\}$, est alphabétique,

$$c(w^*) = c \circ g(y^*) = g \circ c(y^*) \in \mathscr{C}_\cap(D_1^*).$$

C.Q.F.D.

LEMME 6 : *Si L_1 et L_2 sont des langages commutatifs, $c(L_1 L_2) =$* shuf(L_1, L_2).

Démonstration : Posons $L = \text{shuf}(L_1, L_2)$. Il existe des homorphismes alphabétiques h, g_1, g_2 tels que $L = h(g_1^{-1}(L_1) \cap g_2^{-1}(L_2))$ [13]. D'après la proposition 2, L est alors un langage commutatif et comme

$$L_1 L_2 \subseteq L \subseteq c(L_1 L_2),$$

nous obtenons $c(L_1 L_2) = L$.

C.Q.F.D.

LEMME 7 : *$c(\mathscr{R})$ est inclus dans $\mathscr{C}_\cap(D_1^*)$.*

Démonstration : Soit R un rationnel inclus dans T^*. Comme $\mathscr{C}_\cap(D_1^*)$ est clos par union (corollaire 1), on peut supposer, sans nuire à la généralité de la démonstration, que $\psi(R)$ est un linéaire, $S = L(u_0; \{u_1, \dots, u_k\})$.

Pour $i \in \{0, \dots k\}$, il existe $w_i \in T^*$ tel que $\psi(w_i) = u_i$, donc

$$c(R) = c(w_0 w_1^* \dots w_k^*).$$

$c(w_0)$ est fini, donc appartient à $\mathscr{C}_\cap(D_1^*)$ et les lemmes 5 et 6 impliquent $c(R) = c(w_0 w_1^* \dots w_k^*) \in \mathscr{C}_\cap(D_1^*)$ qui est clos pour l'opération « shuffle ».

C.Q.F.D.

Introduisons, maintenant, pour tout $n \geqslant 1$, le langage « origin-crossing » de dimension n (*cf.* [11] en posant

$$O_1 = c((a_1\bar{a}_1)^*) \quad \text{et} \quad \forall i \geqslant 2,$$
$$O_i = \text{shuf}(O_{i-1} \cdot c((a_i\bar{a}_i)^*)).$$

Nous obtenons, alors, le résultat principal de cette section.

THÉORÈME 2 : $L_\psi = \mathscr{C}_\cap(C_1) = \mathscr{C}_\cap(D_1^*) = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathscr{C}(O_n)$.

Démonstration : Les deux premières égalités proviennent des lemmes 4 et 7. D'autre part, d'après le théorème 5.5.1 de [13], nous avons pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathscr{H}(\mathscr{C}(O_n) \wedge \mathscr{C}(D_1)) = \mathscr{C}(\text{shuf}(O_n, D_1^*)) = \mathscr{C}(O_{n+1}).$$

Posons $\mathscr{L}'_n = \mathscr{H}(\mathscr{L}_1 \wedge \ldots \wedge \mathscr{L}_n)$ où $\mathscr{L}_1 = \ldots = \mathscr{L}_n = \mathscr{C}(D_1^*)$. Il est facile de vérifier par induction que, $\forall n \geqslant 1$, $\mathscr{L}'_n = \mathscr{C}(O_n)$ et comme $\mathscr{C}_\cap(D_1^*) = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathscr{L}'_n$ (prop. 3.6.1. [13]), nous obtenons le résultat cherché.

C.Q.F.D.

Comme $\mathscr{C}_\cap(C_1)$ est inclus dans la famille des langages reconnus par un automate déterministe linéairement borné [1] qui est close par produit, étoile et union, nous avons :

COROLLAIRE 4 : *Tout langage de $\mathscr{F}(c(\mathscr{R}))$ peut être reconnu par un automate déterministe linéairement borné.*

IV. $\mathscr{F}(c(\mathscr{R}))$ EST NON PRINCIPAL

Dans cette section E_k désignera, pour tout $k \geqslant 1$, le langage

$$\{ b_1^t b_2^t \ldots b_k^t \mid t \geqslant 0 \}$$

où les b_i sont des symboles distincts.

Pour tout alphabet $\Delta = \{ d_1, \ldots, d_p \}$, nous noterons f_Δ, l'application de N^p dans Δ^* définie par $f_\Delta(i_1, \ldots, i_p) = d_1^{i_1} d_2^{i_2} \ldots d_p^{i_p}$ et à tout homomorphisme g de Δ^* dans B^*, nous pouvons faire correspondre l'application θ_g définie par $\theta_g = \psi_B \circ g \circ f_\Delta$.

LEMME 8 : *L'application θ_g est une application linéaire qui vérifie*

$$\theta_g \circ \psi_\Delta = \psi_B \circ g.$$

Démonstration : Soient $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et $y = (y_1, \ldots, y_p)$ des éléments de N^p. Posons $z = (z_1, \ldots, z_p) = x + y$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}\theta_g(z) = \theta_g(x + y) &= \psi_B(g(d_1)^{z_1} \ldots g(d_p)^{z_p} \\ &= \sum_{i=1}^{p} z_i \psi_B \circ g(d_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i \psi_B \circ g(d_i) \\ &+ \sum_{i=1}^{p} y_i \psi_B \circ g(d_i) = \theta_g(x) + \theta_g(y).\end{aligned}$$

Prenons maintenant $w \in \Delta^*$, $\theta_g \circ \psi_\Delta(w) = \psi_B \circ g \circ f_\Delta \circ \psi_\Delta(w)$.
$y = f_\Delta \circ \psi_\Delta(w) \in \psi_\Delta^{-1} \circ \psi_\Delta(w) = c(w)$ et $g(y) \in g \circ c(w) \subseteq c \circ g(w)$.
Donc

$$\psi_B \circ g(y) \in \psi_B \circ c \circ g(w) = \psi_B \circ \psi_B^{-1} \circ \psi_B \circ g(w) = \{ \psi_B \circ g(w) \}$$

ce qui implique bien $\theta_g \circ \psi_\Delta = \psi_B \circ g$.

C.Q.F.D.

LEMME 9 : *Si $E_k \in \mathscr{C}(O_n)$, il existe deux homomorphismes alphabétiques g, h et des langages rationnels $R_1, \ldots, R_k$ tels que :*

(i) *$g(h^{-1}(O_n) \cap R_1 R_2 \ldots R_k)$ est un langage infini inclus dans E_k;*

(ii) *pour tout $i \in \{ 1, \ldots, k \}$, $\psi(R_i)$ est un ensemble linéaire et $g(R_i)$ est inclus dans b_i^*.*

Démonstration : Posons $T = \{ a_1, \ldots, a_n, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \}$ et $B = \{ b_1, \ldots, b_k \}$. Comme $E_k \in \mathscr{C}(O_n)$, il existe un alphabet Δ, des homomorphismes alphabétiques h et g de Δ^* dans, respectivement T^* et B^*, ainsi qu'un langage rationnel $R \subseteq \Delta^*$ tels que $E_k = g(h^{-1}(O_n) \cap R)$ [23].

Pour $i \in \{ 1, \ldots, k \}$, posons $B_i = \{ x \in \Delta / g(x) \in \{ b_i, 1 \} \}$. Comme E_k est inclus dans $b_1^* \ldots b_k^*$, nous avons $E_k = g(h^{-1}(O_n) \cap R')$ avec

$$R' = R \cap B_1^* \ldots B_k^*.$$

Il est alors facile de vérifier que R' peut se mettre sous la forme : $\bigcup_{j=1}^{s} (R_{j1} \cdots R_{jk})$ avec R_{ji} rationnel inclus dans B_i^*, donc $g(R_{ji}) \subseteq b_i^*$. La démonstration se termine en remarquant que $\psi(R_{ji})$ est une union finie de linéaires et que E_k est infini.

C.Q.F.D.

Soient h, g, $R_1, \ldots R_k$ définis comme au lemme précédent. Posons, pour tout $i \in \{ 1, \ldots, k \}$, $\psi(R_i) = L(c_i ; P_i)$. Nous allons, maintenant, pouvoir, en utilisant les propriétés des semi-linéaires, montrer le résultat suivant :

LEMME 10 : *Il existe $z = z_1 + \ldots + z_k \in \psi_\Delta(h^{-1}(O_n))$ et un entier positif r tels que, pour tout $i \in \{ 1, \ldots, k \}$:*

(i) $z_i \in L(0; P_i)$;

(ii) $\theta_g(z_i) = \psi_B(b_i^r)$.

Démonstration : Posons $E'_k = g(h^{-1}(O_n) \cap R_1 \ldots R_k)$, $S'_k = \psi_B(E'_k)$ et $S_k = \psi_B(E_k)$. D'après le lemme 8, $S'_k = \theta_g \circ \psi_\Delta(h^{-1}(O_n) \cap R_1 \ldots R_k)$ et comme $h^{-1}(O_n)$ est un langage commutatif, nous avons

$$\psi_\Delta(h^{-1}(O_n) \cap R_1 \ldots R_k) = K_1 \cap K_2$$

avec $K_1 = \psi_\Delta(h^{-1}(O_n))$ qui est un linéaire de constante nulle puisque h est alphabétique et

$$K_2 = \psi_\Delta(R_1 \dots R_k) = L(c; P) \quad \text{où} \quad c = \sum_{i=1}^{k} c_i \text{ et } P = \bigcup_{i=1}^{k} P_i.$$

D'après [12], $K_1 \cap K_2$ est un semi-linéaire que nous poserons égal à

$$\bigcup_{j=1}^{s} L(x_j; Q_j) \quad \text{et} \quad S'_k = \theta_g(K_1 \cap K_2) = \bigcup_{j=1}^{s} L(\theta_g(x_j); \theta_g(Q_j)).$$

Comme S'_k est infini, il existe $j_0 \in \{1, \dots, s\}$ tel que $\theta_g(Q_{j_0})$ contienne un vecteur non nul $\theta_g(y)$ et $K = L(x_{j_0}; \{y\})$ est un sous-ensemble infini de $K_1 \cap K_2$. Donc $K \cap K_1$ et $K \cap K_2$ sont infinis et il existe ([12], lemme 5.4.5), des entiers positifs t_1 et t_2 tels que $t_1 y \in K_1$ (K_1 est un linéaire de constante nulle) et $t_2 y \in L(0; P)$ ce qui implique $z = t_1 t_2 y \in K_1 \cap L(0; P)$. Comme $P = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$, z peut se mettre sous la forme : $z = z_1 + \dots + z_k$ avec $z_i \in L(0; P_i), \forall i \in \{1, \dots, k\}$. Nous avons alors $\theta_g(z) = t_1 t_2 \theta_g(y) = (r, \dots, r)$ avec r entier positif. En effet $L(\theta_g(x_{j_0}); \{\theta_g(y)\})$ est un sous-ensemble infini de S'_k donc de S_k, ce qui implique [12] que $\theta_g(y)$ est un vecteur non nul dont toutes les coordonnées sont égales. Posons, de même qu'au lemme précédent, $B_i = \{x \in \Delta / g(x) \in \{b_i, 1\}\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. Alors,

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad c_i + z_i \in L(c_i; P_i) = \psi_\Delta(R_i) \subseteq \psi_\Delta(B_i^*),$$

donc $z_i \in \psi_\Delta(B_i^*)$ et $\theta_g(z_i) \in \theta_g \circ \psi_\Delta(B_i^*) = \psi_B \circ g(B_i^*) = \psi_B(b_i^*)$. Nous en déduisons que, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $\theta_g(z_i)$ est un vecteur dont la seule coordonnée non nulle est la i-ième qui vaut r, donc $\theta_g(z_i) = \psi_B(b_i^r)$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 4 : *Pour tout $n \geqslant 1$, le langage $E_{2n+1} = \{b_1^t \dots b_{2n+1}^t / t \geqslant 0\}$ n'appartient pas au cône rationnel engendré par O_n, le langage « origin-crossing » de dimension n.*

Démonstration : Reprenons les notations des lemmes précédents avec $k = 2n + 1$. L'application $\theta_h = \psi_T \circ h \circ f_\Delta$ est une application linéaire de N^p dans N^{2n} qui vérifie $\theta_h \circ \psi_\Delta = \psi_T \circ h$ (lemme 8). Comme k est supérieur à $2n$, les vecteurs $\theta_h(z_1), \dots, \theta_h(z_k)$ sont linéairement dépendants. Donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_k \in N$ tels que

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \theta_h(z_j) = \sum_{j=1}^{k} \mu_j \theta_h(z_j) \quad \text{avec} \quad \lambda_{j_0} \neq \mu_{j_0}$$

pour un $j_0 \in \{1, \ldots, k\}$. Posons $\gamma = \sup \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_k\}$. Nous avons

$$\gamma \times \sum_{j=1}^{k} \theta_h(z_j) = \sum_{j=1}^{k} \delta_j \theta_h(z_j) \qquad \text{avec} \quad \delta_j = (\mu_j + \gamma - \lambda_j).$$

De plus, il existe $i \neq j_0$ tel que $\delta_i \neq \delta_{j_0}$. En effet, dans le cas contraire, nous obtenons $(\gamma - \delta_{j_0}) \times \theta_h(z) = 0$ ce qui implique $\gamma = \delta_{j_0}$, si $\theta_h(z)$ est non nul, d'où la contradiction puisque $\lambda_{j_0} \neq \mu_{j_0}$. Par contre, si $\theta_h(z)$ est nul, tous les $\theta_h(z_j)$ sont nuls et on obtient le même résultat car le choix des λ_j et μ_j est alors arbitraire. Posons $y = \sum_{j=1}^{k} \delta_j z_j$. Nous avons, alors, $\theta_h(y) = \theta_h(\gamma z)$.
D'autre part, soit u, un élément de $\psi_\Delta(h^{-1}(O_n)) \cap \psi_\Delta(R_1 \ldots R_k)$. Il existe $u_1, \ldots, u_k$ tels que

$$u = u_1 + \ldots + u_k \qquad \text{et} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, k\}, \quad u_i \in \psi_\Delta(R_i) = L(c_i; P_i).$$

Comme $z_i \in L(0; P_i)$, $u_i + \delta_i z_i \in \psi_\Delta(R_i)$ et $u + y \in \psi_\Delta(R_1 \ldots R_k) = K_2$. De plus,

$$\theta_h(u + y) = \theta_h(u) + \theta_h(y) = \theta_h(u) + \theta_h(\gamma z) = \theta_h(u + \gamma z)$$

et comme u et $\gamma z \in \psi_\Delta(h^{-1}(O_n))$, $u + \gamma z \in \psi_\Delta(h^{-1}(O_n))$, donc

$$\theta_h(u + y) \in \theta_h \circ \psi_\Delta(h^{-1}(O_n)) = \psi_T \circ h(h^{-1}(O_n)) = \psi_T(O_n)$$

$$\text{et} \qquad u + y \in \theta_h^{-1} \circ \psi_T(O_n).$$

Comme $\theta_h \circ \psi_\Delta = \psi_T \circ h$, on obtient

$$\theta_h^{-1} = \psi_\Delta \circ h^{-1} \circ \psi_T^{-1}$$

$$\text{et} \qquad u + y \in \psi_\Delta \circ h^{-1} \circ \psi_T^{-1} \circ \psi_T(O_n) = \psi_\Delta(h^{-1}(O_n)) = K_1$$

puisque $\psi_T^{-1} \circ \psi_T(O_n) = O_n$ (O_n est un langage commutatif). Donc u et $u + y \in K_1 \cap K_2$ ce qui entraine $\theta_h(u)$ et $\theta_h(u + y) \in S'_k \subseteq S_k$. Il existe $p' \in N$ tel que

$$\theta_h(u) = (p', \ldots, p') \qquad \text{et} \qquad \theta_h(u + y) = (p' + \delta_1 r, \ldots, p' + \delta_k r)$$

et comme il existe $i \neq j_0$ tels que $\delta_i \neq \delta_{j_0}$ et que r est positif, $\theta_h(u + y) \notin S_k$, d'où la contradiction.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 5 : *Pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{C}(O_n)$ est strictement inclus dans $\mathscr{C}(O_{n+1})$.*

Démonstration : Il est clair que $\mathscr{C}(O_n) \subseteq \mathscr{C}(O_{n+1})$. Supposons qu'il existe $s \geqslant 1$ tel que $\mathscr{C}(O_s) = \mathscr{C}(O_{s+1})$. Nous aurions alors $\mathscr{C}(O_s) = \mathscr{C}(O_{s+p})$ pour tout $p \in N$, donc $\mathscr{L}_\psi = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathscr{C}(O_n) = \mathscr{C}(O_s)$ ce qui impliquerait d'après la proposition précédente : $E_{2s+1} \notin \mathscr{L}_\psi$, d'où la contradiction puisque

$$E_{2s+1} = c((b_1 \ldots b_{2s+1})^*) \cap b_1^* \ldots b_{2s+1}^* \in \mathscr{L}_\psi.$$

C.Q.F.D.

Le résultat suivant qui s'en déduit immédiatement, donne un exemple de cône rationnel principal tel que le plus petit cône rationnel le contenant et clos par intersection ne soit pas principal, ce qui répond à une question ouverte de S. Ginsburg ([13], p. 180).

COROLLAIRE 6 : *$\mathscr{L}_\psi = \mathscr{C}_\cap(C_1) = \mathscr{C}_\cap(D_1^*)$ est un cône rationnel non principal.*

Nous allons maintenant montrer que $\mathscr{F}(\mathscr{L}_\psi) = \mathscr{F}(c(\mathscr{R}))$ n'est pas non plus une FAL principale. Remarquons d'abord que l'on peut avoir $\mathscr{L}$ cône rationnel non principal et $\mathscr{F}(\mathscr{L})$ FAL principale. En effet, soit $\mathscr{L}$ le plus petit cône rationnel contenant Lin, la famille des langages linéaires, et clos par produit. Comme Lin n'est pas clos par produit, $\mathscr{L}$ est un cône rationnel non principal [22]. Par contre $\mathscr{F}(\mathscr{L}) = \mathscr{F}(L\text{in}) = \mathscr{F}(L_0)$ avec $L_0 = \{ wdw^R / w \in \{ a, b \}^* \}$ est une FAL principale.

Il est cependant facile de montrer que $E_{2n+1} \notin \mathscr{C}(O_n)$ implique $E_{2n+1} \notin \mathscr{F}(O_n)$. Ceci provient du fait que E_{2n+1} ne peut pas contenir le produit de deux langages infinis. Précisons, maintenant, cette notion.

DÉFINITION : *L est un CIL-langage si $L_1 L_2$ inclus dans L implique L_1 ou L_2 fini.*

Comme tout CIL-langage rationnel est fini, on peut remarquer que tout CIL-langage est sans facteur itérant (i. e. ne contient aucun rationnel infini). La réciproque est fausse, car tout CIL-langage algébrique est linéaire, alors qu'il existe pour les langages algébriques, un générateur sans facteur itérant [5]. Il existe, cependant, un bon nombre de CIL-langages connus, tels que L_0, défini ci-dessus, qui est un générateur du cône rationnel des linéaires et les langages $\langle a_1^{f_1(x)} \dots a_n^{f_n(x)} \rangle$ étudiés par Rovan [30]. Les « c-finite » langages, définis par S. Greibach ([22], p. 50, exemple 3.1), sont des CIL-langages. On peut aussi montrer que la famille ETOL définie par Rozenberg possède un CIL-langage générateur.

Montrons d'abord, pour les CIL-langages, une propriété déjà établie pour les langages qui engendrent un cône rationnel translatable [5] ou fermé par un opérateur « syntactic » [22].

PROPOSITION 5 : *Soient $\mathscr{L}$ un cône rationnel fermé par union et L un CIL-langage. Alors $L \in \mathscr{F}(\mathscr{L})$ implique $L \in \mathscr{L}$.*

Démonstration : Comme $L \in \mathscr{F}(\mathscr{L}) = \mathscr{R} \sigma \mathscr{L}$, il existe un langage rationnel $R \subseteq T^*$ et une $\mathscr{L}$-substitution s, définie sur T^*, tels que $L = s(R)$. $\mathscr{R}$ étant clos pour les substitutions finies, on peut supposer, sans nuire à la généralité de la démonstration, que pour tout $a \in T$, soit $s(a)$ est un langage infini de $\mathscr{L}$, soit $s(a) = \{ a \}$, ce qui implique que R est fini. En effet dans le cas contraire $L = s(R)$ contient un facteur itérant et ne peut être un CIL-langage. Comme $\mathscr{L}$ est clos pour l'union, il nous reste à montrer que $s(x) \in \mathscr{L}$ pour tout

$x \in R$. Tout mot $x \in R$ peut se factoriser en $x_1 b x_2$ avec $s(x_1) = x_1$, $s(x_2) = x_2$ et $b \in T \cup \{ 1 \}$. Donc $s(x) = x_1 s(b) x_2 \in \mathscr{L}$.

C.Q.F.D.

Nous avons vu, en section II, que $\mathscr{L}_\psi$ était un cône rationnel clos par intersection mais pas par substitution. Nous allons montrer, cependant, que tout cône rationnel clos par intersection est clos par insertion, une substitution particulière définie par S. Greibach [22].

DÉFINITION : *Soit s une substitution définie sur T^*. Alors s est une $\mathscr{L}$*-insertion sur *L s'il existe $T' \subseteq T$ tel que :*

(i) $L \subseteq (T \backslash T')^* (T' \cup \{ 1 \})(T \backslash T')^*$;

(ii) $s(a) = \{ a \}, \quad \forall a \in T \backslash T'$;

(iii) $s(a) \in \mathscr{L}, \quad \forall a \in T'$.

DÉFINITION : *Une famille de langage $\mathscr{L}$ est* close par insertion *si $\{ s(L)/L \in \mathscr{L}$, s $\mathscr{L}$-insection sur L $\}$ est inclus dans $\mathscr{L}$.*

PROPOSITION 6 : *Tout cône rationnel $\mathscr{L}$ clos par intersection est clos par insertion.*

Démonstration : Soient $L \subseteq T^*$ un langage de $\mathscr{L}$ et s une $\mathscr{L}$-insertion sur L. Il existe $T' \subseteq T$ tel que $L \subseteq (T \backslash T')^* (T' \cup \{ 1 \})(T \backslash T')^*$. Alors,

$$s(L) = L' \cup \left(\bigcup_{a \in T'} s(L_a) \right)$$

avec

$$L' = L \cap (T \backslash T')^* \in \mathscr{L}$$

et

$$\forall a \in T', \quad L_a = L \cap (T \backslash T')^* \{ a \} (T \backslash T')^*.$$

Comme $\mathscr{L}$ est clos par union (corollaire 1), il nous reste à montrer que $s(L_a) \in \mathscr{L}$. Pour cela, considérons l'alphabet Δ tel que $s(a) \subseteq \Delta^*$ et posons $\bar{\Delta} = \{ \bar{b}/b \in \Delta \}$ de telle façon que $T \cap \bar{\Delta} = \emptyset$. Soient h et g les homomorphismes définis respectivement sur Δ^* et $(T \cup \bar{\Delta})^*$ par

$$h(b) = \bar{b}, \quad \forall b \in \Delta,$$

$$g(a) = 1, \qquad g(x) = x, \quad \forall x \in T \backslash \{ a \} \qquad \text{et} \qquad g(\bar{y}) = y, \quad \forall \bar{y} \in \bar{\Delta}.$$

Il est, alors, facile de vérifier que $s(L_a)$ est égal à

$$g(\mathrm{Shuf}\,(L_a, h(s(a)))) \cap (T \backslash T')^* \{ a \} \Delta^* (T \backslash T')^*),$$

appartient à $\mathscr{L}$ qui est clos pour l'opération « Shuffle ».

C.Q.F.D.

Nous pouvons, maintenant, établir un résultat concernant les CIL-langages, que nous utiliserons à la section 5.

PROPOSITION 7 : *Soient $\mathscr{L}$ un cône rationnel fermé par intersection ou insertion et L un CIL-langage. Alors, si L appartient à $\mathscr{F}_\sigma(\mathscr{L})$, L est aussi dans $\mathscr{L}$.*

Démonstration : Prenons L_2 un CIL-langage de $\mathscr{L}\sigma\mathscr{L}$. Il existe, donc, $L_1 \subseteq T^*$, $L_1 \in \mathscr{L}$ et une $\mathscr{L}$-substitution s, tels que $L_2 = s(L_1)$. Comme $\mathscr{L}$ est fermé par substitution finie, on peut supposer, sans nuire à la généralité de la démonstration, que $\forall a \in T$, soit $s(a) = \{ a \}$, soit $s(a)$ est infini. Comme $L_2 = s(L_1)$ ne peut pas contenir le produit de langages infinis, s est une $\mathscr{L}$-insertion et d'après la proposition précédente $L_2 \in \mathscr{L}$. Donc tout CIL-langage de $\mathscr{L}\sigma\mathscr{L}$ appartient à $\mathscr{L}$.

Posons, maintenant, $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}$ et $\forall n \geqslant 1$, $\mathscr{L}_{n+1} = \mathscr{L}_n\sigma\mathscr{L}$. Montrons, par récurrence sur n, que tout CIL-langage de $\mathscr{L}_n$ appartient à $\mathscr{L}$. Nous venons de vérifier cette propriété pour $n = 2$. Prenons L un CIL-langage de $\mathscr{L}_{k+1}$. Comme $\mathscr{L}_k$ est un cône rationnel, donc clos par substitution finie, il existe $L' \subseteq T^*$, $L' \in \mathscr{L}_k$ et une $\mathscr{L}$-substitution s tels que $s(L') = L$ et $\forall a \in T$, $s(a) \neq \{ 1 \}$. Donc, L' est nécessairement un CIL-langage. D'après l'hypothèse de récurrence, L' est un CIL-langage de $\mathscr{L}$ et L, CIL-langage de $\mathscr{L}\sigma\mathscr{L}$, appartient à $\mathscr{L}$. La démonstration se termine en remarquant que $\mathscr{F}_\sigma(\mathscr{L}) = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathscr{L}_n$.

C.Q.F.D.

Les propositions 4 et 5 permettent d'apporter une réponse à un problème ouvert de Ginsburg et Spanier ([19], p. 387). En effet, pour tout $n \geqslant 1$, $E_{2n+1} = \{ b_1^t \dots b_{2n+1}^t / t \geqslant 0 \}$ est un CIL-langage qui n'appartient pas à $\mathscr{C}(O_n)$ donc E_{2n+1} n'appartient pas, non plus, à $\mathscr{F}(O_n)$. Par contre, il appartient à

$$\mathscr{F}(\mathscr{L}_\psi) = \mathscr{F}(c(\mathscr{R})) = \mathscr{F}\left(\bigcup_{n \geq 1} \mathscr{C}(O_n)\right) = \bigcup_{n \geq 1} \mathscr{F}(O_n),$$

donc :

THÉORÈME 3 : *$\mathscr{F}(\mathscr{L}_\psi) = \mathscr{F}(c(\mathscr{R}))$ est une FAL non principale.*

V. CÔNES RATIONNELS GÉNÉRÉS PAR DES FAMILLES DE LANGAGES COMMUTATIFS OU BORNES

Donnons, en premier lieu, une condition pour qu'un cône rationnel soit commutativement clos. Ce résultat nous permet ensuite d'établir un lien entre les langages bornés et les langages commutatifs (corol. 8).

PROPOSITION 8 : *Soit $\mathscr{L}$ un cône rationnel. Si $\mathscr{L} \wedge \mathscr{C}(C_1)$ est inclus dans $\mathscr{L}$, alors $\mathscr{L}$ est commutativement clos.*

Démonstration : Prenons

$$T = \{ a_1, \ldots, a_n \}, \qquad \overline{T} = \{ \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \}$$

et $L \subseteq T^*$ un langage de $\mathscr{L}$. Pour tout $i \in \{ 1, \ldots, n \}$, définissons l'homomorphisme h_i de $(T \cup \overline{T})^*$ dans $\{ a, b \}^*$ par :

$$h_i(a_i) = a, h_i(\bar{a}_i) = b \qquad \text{et} \qquad h_i(\bar{a}_j) = h_i(a_j) = 1$$

pour $j \neq i$. Posons $L' = L\overline{T}^* \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} h_i^{-1}(C_1) \right)$ et montrons que $c(L) = g(L')$ où g est l'homomorphisme défini sur $T \cup \overline{T}$ par

$$g(a_i) = 1 \qquad \text{et} \qquad g(\bar{a}_i) = a_i, \quad \forall i \in \{ 1, \ldots, n \}.$$

Soit $x \in L'$. On peut factoriser x en yz avec $y \in L$ et $z \in \overline{T}^*$. Pour tout $i \in \{ 1, \ldots, n \}$, $yz \in h_i^{-1}(C_1)$ donc $l_{a_i}(y) = l_{\bar{a}_i}(z)$. Ceci implique que $g(x) = g(z) \in c(y) \subseteq c(L)$. Réciproquement, si $x \in c(L)$, il existe $y \in L$ et $\bar{x} \in \overline{T}^*$ tels que $x \in c(y)$ et $g(\bar{x}) = x$. Pour tout $i \in \{ 1, \ldots, n \}$, $h_i(y\bar{x}) \in C_1$ et comme $y\bar{x} \in L\overline{T}^*$, $y\bar{x} \in L'$. Donc $x = g(y\bar{x})$ appartient à $g(L')$. Comme $\mathscr{L} \wedge \mathscr{C}(C_1)$ est inclus dans $\mathscr{L}$, $g(L') \in \mathscr{L}$ qui est commutativement clos.

C.Q.F.D.

Comme tout cône rationnel commutativement clos contient C_1, qui est égal à $c((ab)^*) \cap a^* b^*$, la proposition précédente implique :

COROLLAIRE 7 : *Soit $\mathscr{L}$ un cône rationnel fermé par intersection. Alors $\mathscr{L}$ est commutativement clos si et seulement si $C_1 \in \mathscr{L}$.*

Désignons par $\mathscr{B}$, la famille de tous les langages bornés.

COROLLAIRE 8 : *$\mathscr{C}$(COM) est égal à $\mathscr{C}_\cap(\mathscr{B})$, le plus petit cône rationnel fermé par intersection et contenant les langages bornés.*

Démonstration : Soient L un langage inclus dans $W_1^* \ldots W_n^*$, $T = \{ a_1, \ldots, a_n \}$ et h l'homomorphisme défini sur T^* par $h(a_i) = W_i$ $\forall i \in \{ 1, \ldots, n \}$. Il est clair que $L = h(c(L') \cap a_1^* \ldots a_n^*)$, où

$$L' = h^{-1}(L) \cap a_1^* \ldots a_n^* = c(L') \cap a_1^* \ldots a_n^*$$

appartient à $\mathscr{C}$(COM). Donc $L \in \mathscr{C}$(COM) et puisque $\mathscr{C}$(COM) est fermé par intersection, $\mathscr{C}_\cap(\mathscr{B})$ est inclus dans $\mathscr{C}$(COM). Réciproquement, $C_1 \in \mathscr{C}_\cap(\mathscr{B})$ qui est donc commutativement clos et contient COM $= c(\mathscr{B})$ ainsi que $\mathscr{C}$(COM).

C.Q.F.D.

La proposition 8 nous permet aussi de retrouver le théorème 2. Remarquons, cependant, que, pour la démonstration de la proposition 8, nous utilisons un homomorphisme « effaçant ». Au contraire, les homomorphismes utilisés pour obtenir le théorème 2 sont propres et le résultat reste vrai pour des cônes rationnels fidèles.

Montrons maintenant que $D_1'^*$, le langage de semi-Dyck sur une lettre n'appartient pas à $\mathscr{F}$(COM). Pour cela, nous avons besoin de quelques définitions. Pour $w \in \{ a, b \}^*$, posons $d(w) = l_a(w) - l_b(w)$ où $l_a(w)$ désigne le nombre d'occurrences de la lettre a dans w, et $\bar{d}(w) = \inf \{ d(x)/\exists y$ tel que $w = xy \}$.

Pour $m, n \in N$, notons

$$L_{m,n} = \{ w \in \{ a, b \}^*/d(w) = m - n, \quad \bar{d}(w) \geqslant -n \}.$$

Les langages $L_{m,n}$ sont rationnellement équivalents à $D_1'^* = L_{0,0}$, le semi-Dyck sur une lettre. Montrons d'abord le résultat suivant :

LEMME 11 : *Soit $\mathscr{L}$ un cône rationnel fermé par union. Si $D_1'^*$ appartient à $\mathscr{F}(\mathscr{L})$, il existe $k \in N$ et $L \in \mathscr{L}$ tels que $D_1'^* \subseteq L \subseteq L_{k,k}$.*

Démonstration : Il existe un rationnel $R \subseteq \{ a_1, \ldots, a_p \}^*$, des langages non vides $L_1, \ldots, L_p$ de $\mathscr{L}$ et une substitution s définie par $s(a_i) = L_i$, $\forall i \in \{ 1, \ldots, p \}$ tels que $D_1'^* = s(R)$. Prenons un mot uxv de R, $z \in s(u)$, $z' \in s(v)$ et posons $n = d(z)$, $m = -d(z')$. Pour tout $y \in s(x)$, $zyz' \in D_1'^*$, donc $\bar{d}(zy) \geqslant \bar{d}(zyz') \geqslant 0$ et $d(zyz') = 0$. Nous en déduisons que $n = d(z)$ et $m = d(zy)$ qui sont supérieurs à $\bar{d}(zy)$, appartiennent à N. De plus, $\bar{d}(zy) \geqslant 0$ implique $\bar{d}(y) \geqslant -d(z) = -n$ et comme

$$d(y) = -d(zz') = m - n,$$

$s(x)$ est inclus dans $L_{m,n}$. On peut supposer, sans nuire à la généralité, que chaque a_i occurre au moins dans un mot de R, donc on en déduit que pour tout $i \in \{ 1, \ldots, p \}$, il existe m_i, $n_i \in N$ tels que $L_i = s(a_i) \subseteq L_{m_i, n_i}$.

Posons

$$\mu = \sup \{ m_i/i \in \{ 1, \ldots, p \} \} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \sup \{ n_i/i \in \{ 1, \ldots, p \} \}$$

Comme $uxv \in R$ qui est rationnel, il existe $t \in N$, u', u'' tels que $l(u')$, $l(u'') \leqslant t$ et $u'xv$, $u''v \in R$. Il existe m', $n' \in N$ tels que $s(u') \subseteq L_{m',n'}$. Tout mot $y' \in s(u')$ est un sous mot initial d'un mot de $D_1'^*$, donc $\bar{d}(y) \geqslant 0$ et l'on peut prendre $n' = 0$. En outre

$$m' = d(y') \leqslant \sum_{i=1}^{l(u')} \mu \leqslant \sum_{j=1}^{t} \mu = t\mu.$$

De même, $s(u'')$ est inclus dans $L_{m'',0}$ avec $m'' \leqslant t\mu$. Comme $s(u'')\, s(v)$ est inclus dans $D_1'^*$, nous en déduisons $s(v) \subseteq L_{0,m''}$ et $s(u')s(x)s(v) \subseteq D_1'^*$ implique $s(x) \subseteq L_{m'',m'}$. Nous en déduisons la propriété :

(*) Il existe $k' = \mu t + 1$ tel que $uxv \in R$ implique $s(x) \subseteq L_{m,n}$ avec $0 \leqslant m, n < k'$.

Posons

$$B = \{ (q, q', i)/0 \leqslant q, q' \leqslant k', i \in \{ 1, \ldots, p \} \quad \text{et} \quad q - q' = m_i - n_i \}$$

et pour

$$\rho = (q, q', i) \in B, \quad A_\rho = \{ w/a^q w b^{q'} \in L_i \}.$$

Nous allons montrer que $D_1'^* \subseteq L \subseteq L_{k,k}$ avec $k = k' + \gamma$ et $L = \bigcup_{\rho \in B} A_\rho$.

Prenons $w \in D_1'^*$, $a^{k'} w b^{k'} \in D_1'^*$ et d'après la propriété (*), il n'existe pas de mots x_1, x_2 tels que $x_1 x_2 \in R$ et $a^{k'} w_1 \in s(x_1)$ avec w_1 sous mot initial de w. Et comme $a^{k'} w b^{k'} \in s(R)$, il existe q, $q' \leqslant k'$, $i \in \{ 1, \ldots, p \}$ tels que

$$a^q w b^{q'} \in s(a_i) = L_i \subseteq L_{m_i, n_i} \cdot d(w) = 0,$$

donc $q - q' = m_i - n_i$, $\rho = (q, q', i) \in B$ et $w \in A_\rho \subseteq L$.

Prenons, maintenant $w' \in A_\rho$ avec $\rho = (q, q', i) \in B$. Donc

$$a^q w' b^{q'} \in L_i \subseteq L_{m_i, ni}$$

et comme $q - q' = m_i - n_i$, $d(w') = 0$. De plus $\bar{d}(a^q w') \geqslant - n_i$ implique $\bar{d}(w') \geqslant - n_i - q \geqslant - k$, donc $w' \in L_{k,k}$.

Il nous reste à montrer que $L \in \mathscr{L}$, ce qui vient du fait que pour

$$\rho = (q, q', i) \in B, \quad A_\rho \in \mathscr{C}(L_i) \subseteq \mathscr{L}.$$

Et $L = \bigcup_{\rho \in B} A_\rho \in \mathscr{L}$ car B est fini et $\mathscr{L}$ est clos par union.

C.Q.F.D.

LEMME 12 : *Soit L un langage de $\mathscr{C}$(COM). Si $D_1'^*$ est inclus dans L, alors, pour tout $m \in N$, $L \backslash L_{m,m} \neq \emptyset$.*

Démonstration : Si $L \in \mathscr{C}$(COM), il existe un langage commutatif L' et un langage rationnel R inclus dans T^* ainsi qu'un homomorphisme alphabétique h de T^* dans $\{ a, b \}^*$ tels que $L = h(L' \cap R)$. Soit

$$M = (Q, T, f, p_0, F)$$

un automate d'états fini déterministe qui reconnaît R. Prenons $k = m + 1$ et $n > |Q|$, le nombre d'états de M. Alors $w = (a^{nk} b^{nk})^n \in D_1'^* \subseteq L$, donc il existe $z = x_1 y_1 \ldots x_n y_n \in L' \cap R$ tel que $h(x_i) = a^{nk}$ et $h(y_i) = b^{nk}$ pour tout $i \in \{ 1, \ldots, n \}$. Posons pour tout $j \in \{ 0, \ldots, n - 1 \}$,

$$z_{j+1} = x_1 y_1 \ldots x_j y_j \qquad \text{et} \qquad p_j = f(p_0, z_{j+1}).$$

Comme $h(x_j) = a^{nk}$ avec $n > |Q|$, x_j peut se factoriser en $u_j x'_j v_j$ avec $p'_j = f(p_j, u_j) = f(p'_j, x'_j)$ et $h(x'_j) \in a^k a^*$. De plus, il existe $t < l$ tels que $p'_t = p'_l$, ce qui entraîne que

$$z' = z_t u_t v_t y_t \ldots u_l x'_l x'_t v_l y_l \ldots x_n y_n \in R.$$

Comme L' est commutatif, z' appartient aussi à L' et $h(z') \in L$. Par contre $y = h(z')$ n'appartient pas à $L_{m,m}$ car

$$\bar{d}(y) = d(h(z_t u_t v_t y_t)) \leqslant -k < -m.$$

C.Q.F.D.

Nous pouvons en déduire immédiatement le résultat de base de cette section :

THÉORÈME 4 : *Le semi-Dyck sur une lettre, $D_1'^*$ n'appartient pas à F(COM), la plus petite FAL contenant tous les langages commutatifs.*

Comme D_1^*, le Dyck sur une lettre est un langage commutatif, nous retrouvons un résultat dû à L. Boasson :

COROLLAIRE 9 [4] : $D_1' \notin \mathscr{F}(D_1^*)$.

Soit L_0 le générateur de la famille Lin, défini à la section IV. Comme $\mathscr{C}_\cap(L_0)$ est la famille de tous les langages récursivement énumérables [1] et que $\mathscr{C}$(COM) est clos par intersection, le théorème précédent implique: $L_0 \notin \mathscr{C}$(COM). De plus, L_0 étant un CIL-langage, on peut appliquer à $\mathscr{C}$(COM) la proposition 7 démontrée à la section IV, donc :

COROLLAIRE 10 : *La famille des langages linéaires n'est pas incluse dans la plus petite FAL contenant les langages commutatifs et close par substitution.*

Le corollaire 8 permet d'obtenir :

COROLLAIRE 11 : *Soit $\mathscr{L}$ une famille de langages bornés (algébriques). Alors $\mathscr{F}_\sigma(\mathscr{L})$ ne contient pas tous les langages algébriques.*

Remarquons qu'ici, contrairement à Goldstine [18], nous pouvons nous passer de l'hypothèse d'algébricité des langages de $\mathscr{L}$.

Enfin, le résultat suivant qui découle, aussi, directement des corollaires 8 et 10, a été démontré en premier lieu par J. L. Durieux :

COROLLAIRE 12 [8] : *$L_0 = \{ w d w^R / w \in \{ a, b \}^* \}$ n'appartient pas au cône rationnel engendré par les langages bornés.*

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à L. Boasson pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour les conseils qu'il m'a prodigués.

BIBLIOGRAPHIE

1. B. S. BAKER et R. V. BOOK, *Reversal-Bounded Multipushdown Machines*, J. Comp. Syst. Sc., vol. 8, 1974, p. 315-332.
2. J. BERSTEL, *Une hiérarchie des parties rationnelles de N^2*, Math. Systems Theory, vol. 7, 1973, p. 114-137.
3. J. BERSTEL et L. BOASSON, *Une suite décroissante de cônes rationnels*, Institut de Programmation, Paris, n° I. P. 74-75, 1974.
4. L. BOASSON, *Two Iteration Theorems for Some Families of Languages*, J. Comp. Syst. Sc., vol. 7, 1973, p. 583-596.
5. L. BOASSON et M. NIVAT, *Sur diverses familles de langages fermées par transduction rationnelle*, Acta Informatica, vol. 2, 1973, p. 180-188.
6. R. V. BOOK et S. A. GREIBACH, *Quasi-Realtime Languages*, Math. Systems Theory, vol. 4, 1970, p. 97-111.
7. R. V. BOOK, M. NIVAT et M. PATERSON, *Intersections of Linear Context-Free Languages and Reversal-Bounded Multipushdown Machines*, Proceedings of 6th annual A.C.M. Symphosium on theory of Computing, 1974, p. 290-296.
8. J. L. DURIEUX, *Sur l'image, par une transduction rationnelle, des mots sur une lettre*, R.A.I.R.O., R-2, 1975, p. 25-37.
9. S. EILENBERG, Communication au Congrès international des Mathématiciens, Nice, 1970.
10. S. EILENBERG et M. P. SCHUTZENBERGER, *Rational Sets in Commutative Monoids*, J. Algebra, vol. 13, 1969, p. 173-191.
11. M. J. FISCHER et A. L. ROSENBERG, *Real-Time Solutions of the Origin-Crossing Problem*, Math. Systems theory, vol. 2, 1968, p. 257-263.
12. S. GINSBURG, *The Mathematical Theory of Context-Free Languages*, McGraw-Hill, New York, 1966.
13. S. GINSBURG, *Algebraic and Automata-Theoretic Properties of Formal Languages*, North-Holland Publishing Company, 1975.
14. S. GINSBURG et J. GOLDSTINE, *Intersection-Closed Full AFL and the Recursively Enumerable Languages*, Information and Control, vol. 22, 1973, p. 201-231.
15. S. GINSBURG et S. A. GREIBACH, *Studies in Abstract Families of Languages*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., vol. 113, 1966, p. 285-396.
16. S. GINSBURG et S. A. GREIBACH, *Principal AFL*, J. Comp. Syst. Sc., vol. 4, 1970, p. 308-338.
17. S. GINSBURG et S. A. GREIBACH, *Multitape AFA*, J. A.C.M., vol. 19, 1972, p. 193-221.
18. S. GINSBURG et E. M. SPANIER, *Bounded Algol-like Languages*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 113, 1964, p. 333-368.
19. S. GINSBURG et E. M. SPANIER, *AFL with the Semilinear Property*, J. Comp. Syst. Sc., vol. 5, 1971, p. 365-396.
20. J. GOLDSTINE, *Substitution and Bounded Languages*, J. Comp. Syst. Sc., vol. 6, 1972, p. 9-29.
21. S. A. GREIBACH, *Chains of Full AFL's*, Math. Systems theory, vol. 4, 1970, p. 231-242.
22. S. A. GREIBACH, *Simple Syntactic Operators on Full Semi-AFL's*, J. Comp. Syst. Sc., vol. 6, 1972, p. 30-76.

23. S. A. GREIBACH, *One Counter Language and the IRS Condition*, J. Comp. Syst. Sc., vol. 10, 1975, p. 237-247.

24. R. ITO, *Every Semilinear Set is a Finite Union of Disjoint Linear Sets*, J. Comp. Syst. Sc., vol. 3, 1969, p. 221-231.

25. M. LATTEUX, *Sur les semilinéaires-langages bornés*, Publication n° 60 du Laboratoire de Calcul de l'Université de Lille I, 1975.

26. L. Y. LIU et P. WEINER, *A Characterization of Semilinear Sets*, J. Comp. Syst. Sc., vol. 4, 1970, p. 399-307.

27. L. Y. LIU et P. WEINER, *An Infinite Hierarchy of Intersections of Context-Free Languages*, Math. System Theory, vol. 7, 1973, p. 185-192.

28. M. NIVAT, *Transduction des langages de Chomsky*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 18, 1968, p. 339-455.

29. R. J. PARIKH, *Language Generating Devices*, M.I.T. Res. Lab. Electron. Quart. Prog. Rept., vol. 60, 1961, p. 199-212.

30. B. ROVAN, *Proving Containment of Bounded AFL*, J. Comp. Syst. Sc., vol. 11, 1975, p. 1-55.