

F. H. RAYMOND

Note sur l'algèbre des fonctions

*Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle.
Informatique théorique*, tome 9, n° R3 (1975), p. 25-49

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1975__9_3_25_0>

© AFCET, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR L'ALGÈBRE DES FONCTIONS

par F. H. RAYMOND (1)

Communiqué par M. NIVAT

Résumé. — La définition et les propriétés (celles nécessaires à l'ensemble de la note) d'une algèbre formelle, dite algèbre des fonctions, dont les objets sont des fonctions, font l'objet de cet article.

L'application est illustrée dans deux paragraphes, l'un traitant de la factorisation des fonctions, l'autre des fonctions-boucles, qui forment un sous-ensemble des fonctions récursives, lesquelles sont engendrées dans l'algèbre des fonctions par un opérateur unique. Les propriétés établies englobent de manière directe l'approche de Böhm et Jacopini par exemple, et expriment que tout programme peut être construit sans instructions GOTO.

1. INTRODUCTION

1.1. Dans un travail antérieur [9] [10] ayant pour objet une formalisation du concept de calcul, nous avons été amenés à créer un outil élémentaire que nous avons appelé algèbre des fonctions. Il fait l'objet des § 2 et 4 de cette note. Les objets de cette algèbre sont des fonctions au sens classique du mot, et naturellement nous sommes amenés, en suivant la démarche des mathématiciens, à considérer une algèbre formelle des fonctions.

Cette algèbre est caractérisée par un ensemble d'opérateurs permettant avec des fonctions de former de nouvelles fonctions, en premier lieu sans schéma récursif, c'est l'objet du § 2 puis dans le § 4 un seul opérateur de l'algèbre des fonctions introduit la récursivité.

Les § 2 et 4 sont limités à l'essentiel nécessaire à l'exposé des § 3 et 5 respectivement lesquels illustrent l'approche proposée.

(1) Conservatoire National des Arts et Métiers. Paris.

Sous le vocable factorisation dans le § 3, nous établissons des propriétés de fonctions (définies dans l'algèbre des fonctions) dont l'intérêt pratique est illustré par l'observation suivante. Le produit de fonctions f_1 et f_2 tel qu'il est défini classiquement résulte dans l'algèbre des fonctions de l'application de l'opérateur S^2 — opérateur binaire — aux fonctions f_1 et f_2 , dans l'ordre convenable; ceci conduit à la fonction $f_1 f_2 S^2$ (nous adoptons la notation post fixée qui permet de passer directement des objets fonctions aux objets instructions d'un langage de programmation, problème non traité dans cette note). Factoriser une fonction c'est la mettre sous la forme d'un produit de fonctions.

Les résultats du § 3 conduisent à établir dans le § 5 des propriétés générales d'une classe des fonctions récursions (définies dans le § 4) appelées « fonctions-boucles », fonctions qui s'expriment, dans un langage de programmation, par des suites d'instructions contenant, dans le cas général, des instructions GOTO, et par voie de conséquences, ces suites contiennent des étiquettes. Nous démontrons dans le § 5 que toute fonction-boucle est équivalente à une fonction-boucle primitive, laquelle est exprimable par l'instruction WHILE-DO.

Il semble que des approches ayant la même préoccupation que l'algèbre des fonctions se révèlent en ce moment et que les informaticiens recherchent un outil répondant à leurs besoins, par exemple apte à apporter une aide à la programmation et permettant d'exprimer la sémantique d'un programme. Nous citerons parmi les récentes publications les références [7] et [8]. Le cadre limité de cette note ne nous a pas permis de montrer que l'algèbre des fonctions peut constituer cet outil, nous pensons que son contenu le suggère au lecteur.

1.2. B est un ensemble d'objets atomiques, F_0 est un ensemble de fonctions exécutables, chaque membre de F_0 est un atome, c'est le nom propre d'une fonction exécutable; dans l'exposé, chaque membre de F_0 sera représenté par f_i^0 , $i \in N$ (N ensemble des nombres naturels).

B contient quatre atomes particuliers représentés par V, F, Λ et ω .

Le vocable exécutable utilisé pour définir F_0 est en relation avec le concept d'exécutant (mécanique) dont les actions sont évoquées, en une première étape, par une fonction v (qui n'appartient évidemment pas à F_0).

Nous disons que l'algèbre $\mathcal{B} = (B, F_0)$, est une représentation du calcul défini par les objets de l'ensemble X et un sous-ensemble des applications (X^n est le produit cartésien n fois de X). $\{X^n \rightarrow X \mid n \in N\}$, si ayant défini :

$$v_0 : B \rightarrow X, \mu_0 : F_0 \rightarrow \{X^n \rightarrow X \mid n \in N\}$$

l'exécutant applique v à tout terme t de \mathcal{B} selon les relations :

$$(1) \quad \begin{cases} [[t_1, \dots, t_n] f_i^0] v = [[t_1] v, \dots, [t_n] v] [f_i^0] \mu_0 \\ [t] v = [t] v_0 \quad \text{si } t \in B \end{cases}$$

Nous dirons que :

$[f_i^0]_{\mu_0}$ est l'interprétation dans le calcul sur les objets de X , du nom propre f_i^0 ,

$[t]v$ est la valeur (objet de X) du terme t de \mathcal{B}

$[b_i]v_0$ est l'interprétation de tout objet atomique b_i , $b_i \in B$.

Dans toute interprétation les images de V , F , ω et Λ sont les mêmes symboles : ils ont les significations attribuées généralement aux mots vrai, faux, indéterminé et Λ est l'atome représentant une liste vide.

\mathcal{L}_B est l'ensemble des listes telles que définies classiquement formées avec les atomes de B . Dans l'exposé x et x_i , $i \in N$ évoquent un objet appartenant à $B \cup \mathcal{L}_B$.

REMARQUES : 1) Nous utiliserons systématiquement la notation post fixée pour construire les termes de \mathcal{B} comme indiqué dans (1) ci-dessus, car elle est la plus proche des moyens permettant de définir avec plus de précisions le concept d'exécutant, ce que nous ne ferons pas dans cette note.

2) Dans le même but, il est utile de discerner deux natures d'actions de l'exécutant, (voire deux types d'exécutants) pour lequel, $[t]v$ est une instruction, comprise par lui différemment — selon que $t \in B$ ou $t \notin B$. Dans ce dernier cas le terme $[t_1, \dots, t_n]f_i^0$ de B est soumis à ces deux actions dans un ordre imposé :

— en premier valuation par v des termes t_1, \dots, t_n soient b_1, \dots, b_n les objets obtenus,

— en second lieu construction effective, si elle est possible, de la représentation la plus simple de $[b_1, \dots, b_n]f_i^0$ par un atome de B ; si elle est impossible une décision est à prendre qu'il n'y a pas lieu d'étudier ici, dont la plus simple est d'attribuer comme valeur à ce terme l'objet ω .

Alors si **cal** est l'opération exécutée dans la deuxième étape, en revenant à (1) :

$$[[t_1, \dots, t_n]f_i^0]v = [[[t_1]v, \dots, [t_n]v] [f_i^0]_{\mu_0}] \mathbf{cal}$$

Le second membre met en évidence le principe de séquentialité si on a affaire à un exécutant unique, ou le « travail » simultané (en parallèle) de n exécutants avant qu'un exécutant obéisse à **cal**.

2. ALGÈBRE DE FONCTIONS

2.1. Définitions

1. \mathcal{A} est une algèbre à opérateurs représentée par (F, S) dont les termes forment l'ensemble F , S est un ensemble fini d'opérateurs :

$$S = \{ \mathbf{cond}, S^0, S^1, S^2, \dots \}$$

cond, S^0 , S^1 , ... sont des symboles atomiques.

2. A \mathcal{A} est associée l'algèbre formelle $\hat{\mathcal{A}} = (F, \hat{\mathcal{S}})$ définie par :

– les symboles de l'ensemble $\hat{\mathcal{S}} = \{\widehat{\mathbf{cond}}, \hat{S}^0, \hat{S}^1, \dots\}$, ce sont ses symboles fonctionnels, et les applications :

$$\hat{S}^1 : F \rightarrow F, \hat{S}^1(f) = fS^1$$

$$\hat{S}^n : F \rightarrow F, \hat{S}^n(f_1, \dots, f_n) = f_1, \dots, f_n S^n$$

$$\widehat{\mathbf{cond}} : F^3 \rightarrow F, \widehat{\mathbf{cond}}(f_1, f_2, f_3) = f_1 f_2 f_3 \mathbf{cond}$$

– les symboles de constantes formant l'ensemble $G_0 \cup \{b_i S^0 \mid b_i \in B\}$, G_0 sera défini plus bas : c'est l'ensemble des fonctions *primitives de sélection*.

3. Soit F_0 un sous-ensemble non vide de F et $\hat{\mathcal{A}}_{F_0} = (\bar{F}_0, \hat{\mathcal{S}})$ la sous-algèbre fonctionnelle engendrée par F_0 , \bar{F}_0 étant l'intersection de tous les sous domaines de $\hat{\mathcal{A}}_{F_0}$ qui contiennent F_0 .

Définition : Tout membre de \bar{F}_0 est appelé une fonction, il sera représenté dans l'exposé par f et le plus souvent par une consonne indicée par un entier.

$f \in \bar{F}_0$ sera plus simplement écrit $f \in \mathcal{A}$, f évoquant à la fois une fonction de \mathcal{A} et un mot de $\hat{\mathcal{A}}$.

REMARQUE : Malcev [6] semble avoir eu une idée analogue, mais, à notre connaissance, lui ou ses élèves ne l'ont pas développée dans une perspective informatique, ce qui est notre propos.

2.2. Interprétation

L'interprétation de \mathcal{A} (et de $\hat{\mathcal{A}}$) postule l'existence d'un exécutant non autrement défini.

Interprétation de fS^1 , pour toute fonction f : la fonction fS^1 est comprise par l'exécutant comme lui enjoignant d'appliquer f à un objet $x \in B \cup \mathcal{L}_B$, x est appelé contexte, il est choisi par un tiers non précisé. L'exécutant calculera la valeur du terme $[x]f$.

Interprétation de $f_1 \dots f_n S^n$, pour toutes fonctions f_1, \dots, f_n : en considérant la fonction $f_1 \dots f_n S^n S^1$ l'interprétation est exprimée par :

$$[x]f_1 \dots f_n S^n = [[x]f_1, \dots, [x]f_{n-1}]f_n$$

Interprétation de $f_1 f_2 f_3 \mathbf{cond}$, pour toutes fonctions f_1, f_2, f_3 : en procédant comme ci-dessus,

$$[x]f_1 f_2 f_3 \mathbf{cond} = \begin{cases} [x]f_2 & \text{si } [[x]f_1]^v = V \\ [x]f_3 & \text{si } \text{id.} = F \\ \omega & \text{si } \text{id.} \notin \{V, F\} \end{cases}$$

Interprétation de $b_i S^0$ pour $\forall b_i \in B$: c'est la fonction de choix de l'objet atomique b_i , par conséquent en considérant la fonction $b_i S^0 S^1$ nous formulons l'interprétation par l'égalité :

$$[x]b_i S^0 = b_i$$

2.3. Fonctions primitives de sélection

L'ensemble G_0 introduit dans la définition de \mathcal{A} peut être défini de plusieurs manières, la pratique informatique en suggère trois, notées G_0^1, G_0^2, G_0^3 .

Définition de G_0^1 : $G_0^1 = \{ \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n, \dots \}$ ensemble infini de fonctions pratiquement limité à une fonction π_n . L'interprétation est, en considérant $\pi_0 S^1, \pi_1 S^1, \dots$, les x_i appartenant à $B \cup \mathcal{L}_B$:

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_n] \pi_0 &= [(x_1, \dots, x_n)] \pi_0 = (x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}_B \\ \forall x \in \mathcal{L}_B, [x] \pi_0 &= x, [()] \pi_0 = (), () \text{ est une liste vide, } \Lambda = (). \end{aligned}$$

$$[x_1, \dots, x_n] \pi_j = [(x_1, \dots, x_n)] \pi_j \quad \text{pour } j \geq 1.$$

$$[(x_1, \dots, x_n)] \pi_j = \begin{cases} x_j & \text{si } 1 \leq j \leq n \\ \omega & \text{si } j > n \end{cases}$$

Définition de G_0^2 : $G_0^2 = \{ \mathbf{cons}, \pi_d, A_d \}$

Interprétation :

$$\begin{aligned} [(x_1, \dots, x_n), x] \mathbf{cons} &= (x_1, \dots, x_n, x) \\ [(x_1, \dots, x_n)] \pi_d &= x_n, [(x_d, \dots, x_n)] A_d = (x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

G_0^3 se définit de manière symétrique, $G_0^3 = \{ \mathbf{edif}, \pi_g, A_g \}$ l'indice g rapplant gauche, d droite dans le cas G_0^2 :

Nous limiterons l'exposé au cas G_0^1 , faute de place.

Les définitions données justifient le vocable fonctions de sélection abrégée de « sélection et construction » puisque π_0 et \mathbf{cons} sont interprétées comme « constructeurs ».

2.4. Isotonie

Définition : a) $f_1 \leq f_2$ si dans toute interprétation des atomes de F_0 la fonction f_1 est la restriction de la fonction f_2 .

Nous dirons que f_1 est moins bien définie que f_2 et que celle-ci est mieux définie que celle-là.

b) Si $f_1 \leq f_2$ et $f_2 \leq f_1$, nous dirons que f_1 et f_2 sont équivalentes ce qui sera exprimé par la relation $f_1 \equiv f_2$.

Il est facile de démontrer les lemmes suivants [10] :

Lemmes :

1. $f \leq f'$ entraîne $fS^1 \leq f'S^1$
2. $f \leq f'$ entraîne $f_1 \dots f \dots f_n S^n \leq f_1 \dots f' \dots f_n S^n$, f et f' étant au même rang dans $f_1 \dots f_n S^n$,
3. $f \leq f'$ entraîne $f_1 \dots f_n f S^{n+1} \leq f_1 \dots f_n f' S^{n+1}$
4. $f \leq f'$ entraîne $pfq \text{ cond} \leq pf'g \text{ cond}$
 $pgf \text{ cond} \leq pgf' \text{ cond}$
 $p \leq p'$ entraîne $pfq \text{ cond} \leq p'fg \text{ cond}$

Soit privilégiée dans une fonction, représentée dans l'exposé par φ , une fonction f y ayant au moins une occurrence, ce qui est évoqué par $\varphi(f)$. $\varphi(f)$ étant obtenue par l'application un nombre fini de fois des opérateurs \hat{S}^n , n entier, et **cond** nous déduisons des lemmes :

Théorème d'isotonie : $f \leq f'$ entraîne $\varphi(f) \leq \varphi(f')$

d'où le corollaire : $f \equiv f'$ entraîne $\varphi(f) \equiv \varphi(f')$

2.5. Fonction f_ω

Définition : f_ω est une fonction dont le domaine, dans toute interprétation, est l'ensemble vide.

Nous en déduisons pour tout $x \in B \cup \mathcal{L}_B$, $[x]f_\omega = \omega$ et la propriété :

Propriété : $f_\omega fS^2 \equiv ff_\omega S^2 \equiv f_\omega$.

2.6. Axiomes de \mathcal{A} : Pour faciliter la lecture, les fonctions prédicats sont représentées par p, q éventuellement indicées.

A_0 : $f_1 \dots f_n g_1 \dots g_p g S^{p+1} S^{n+1} \equiv f_1 \dots f_n g_1 S^{n+1} \dots f_1 \dots f_n g_p S^{n+1} g S^{p+1}$

si $n = p = 1$, il exprime l'associativité du produit de fonctions,
 si $n = 1$, il s'exprime par la distributivité à droite du produit de fonctions, sauf auprès de la dernière fonction suffixée par S^{p+1}

g_1, \dots, g_p sont dites fonctions initiales de $g_1 \dots g_p g S^{p+1}$, voir § 3.1

si $p = 1$, il s'exprime par la non distributivité à gauche du produit de fonctions,

g_1 dans $f_1 \dots f_n g_1 S^{n+1}$ y est terminale, voir § 3.2

A_1 : $pf f \text{ cond} \leq f$, $VS^0 f_1 f_2 \text{ cond} \equiv f_1$

A_2 : f_{\neg} étant dans toute interprétation, la fonction définie par $VS^0 f_{\neg} S^2 \equiv FS^0$, $FS^0 f_{\neg} S^2 \equiv VS^0$:

$$pf_1 f_2 \text{ cond} \equiv pf_{\neg} S^2 f_2 f_1 \text{ cond}$$

A_3 : $ppf_1 f_2 \text{ cond } f_3 \text{ cond} \equiv pf_1 f_3 \text{ cond}$

A_4 : $p_1 p_2 p_1 f_1 f_2 \text{ cond } f_3 \text{ cond } f_4 \text{ cond} \equiv p_1 p_2 f_1 f_3 \text{ cond } f_4 \text{ cond}$

A_5 : $p_1 p_2 p_3 \text{ cond } f_1 f_2 \text{ cond} \equiv p_1 p_2 f_1 f_2 \text{ cond } p_3 f_1 f_2 \text{ cond cond}$

A_6 : $p_1 p_2 f_1 f_2 \text{ cond } p_2 f_3 f_4 \text{ cond cond} \equiv p_2 p_1 f_1 f_3 \text{ cond } p_1 f_2 f_4 \text{ cond cond}$

A_7 : $f_1 p f f' \text{ cond } S^2 \equiv f_1 p S^2 f_1 f S^2 f_1 f' S^2 \text{ cond}$

A_8 : $f_1 \dots f_{i-1} p f_i f'_i \text{ cond} \dots f_n S^n \succcurlyeq p f_1 \dots f_i \dots f_n S^n f_1 \dots f'_i \dots f_n S^n \text{ cond}$
 Dans le cas $n = 2$, on a une équivalence.

A_9 : $f_1 \dots f_n S^n S^1 \equiv f_1 S^1 \dots f_{n-1} S^1 f_n S^n$, $pf_1 f_2 \text{ cond } S^1 \equiv p S^1 f_1 S^1 f_2 S^1 \text{ cond}$

A_{10} : $f_1 f_2 S^1 S^2 \equiv f_2 S^1$

A_{11} : $f b_i S^0 S^2 \equiv b_i S^0$

A_{12} : $f \pi_0 S^2 \equiv f$, $\pi_0 f S^2 \equiv f$

A_{13} : $f_1 \dots f_n \pi_j S^{n+1} \equiv \begin{cases} f_j & \text{si } 1 \leq j \leq n \\ f_{\omega} & \text{si } j > n \end{cases}$

Enfin certaines fonctions de F_0 peuvent jouir de propriétés exprimables par des relations dans \mathcal{A} , c'est le cas de f_{ω} , elles conduiront donc à des axiomes supplémentaires à préciser cas par cas.

Les axiomes A_0 , A_7 , A_9 , A_{10} et A_{11} découlent de l'interprétation du § 2.2. et ils sont indépendants car ils concernent des termes différents de \mathcal{A} et des interprétations différentes.

Les axiomes A_1 à A_6 inclus conduisent à ceux proposés par Mac Carthy pour le calcul sur les expressions conditionnelles : ils expriment les propriétés de **cond**.

2.7. Calcul sur les fonctions

Règle de remplacement : elle exprime le théorème d'isotonie.

Tous les axiomes de \mathcal{A} expriment une relation $\varphi(f) \equiv \psi(f)$ ou $\varphi(f) \preceq \psi(f)$ quelle que soit la fonction privilégiée f choisie dans l'énoncé de l'axiome.

Introduisons dans \mathcal{A} l'opérateur S_f^f :

Définition : Soit $\varphi(f) \in \mathcal{A}$, $\varphi(f) S_f^f$ (ou φS_f^f si dans l'exposé il n'y a pas d'ambiguïté possible) est la fonction obtenue en substituant à toutes les occurrences de f dans $\varphi(f)$ la fonction f' .

La règle de substitution s'énonce donc :

$$\begin{array}{l} \text{Si } \varphi(f) \equiv \psi(f) \quad \text{ou} \quad \varphi(f) \leq \psi(f) \text{ alors :} \\ \varphi(f)S_f^f \equiv \psi(f)S_f^f \quad \text{ou} \quad \varphi(f)S_f^f \leq \psi(f)S_f^f \end{array}$$

Le calcul dont nous disposons sera étendu par des théorèmes et par l'introduction d'une extension de \mathcal{A} (§ 4).

A titre d'exemple :

Théorème : $f_1 \dots f_n f S^{n+1} \equiv f_1 \dots f_n \pi_0 S^{n+1} f S^2$

Démonstration : par $A_{12} : f \equiv \pi_0 f S^2$

par règle de remplacement : $f_1 \dots f_n f S^{n+1} \equiv f_1 \dots f_n \pi_0 f S^2 S^{n+1}$

par axiome A_0 : $f_1 \dots f_n f S^{n+1} \equiv f_1 \dots f_n \pi_0 S^{n+1} f S^2$

REMARQUE : Dans l'algèbre \mathcal{A} engendrée par G_0^1 ce théorème permet de limiter l'emploi de l'opérateur S^n , $n > 2$ comme suffixe à la fonction identique π_0 .

2.8. REMARQUES : Le principe de séquentialité et l'interprétation § 2.2 donnent de la compréhension de l'exécutant, pour **cond**, l'énoncé suivant : soit $p f_1 f_2$ **cond** : il calcule la valeur de p , il calcule celle de f_1 d'où un objet x_1 puis celle de f_2 d'où un objet x_2 et enfin **cond**, opérateur ternaire, lui enjoint de choisir entre x_1 , x_2 et ω selon la valeur de p .

Il apparaît qu'ici la notion préfixée est préférable ⁽¹⁾, nous conviendrons donc de représenter $p f_1 f_2$ **cond** par $(p \rightarrow f_1, f_2)$ ce qui conduit naturellement aux expressions conditionnelles de Mc Carthy; d'autres formes ont été proposées, $[p](f_1 | f_2)$ par Kott [5], $p(f_1 | f_2)$ par J. Arzac [1], par exemple, si p alors f_1 sinon f_2 est trop lourde.

La modification d'écriture des axiomes va de soi.

3. FACTORISATION D'UNE FONCTION

Deux procédés généraux de factorisation sont exposés, ils permettent d'étudier les fonctions récursions et en particulier les fonctions boucles. Ensuite nous montrons comment l'algèbre des fonctions permet de décrire un troisième procédé qui n'est autre que celui proposé par Böhm et Jacopini [2].

3.1. Fonctions initiales

Définition : Sont appelées fonctions initiales d'une fonction représentée par φ , les fonctions suffixées par S^1 dans l'une des fonctions équivalentes à φS^1 obtenue par application des axiomes A_9 et A_{10} .

(1) En supposant que l'exécutant « lit » $p f_1 f_2$ **cond** de gauche à droite, comme nous-mêmes, principe de séquentialité de l'informatique.

EXEMPLES : 1. $f_1 f_2 S^2$ est fonction initiale dans $f_1 f_2 S^2 f_3 S^2$, puisque $f_1 f_2 S^2 f_3 S^2 S^1 \equiv f_1 f_2 S^2 S^1 f_3 S^2$, f_1 est fonction initiale dans la même fonction, en appliquant une nouvelle fois l'axiome A_9 .

- 2. f_1 et f_2 sont fonctions initiales dans $f_1 f_2 f_3 S^3$.
- 3. p, f_1, f_2 sont fonctions initiales dans $(p \rightarrow f_1, f_2)$.

REMARQUE : Les propriétés de l'opérateur S^1 exprimées par les axiomes A_9 et A_{10} et la définition ci-dessus conduisent à :

– une fonction est initiale dans une fonction φ si elle est initiale dans une fonction initiale de φ .

Propriété 1 : Soient f_1, \dots, f_n les fonctions initiales d'une fonction φ alors

$$(1) \quad \varphi \equiv f_{\alpha_1} \dots f_{\alpha_n} \varphi' S^{n+1}$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{ 1, 2, \dots, n \}$, $\varphi' \equiv \varphi S^1 S_{\pi_1}^{f_{\alpha_1} S^1} \dots S_{\pi_n}^{f_{\alpha_n} S^1}$

Nous ne donnerons pas la démonstration dans cette note, voir [10], elle résulte de la propriété suivante :

Propriété 2 : Si $f_1 \dots f_n$ sont les fonctions initiales d'une fonction φ alors pour toute fonction h :

$$(2) \quad h\varphi S^2 \equiv \varphi(f_1, \dots, f_n) S_{h f_1 S^2}^{f_1} \dots S_{h f_n S^2}^{f_n}$$

où nous dénotons par $\varphi(f_1, \dots, f_n)$, la fonction φ en évoquant ses fonctions initiales.

REMARQUE : (2) est déduite de (1) par l'axiome A_0 , en effet :

$$h\varphi S^2 \equiv h f_{\alpha_1} \dots f_{\alpha_n} \varphi' S^{n+1} S^2 \equiv h f_{\alpha_1} S^2 \dots h f_{\alpha_n} S^2 \varphi' S^{n+1}$$

Règle de calcul : La propriété (2) s'énonce par une règle de calcul dans \mathcal{A}

– pour effectuer le produit $h\varphi S^2$ on distribue h comme facteur gauche de toutes les fonctions initiales de φ .

REMARQUE : Cette règle conduit à la factorisation à gauche par h si h est un facteur gauche de toutes les fonctions initiales de φ .

Propriété 3 : Soit choisie arbitrairement l'une des fonctions initiales, représentée par f_k , d'une fonction φ alors :

$$(3) \quad \varphi \equiv \pi_0 f_k \varphi' S^3 \quad \text{ou} \quad \varphi \equiv f_k \pi_0 \varphi' S^3$$

où $\varphi' \equiv \varphi S^1 S_{\pi_1}^{f_k S^1} S_{\pi_1}^{S^1}$ dans le premier cas, $\varphi' \equiv \varphi S^1 S_{\pi_1}^{f_k S^2} S_{\pi_2}^{S^1}$ dans le second,

et φS^1 est construite en remplaçant toutes les autres fonctions initiales par $\pi_0 f_i S^2, i \neq k$.

La preuve découle directement de la propriété 2 par les axiomes A_9 et A_{12} .

3.2. Fonctions terminales

- Définition* : 1. — f est terminale dans $f_1 f S^2$ et $f_1 \dots f_n f S^{n+1}$,
 2. f_1 et f_2 sont terminales dans $(p \rightarrow f_1, f_2)$,
 3. f est terminale dans une fonction φ si elle est terminale dans au moins une fonction terminale de φ .

EXEMPLE : $f_2 f_3 S^2$ est terminale dans $f_1 f_2 f_3 S^2 S^2$ par 1., f_3 y est terminale par 1. et 3.

Propriété 4 : Soit une fonction φ et soient $f_1 \dots f_n$ ses fonctions terminales, alors :

$$(4) \quad \varphi f S^2 \equiv \varphi(f_1, \dots, f_n) S_{f_1 f S^2}^{f_1} \dots S_{f_n f S^2}^{f_n}$$

où la notation $\varphi(f_1, \dots, f_n)$ évoque les fonctions terminales de φ .

Démonstration : Si φ est $f_1 f_2 S^2$, l'associativité de S^2 conduit à $\varphi f S^2 \equiv f_1 f_2 S^2 S^2$ d'où (4).

Si φ est $f_1, \dots, f_n S^n$ l'axiome A_0 donne $\varphi f S^2 \equiv f_1 \dots f_{n-1} f_n f S^2 S^n$ d'où (4); enfin si φ est $(p \rightarrow f_1, f_2)$ l'axiome A_8 conduit à (4).

Puisque toute fonction de \mathcal{A} est obtenue par l'application répétée un nombre fini de fois des trois règles rappelées par les trois fonctions considérées ci-dessus, la propriété est vraie par toute fonction de \mathcal{A} ■

Nous en déduisons directement :

Propriété 5 : Soient $f_1 \dots f_n$ les fonctions terminales d'une fonction φ , alors celles de $\varphi f S^2$ sont $f_1 f S^2, \dots, f_n f S^2$

d'où la règle de calcul, symétrique de la précédente :

Règle de calcul : Pour effectuer le produit $\varphi f S^2$, f est distribuée comme facteur-droite de toutes les fonctions terminales de φ .

Antérieurement nous utilisons indifféremment les expressions facteur-droite ou terminale. A rapprocher de J. Arzac [1].

Comme la règle précédente, elle permet la factorisation à droite par f si f est en facteur-droite (ou terminale) de toutes les fonctions terminales de φ .

Pour obtenir une propriété analogue à la propriété 3 du § précédent, nous sommes conduits à accomplir un pas de plus et à englober l'approche de Böhm et Jacopini [2] dans l'algèbre des fonctions, d'une manière très simple, qui conduit en outre à une généralisation naturelle.

3.3 Factorisation par adjonction de variables

Définitions : Soient h_V et h_F les fonctions définies par :

$$(5) \quad \begin{cases} h_V \equiv \pi_0 V S^0 \pi_0 S^3, & h_F \equiv \pi_0 F S^0 \pi_0 S^3 \\ \text{et } p^* \text{ le prédicat } p^* \equiv \pi_2 V S^0 \text{ égal } S^3 \end{cases}$$

REMARQUE : D'autres définitions sont équivalentes soit en changeant l'ordre de π_0 et des fonctions de choix des objets V et F soit en utilisant l'une ou l'autre des fonctions **cons** ou **edif**.

Propriétés : Des définitions découlent directement,

$$h_V \pi_1 S^2 \equiv h_F \pi_1 S^2 \equiv \pi_0, \quad h_V p^* S^2 \equiv VS^0, \quad h_F p^* S^2 \equiv FS^0$$

Propriété 6 : Soient $f_1 \dots f_n$ les fonctions terminales d'une fonction dénotée par $\varphi(f_1, \dots, f_n)$ et privilégions l'une des fonctions terminales, par exemple f_1 , alors :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi \equiv \varphi'(p^* \rightarrow \pi_1 f_1 S^2, \pi_1) S^2 \\ \text{où } \varphi' \equiv \varphi(f_1, \dots, f_u) S_{h_V}^{f_1} S_{f_2 h_F}^{f_2} \dots S_{f_n h_F}^{f_n} S^2 \end{array} \right.$$

φ' sera dénotée $\varphi'(h_V, h_F)$ puisque ses fonctions terminales sont h_V et h_F .

Démonstration : appliquons la règle de calcul exprimant la propriété 5 au produit de fonctions à droite de (6).

Le résultat est la fonction obtenue en substituant à toutes les occurrences de h_V dans φ' le produit :

$$h_V(p^* \rightarrow \pi_1 f_1 S^2, \pi_1) S^2$$

lequel, par les propriétés (5) de fonction introduite au début, est équivalent à f_1 , et à toutes les occurrences de h_F le produit $h_F(p^* \rightarrow \pi_1 f_1 S^2, \pi_1) S^2$ lequel est équivalent pour les mêmes raisons à π_0 .

Finalement nous obtenons $\varphi(f_1, \dots, f_n)$, ce qui s'exprime en bref par :

$$\begin{aligned} \varphi'(p^* \rightarrow \pi_1 f_1 S^2, \pi_1) S^2 &\equiv \varphi(h_V, f_2 h_F S^2, \dots, f_n h_F S^2)(p^* \rightarrow \pi_1 f_1 S^2, \pi_1) S^2 \\ &\equiv \varphi(f_1, \dots, f_n). \end{aligned}$$

EXEMPLES :

$$\begin{aligned} (p \rightarrow f_1 g_1 S^2, f_2 g_2 S^2) &\equiv (p \rightarrow f_1 h_V S^2, f_2 g_2 S^2 h_F S^2)(p^* \rightarrow \pi_1 g_1 S^2, \pi_1) S^2 \\ (p \rightarrow f_1(p_1 \rightarrow g_1, g_2) S^2, f_2) &\equiv (p \rightarrow f_1(p_1 \rightarrow h_V, g_2 h_F S^2), f_2 h_F S^2)(p^* \rightarrow \pi_1 g_1 S^2, \pi_1) S^2 \end{aligned}$$

Généralisation : au lieu des atomes V et F participant à la définition des fonctions h_V et h_F , nous pouvons prendre les nombres 0 et 1, alors p^* se réduit à $\pi_2 \text{NUL } S^2$, NUL étant défini sur l'ensemble N des entiers. Ceci conduit à la généralisation :

$$\text{Définitions : } i \in N, \quad h_i^* \equiv \pi_0 i S^0 \pi_0 S^3, \quad p_i^* \equiv \pi_2 i S^0 \text{ EGAL } S^3$$

Propriétés :

$$\forall i, j \in N, \quad h_i^* \pi_1 S^2 \equiv \pi_0, \quad h_i^* p_j^* S^2 \equiv \begin{cases} VS^0 & \text{si } i = j \\ FS^0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Elles résultent directement des définitions.

Propriété 7 : Soient $f_1 \dots f_n$ les fonctions terminales d'une fonction représentée par φ , alors :

$$(7) \quad \varphi \equiv \varphi'(h_0^*, \dots, h_{n-1}^*)(p_0^* \rightarrow \pi_1 f_1 S^2, (p_1^* \rightarrow \pi_1 f_2 S^2, \dots, (p_{n-1}^* \rightarrow \pi_1 f_{n-1} S^2, \pi_1 f_n S^2) \dots)$$

où $\varphi' \equiv \varphi(f_1, \dots, f_n) S_{h_0^*}^{f_1} \dots S_{h_{n-1}^*}^{f_n}$

La démonstration est analogue à celle de la propriété 6 précédente.

REMARQUE : la fonction conditionnelle du membre de droite de (7) exprime la sémantique d'une « instruction (de) choix » que proposent sous des formes voisines divers langages de programmation.

4. FONCTIONS RECURSIONS

4.1. Fonctions récursions simples

Définition : 1. Soit désignée par $\varphi(\chi)$ une fonction de \mathcal{A} dans laquelle nous privilégions une fonction χ , arbitraire dans \mathcal{A} , y possédant au moins une occurrence ; $\varphi(\chi)$ est une fonctionnelle de χ .

2. Soit **rec** un nouvel opérateur de \mathcal{A} par définition :

$$(1) \quad \chi\varphi(\chi) \text{ rec} \in \mathcal{A}$$

Nous appellerons *fonction récursion simple* toute fonction construite de cette manière, $\varphi(\chi)$ est le corps de cette fonction.

Interprétation : procédant comme § 2.2 nous considérons $\chi\varphi(\chi) \text{ rec} S^1$, alors l'exécutant a pour consigne :

$$[x]\chi\varphi(\chi) \text{ rec} = \begin{cases} [x]\varphi(\chi) & \text{si } [[x]\varphi(\chi)]_v \text{ ne dépend pas de } \chi \\ [x]\varphi(\chi) S_{\chi\varphi(\chi) \text{ rec}}^x, & \text{si } [[x]\varphi(\chi)]_v \text{ dépend de } \chi. \end{cases}$$

Cette interprétation est exprimée par l'axiome suivant :

Axiome A₁₄ : $\chi\varphi(\chi) \text{ rec} \equiv \varphi(\chi) S_{\chi\varphi(\chi) \text{ rec}}^x$

Extension de l'algèbre des fonctions : **rec** est introduit dans S et $\widehat{\text{rec}}$ dans \widehat{S} et :

$$\widehat{\text{rec}} : F \times F \rightarrow F \quad , \quad \widehat{\text{rec}}(f, \varphi(f)) = f\varphi(f) \text{ rec}$$

Il nous est apparu plus commode et plus proche de l'informatique de former d'une manière légèrement différente une fonction récursion en introduisant le concept d'étiquette (quitte à montrer ensuite comment elle peut être éliminée).

Définition : 1. Une étiquette est représentée par le symbole I (ou évoquée par I) éventuellement indicé par un entier.

La portée d'une étiquette est définie par une paire de parenthèses (ou éventuellement des crochets si dans l'exposé une confusion était à craindre).

2. Soit $f \in \mathcal{A}$, $I(f)$ est la fonction f étiquetée par I (à noter que I n'est pas le nom donné à f ni celui de l'objet (f)), f est le corps de la fonction étiquetée.

REMARQUE : Si nous adoptons la représentation $(p \rightarrow f, f')$ pour $pf f'$ **cond** nous conviendrons d'abrèger $I((p \rightarrow f, f'))$ en $I(p \rightarrow f, f')$.

Définition : La fonction récursion définie par (1) est représentée par :

$$(2) \quad I(\varphi(\chi)S_I^x) \quad \text{ou} \quad I(\varphi(I)) \quad \text{si aucune confusion n'est à craindre.}$$

L'axiome A_{14} est alors énoncé :

Axiome A_{14} :

$$(3) \quad I(\varphi(I)) \equiv \varphi(\chi)S_{I(\varphi(I))}^x$$

REMARQUE : Dans la représentation $I(\varphi(I))$, dans le corps $\varphi(\chi)$ l'étiquette joue le rôle d'une fonction, ceci est justifié par l'extension des règles de calcul dans \mathcal{A} (voir § 4.3 et § 5.2).

Fonctions de Kleene du corps $\varphi(\chi)$ d'une fonction récursion :

La démonstration du théorème de récursion de Kleene [4] et l'interprétation donnée plus haut d'une fonction récursion suggèrent la récurrence des fonctions suivantes :

$$(4) \quad h^0 \equiv \varphi(f_\omega), \quad h^1 \equiv \varphi(h^0), \dots, h^i \equiv \varphi(h^{i-1})$$

De $f_\omega \leq h^0$ nous déduisons $\varphi(f_\omega) \leq \varphi(h^0)$ donc $h^0 \leq h^1$ et de proche en proche :

$$(5) \quad h^0 \leq h^1 \leq h^2 \leq \dots h^{i-1} \leq h^i \leq \dots$$

Nous appellerons fonctions de Kleene les fonctions ainsi définies.

Nous remarquons que l'interprétation donnée de $\chi\varphi(\chi)$ **rec**, donc de $I(\varphi(I))$, est équivalente à :

les étapes de l'interprétation de $I(\varphi(I))$ sont décrites par la suite ordonnées des fonctions de Kleene de $\varphi(\chi)$.

Cette suite sera représentée par $\{ h^i \}$ et sa limite par $\lim_i \{ h^i \}$, lorsque l'on fait croire indéfiniment i .

Nous simplifierons l'exposé en postulant la continuité de $\varphi(\chi)$, c'est-à-dire l'équivalence :

$$\varphi(\lim_i \{ h^i \}) \equiv \lim_i \{ \varphi(h^i) \}$$

Il en résulte directement ⁽¹⁾ :

Propriété 1 :

$\lim_i \{ h^i \}$ est un point fixe de $\varphi(\chi)$, c'est-à-dire solution de $\chi \equiv \varphi(\chi)$.

L'axiome $A_{1.4}$ s'énonce de son côté : $\chi\varphi(\chi)$ rec est un point fixe de $\varphi(\chi)$.

Supposons qu'il existe une fonction f satisfaisant $f \equiv \varphi(f)$.

Considérant la récurrence :

$$f^0 \equiv \varphi(f), \quad f^1 \equiv \varphi(f^0), \dots, f^i \equiv \varphi(f^{i-1})$$

de $f_\omega \leq f$ nous déduisons $h^i \leq f^i$, par ailleurs de $f \equiv \varphi(f)$ nous déduisons $f^i \equiv f$ d'où :

Propriété 2 : la suite $\{ h^i \}$ est bornée supérieurement par tout point fixe de $\varphi(f)$ et finalement :

Propriété 3 : $I(\varphi(I))$ est le plus petit point fixe de $\varphi(\chi)$ et $I(\varphi(I)) \equiv \lim_i \{ h^i \}$.

REMARQUE : 1. Définissons la longueur d'une fonction comme le nombre des symboles qu'elle contient, il est immédiat que $\text{long}(h^{i-1}) < \text{long}(h^i)$ donc en général $\text{long}(\lim_i \{ h^i \})$ est non bornée. C'est le cas, sauf exceptions, des fonctions-boucles étudiées plus loin (§ 5).

2. $\varphi(\chi)$ peut posséder d'autres points fixes, entre eux n'existe pas forcément la relation \leq .

Propriété 4 :

$$I(f\varphi(I)S^2) \equiv fI(\varphi(fIS^2))S^2 \quad \text{ou} \quad \chi f\varphi(\chi)S^2 \text{ rec} \equiv f\chi\varphi(f\chi S^2) \text{ rec}.$$

Démonstration : Soit f_1 le plus petit point fixe de $f\varphi(\chi)S^2$ et f_2 celui de $\varphi(f\chi S^2)$.

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv I(f\varphi(I)S^2) & \text{et} & & f_1 &\equiv f\varphi(f_1)S^2 \\ f_2 &\equiv I(\varphi(fIS^2)) & \text{et} & & f_2 &\equiv \varphi(ff_2S^2) \end{aligned}$$

d'où $fI(\varphi(fIS^2))S^2 \equiv ff_2S^2 \equiv f\varphi(ff_2S^2)S^2$, f_1 et f_2 étant des plus petits points fixes nous en déduisons $f_1 \equiv ff_2S^2$ ■

4.2. Fonctions récursions générales

Supposons accomplie la traduction de l'énoncé d'un problème dans l'énoncé suivant :

Construire une fonction f telle que $f \equiv \varphi(f)$, $\varphi(f)$ étant ainsi construite

(1) Nous nous limitons aux propriétés nécessaires pour la suite, le lecteur pourra à titre d'exemple, établir à l'aide de \mathcal{A} le résultat de Cadiou [3] : « toute interprétation d'une fonction récursion, différente de celle donnée dans l'exposé conduit à une restriction du plus petit point fixe de $\varphi(\chi)$ ».

à partir de l'énoncé du problème. La solution appréhendée par l'informatique est donc :

$$f \equiv I(\varphi(f)S_f)$$

Ceci conduit à une généralisation naturelle :

Construire une fonction f_1 satisfaisant $f_1 = \varphi_1(f_1, \dots, f_n)$ lorsque f_2, \dots, f_n satisfont :

$$f_i \equiv \varphi_i(f_1, \dots, f_n), \quad i = 2, \dots, n.$$

Limitons cet exposé au cas $n = 2$.

Les rôles de f_1 et f_2 sont symétriques, mais il est primordial que la fonction soumise à l'exécutant respecte le rôle de l'une par rapport à l'autre. Si c'est f_1 qui résoud le problème, alors $f_2 \equiv \varphi_2(f_1, f_2)$ conduit à $f_2 \equiv I_2(\varphi_2(f_1, I_2))$ et le problème devient :

Construire f_1 telle que

$$f_1 \equiv \varphi_1(f_1, I_2(\varphi_2(f_1, I_2)))$$

La démarche précédente fournit la solution :

$$(1) \quad f_1 \equiv I_1(\varphi_1(I_1, I_2(\varphi_2(I_1, I_2))))$$

et symétriquement :

$$(2) \quad f_2 \equiv I_2(\varphi_2(I_1(\varphi_1(I_1, I_2)), I_2))$$

ou :

$$f_1 \equiv \chi_1 \varphi_1(\chi_1, \chi_2 \varphi_2(\chi_1, \chi_2) \mathbf{rec}) \mathbf{rec}$$

$$f_2 \equiv \chi_2 \varphi_2(\chi_1 \varphi_1(\chi_1, \chi_2) \mathbf{rec}, \chi_2) \mathbf{rec}$$

La généralisation au cas $n > 2$ ne présente pas de difficultés.

L'interprétation de $I_1(\varphi_1(I_1, I_2(\varphi_2(I_1, I_2))))$ selon les fonctions de Kleene est immédiate :

$$(3) \quad \begin{cases} h_1^0 \equiv \varphi_1(f_\omega, \varphi_2(f_\omega, f_\omega)) \\ h_1^i \equiv \varphi_1(h_1^{i-1}, \varphi_2(h_1^{i-1}, h_2^{i-1})) \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} h_2^0 \equiv \varphi_2(f_\omega, f_\omega) \\ h_2^i \equiv \varphi_2(h_1^{i-1}, h_2^{i-1}) \end{cases}$$

Nous déduisons que :

$$f_1 \equiv \lim_i \{ h_1^i \}$$

et si $f_2 \equiv \lim_i \{ h_2^i \}$:

$$(4) \quad f_1 \equiv \varphi_1(f_1, f_2) \quad , \quad f_2 \equiv \varphi_2(f_1, f_2)$$

Le couple $\langle f_1, f_2 \rangle$ est le plus petit point fixe du couple de fonctionnelles $\langle \varphi_1(\chi_1, \chi_2), \varphi_2(\chi_1, \chi_2) \rangle$, la démarche étant analogue à celle de la récursion simple, sous l'hypothèse de continuité ⁽¹⁾.

Il est clair que le cas (2) conduit au même résultat.

Propriété 5 :

$$\chi_2 \varphi(\chi) \text{ rec} \equiv \chi_1 \chi_2 \varphi(\chi_1, \chi_2) \text{ rec rec} \quad \text{ou} \quad I(\varphi(I)) \equiv I_1(I_2(\varphi(I_1, I_2)))$$

Le corps de $I(\varphi(I))$ étant $\varphi(\chi)$, formons deux sous-ensembles des occurrences de χ et désignons par χ_1 la fonction présente dans les occurrences du premier sous-ensemble et par χ_2 celles du second sous-ensemble : ceci conduit à la fonction du membre de droite ci-dessus.

Soit f_2 le plus petit point fixe de $\varphi(\chi_1, \chi_2)$ considéré comme fonctionnelle de χ_2 , d'où :

$$f_2(\chi_1) \equiv I_2(\varphi(\chi_1, I_2)) \quad \text{et} \quad f_2(\chi_1) \equiv \varphi(\chi_1, f_2(\chi_1)) \\ I_1(I_2(\varphi(I_1, I_2))) \equiv I_1(f_2(I_1))$$

Soit f' le plus petit point fixe de $f_2(\chi_1)$:

$$f' \equiv I_1(I_2(\varphi(I_1, I_2))) \quad \text{et} \quad f' \equiv f_2(f')$$

puis $f_2(f') \equiv \varphi(f', f_2(f'))$ d'où $f' \equiv \varphi(f', f')$ d'où l'on conclut que f' est le plus petit point fixe de $\varphi(\chi, \chi)$ c'est-à-dire celui de $\varphi(\chi)$. ■

4.3. Règles de calcul dans \mathcal{A} :

Propriété 6 : Si $\forall x \in \mathcal{A}, \varphi_1(\chi) \leq \varphi_2(\chi)$ alors $I(\varphi_1(I)) \leq I(\varphi_2(I))$

Si $\forall x \in \mathcal{A}, \varphi_1(\chi) \equiv \varphi_2(\chi)$ alors $I(\varphi_1(I)) \equiv I(\varphi_2(I))$

La preuve est immédiate, si $\varphi_1(\chi) \leq \varphi_2(\chi)$ alors $\varphi_1(f_\omega) \leq \varphi_2(f_\omega)$ d'où $h_1^0 \leq h_2^0$, et de proche en proche $h_1^i \leq h_2^i$ d'où $\lim_i \{ h_1^i \} \leq \lim_i \{ h_2^i \}$.

Nous en déduisons la règle de calcul :

Si par le calcul défini jusqu'alors dans \mathcal{A} on établit que $\varphi_1(I) \leq \varphi_2(I)$ en considérant I comme une fonction, on obtient la même relation entre les fonctions-récursions correspondantes (même chose pour l'équivalence).

Elle s'étend aux fonctions-récursions générales.

(1) Soit désignée par h la fonction $f_1 f_2 \pi_0 S^3$, $f_1 \equiv h \pi_1 S^2$, $f_2 \equiv h \pi_2 S^2$ alors le système (4) devient : $h \equiv \varphi_1(h \pi_1 S^2, h \pi_2 S^2) \varphi_2(h \pi_1 S^2, h \pi_2 S^2) \pi_0 S^3$ de la forme $h \equiv \varphi(h)$ d'où la possibilité de ramener au cas d'une récursion simple.

5. FONCTIONS-BOUCLES

5.1. Fonction-boucle primitive

Définition : $I(p \rightarrow fIS^2, \pi_0)$ est une fonction-boucle primitive.

Propriété 1 : $I(p \rightarrow fIS^2, f') \equiv I(p \rightarrow fIS^2, \pi_0)f'S^2$

Cette propriété ramène à une fonction-boucle primitive (en facteur-gauche) toute fonction-boucle de corps $\varphi(\chi) \equiv (p \rightarrow f\chi S^2, f')$, nous dirons qu'une telle fonction est une fonction-boucle simple.

Nous ne donnerons pas une démonstration de cette propriété car nous démontrerons plus loin une propriété générale dont elle est un cas particulier (propriété 4, § 5.2).

Propriété 2 : $I(p \rightarrow fIS^2, \pi_0) \equiv (p \rightarrow I(f(p \rightarrow I, \pi_0)S^2), \pi_0)$

Démonstration : Par l'axiome A_{14} :

$$I(p \rightarrow fIS^2, \pi_0) \equiv (p \rightarrow fI(p \rightarrow fIS^2, \pi_0)S^2, \pi_0)$$

et par la propriété 4 § 4 le second membre devient :

$$(p \rightarrow I(f(p \rightarrow I, \pi_0)S^2), \pi_0)$$

ce qui achève la démonstration.

REMARQUE : $I(p \rightarrow fIS^2, \pi_0)$ exprime la sémantique de l'instruction :

$$\text{tantque } p(a) \text{ faire } a := f(a)$$

a étant une évocation du nom donné à l'objet soumis à la fonction. De même $I(f(p \rightarrow I, \pi_0)S^2)$ exprime la sémantique de l'instruction :

$$\text{repete } a := f(a) \text{ jusqu'a } \neg p(a)$$

Nous conviendrons de l'abréviation $\neg p$ pour $p f_{\neg} S^2$ où f_{\neg} a été définie dans l'axiome A_2 .

Propriété 3 : Les fonctions de Kleene de $(p \rightarrow f\chi S^2, \pi_0)$ sont données par :

$$\forall i \in \mathbb{N}, h^i \equiv i . (p \rightarrow f, \pi_0)(p \rightarrow f_{\omega}, \pi_0)S^2$$

Soit $i \in \mathbb{N}$, $i . f$ dénote l'itérée i fois de f , $i . f$ est donc une abréviation de $f \dots f S^2 \dots S^2$ mieux de $\pi_0 \underbrace{f \dots f}_{i \text{ fois}} \underbrace{S^2 \dots S^2}_{i \text{ fois}}$, d'où $0 . f \equiv \pi_0$.

i fois $i - 1$ fois

i fois i fois

Démonstration : Pour $i = 0$ la propriété est manifestement vraie,

Pour $i = 1$:

$$h^1 \equiv (p \rightarrow f(p \rightarrow f_{\omega}, \pi_0)S^2, \pi_0) \equiv (p \rightarrow f, \pi_0)(p \rightarrow f_{\omega}, \pi_0)S^2 \quad (\text{axiome } A_3)$$

Supposons la propriété vraie pour $i - 1$ nous avons :

$$\begin{aligned} h^i &\equiv (p \rightarrow f \underline{i-1} . (p \rightarrow f, \pi_0)(p \rightarrow f_\omega, \pi_0)S^2S^2, \pi_0) \\ h^i &\equiv (p \rightarrow f, \pi_0)\underline{i-1} . (p \rightarrow f, \pi_0)S^2(p \rightarrow f_\omega, \pi_0)S^2 \end{aligned}$$

par l'application répétée i fois de l'axiome A_3 ; donc la propriété est vraie pour tout i

Conséquence, par propriété 1 :

les fonctions de Kleene h^i de $(p \rightarrow f\chi S^2, f')$ sont :

$$h^i \equiv \underline{i} . (p \rightarrow f, \pi_0)(p \rightarrow f_\omega, \pi_0)S^2 f' S^2$$

5.2. Fonction-boucle générale (simple)

Définition 1 : $\varphi(\chi)$ est le corps d'une fonction-boucle générale si toutes les occurrences de χ sont terminales dans $\varphi(\chi)$.

Nous dénoterons par $\varphi(\chi, f_1, \dots, f_n)$ le corps d'une fonction-boucle générale dans laquelle, outre $\chi, f_1 \dots f_n$ sont ses fonctions terminales, aucune de ces dernières fonctions ne contenant χ .

Propriété 4 : $\varphi(\chi)$ étant le corps d'une fonction-boucle générale :

$$(1) \quad I(\varphi(I))fS^2 \equiv I(\varphi(I, f_1, \dots, f_n)S_{f_1}^{f_1}fS^2 \dots S_{f_n}^{f_n}fS^2)$$

Démonstration : soient h_1^i les fonctions de Kleene du corps de la fonction du membre de gauche de (1) et h_2^i celles du corps de la fonction du membre de droite.

$$\begin{aligned} h_1^0 &\equiv \varphi(f_\omega, f_1, \dots, f_n) \\ h_2^0 &\equiv \varphi(f_\omega, f_1 f S^2, \dots, f_n f S^2) \end{aligned}$$

f_ω est terminale dans les deux fonctions ci-dessus, or $f_\omega \equiv f_\omega f S^2$ d'où par la propriété 4 § 3.2, $h_2^0 \equiv \varphi(f_\omega, f_1, \dots, f_n) f S^2 \equiv h_1^0 f S^2$.

Supposons que $h_1^i f S^2 \equiv h_2^i$ pour tout entier, alors :

$$\begin{aligned} h_1^{i+1} f S^2 &\equiv \varphi(h_1^i, f_1, \dots, f_n) f S^2 \\ &\equiv \varphi(h_1^i f S^2, f_1 f S^2, \dots, f_n f S^2) \quad (\text{propriété 4 § 3.2}) \\ &\equiv \varphi(h_2^i, f_1 f S^2, \dots, f_n f S^2) \quad (\text{hypothèse}) \\ &\equiv h_2^{i+1} \quad (\text{définition de } h_2^{i+1}) \end{aligned}$$

Finalement tout $i, h_1^i f S^2 \equiv h_2^i$ d'où la conclusion par propriété 3, § 4.

Règle de calcul : La propriété 4 permet d'énoncer une règle de calcul dans \mathcal{A} incluant les fonctions-boucles générales :

— Soit une fonction-boucle générale $I(\varphi(I))$, le produit $I(\varphi(I))fS^2$ est effectué par application de la règle établie § 3.2 complétée par la règle : $I f S^2 \equiv I$.

Inversement, elle permet la factorisation par f dans les mêmes conditions que la règle du § 3.2 sans tenir compte des étiquettes I si et seulement si toutes les occurrences de l'étiquette I sont terminales.

La règle ci-dessus justifie que nous traitons l'étiquette I comme une fonction dans le corps d'une fonction-boucle.

Lemme 1 : *toute fonction conditionnelle peut être mise sous la forme équivalente :*

$$(2) \quad (q_1 \rightarrow f_1, (q_2 \rightarrow f_2, (\dots, (q_n \rightarrow f_n, f'_n) \dots)))$$

où les fonctions f_1, \dots, f_n, f'_n ne sont pas des fonctions conditionnelles.

Démonstrations : Nous raisonnerons par récurrence sur le nombre n de fonctions prédicats contenues dans (1).

Pour $n = 1$ la propriété est évidente.

Pour $n = 2$ seul le cas suivant $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow f_1, f_2), f'_2)$ n'est pas de la forme (1) or par les axiomes de \mathcal{A} il est immédiat que :

$$(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow f_1, f_2), f'_2) \equiv ((p_1 \rightarrow p_2, FS^0) \rightarrow f_1, (p_1 \rightarrow f_2, f'_2))$$

le lemme est donc satisfait avec $q_i \equiv (p_1 \rightarrow p_2, FS^0)$, $q_2 \equiv p_1$.

Supposons la propriété vraie pour $n \in N$, on peut l'écrire :

$$\varphi_n \equiv (q_1 \rightarrow f_1, (q_2 \rightarrow f_2, (\dots, (q_j \rightarrow f_j, \psi_j) \dots)))$$

où $\psi_j \equiv (q_{j+1} \rightarrow f_{j+1}, (q_{j+2} \rightarrow \dots, (q_n \rightarrow f_n, f'_n) \dots))$

Pour, à partir de là construire une fonction conditionnelle quelconque, il suffit :

a) de choisir j arbitrairement entre 1 et n et de substituer à la fonction f_j une fonction conditionnelle telle que $(p \rightarrow g, g')$, g et g' n'étant pas conditionnelles, puisque $(q_j \rightarrow (p \rightarrow g, g'), \psi_j) \equiv ((q_j \rightarrow p, FS^0) \rightarrow g, (q_j \rightarrow g^j, \psi_j))$.

Ceci établit que la fonction φ_{n+1} ainsi obtenue prend la forme (1).

b) de remplacer dans φ_n , ψ_j soit par $h\psi_j S^2$ soit par $\psi_j h S^2$ et enfin de remplacer h par une fonction conditionnelle comme dans le cas précédent ; nous sommes alors ramenés au cas a) comme il est aisé de le vérifier.

Finalement quelle que soit la manière dont φ_{n+1} est obtenue à partir de la forme (1) d'une fonction conditionnelle φ_n , la fonction obtenue peut être mise sous la forme (1).

Lemme 2 : *Dans l'ensemble $\mathcal{F}_n = \{f_1, \dots, f_n\}$ des fonctions terminales d'une fonction φ_n considérons un sous-ensemble strict arbitraire \mathcal{F}'_n dont \mathcal{F}''_n est*

l'ensemble complémentaire par rapport à \mathcal{F}_n , alors toute fonction conditionnelle ayant \mathcal{F}_n comme ensemble de fonctions terminales est équivalente à :

$$(3) \quad (q \rightarrow \theta_n, \theta'_n)$$

θ_n ayant \mathcal{F}'_n comme ensemble de fonctions terminales, et $\theta'_n, \mathcal{F}''_n$.

Démonstration : car $n = 1$, par l'axiome A_2 toute fonction $(p \rightarrow f, f')$ répond à (3) avec $\mathcal{F}'_1 = \{ f \}$ ou $\mathcal{F}'_1 = \{ f' \}$.

Car $n = 2$, supposons appliqué le lemme 1 alors :

$$(4) \quad \varphi_2 \equiv (q_1 \rightarrow f_1, (q_2 \rightarrow f_2, f'_2))$$

elle répond à (3) pour $\mathcal{F}'_2 = \{ f_1 \}$ et par l'axiome A_2 pour $\mathcal{F}'_2 = \{ f_2, f'_2 \}$.

Or par calcul dans \mathcal{A} , (4) conduit à :

$$\varphi_2 \equiv ((\neg q_1 \rightarrow q_2, FS^0) \rightarrow f_2, (q_1 \rightarrow f_1, f'_2))$$

qui répond à (3) pour $\mathcal{F}'_2 = \{ f_2 \}$ et par l'axiome A_2 pour $\mathcal{F}'_2 = \{ f_1, f'_2 \}$.

Enfin la considération de :

$$\varphi_2 \equiv ((\neg q_1 \rightarrow \neg q_2, FS^0) \rightarrow f'_2, (q_1 \rightarrow f_1, f_2))$$

conduit à achever l'inventaire des cas possibles.

Le lemme est donc vérifié pour $n = 1$ et $n = 2$.

Supposons-le vrai pour n quelconque :

$$(5) \quad \varphi_n \equiv (q \rightarrow \theta_n, \theta'_n)$$

Par le lemme 1 toute fonction φ_{n+1} prend la forme :

$$(6) \quad \varphi_{n+1} \equiv (p \rightarrow f, \varphi_n), \quad q_1 \equiv p, \quad f_1 \equiv f, \quad \varphi_n \equiv \psi_1$$

\mathcal{F}_n étant l'ensemble des fonctions terminales de φ_n , deux cas se présentent :

a) $\mathcal{F}'_{n+1} = \{ f \} \cup \mathcal{F}'_n$, de (5) et (6) nous déduisons

$$\varphi_{n+1} \equiv ((p \rightarrow VS^0, q) \rightarrow (p \rightarrow f, \theta_n), \theta'_n)$$

le lemme est donc vérifié avec $\theta_{n+1} \equiv (p \rightarrow f, \theta_n)$.

b) $\mathcal{F}'_{n+1} = \mathcal{F}'_n$ nous déduisons de (5) et (6)

$$\varphi_{n+1} \equiv ((\neg p \rightarrow q, FS^0) \rightarrow \theta_n, (p \rightarrow f, \theta'_n))$$

et le lemme est vérifié.

Le lemme est donc vrai pour toute fonction conditionnelle.

Propriété 5 : Toute fonction-boucle générale est équivalente à une fonction-boucle simple.

Démonstration : il s'agit de démontrer que toute fonction-boucle générale est équivalente à une fonction $I(p \rightarrow fIS^2, f')$ où p, f, f' ne contiennent pas I .

Soit $\varphi(\chi)$ le corps de la fonction-boucle proposée, on ne restreindra pas la démonstration si χ est terminale dans un ensemble fini de fonctions terminales $g_1\chi S^2, \dots, g_k\chi S^2$, le corps de la fonction-boucle est donc représenté par :

$$(7) \quad \varphi(g_1\chi S^2, \dots, g_k\chi S^2, f_1, \dots, f_n)$$

f_1, \dots, f_n étant les autres fonctions terminales de φ .

Le lemme 2 permet d'écrire :

$$\varphi \equiv (q \rightarrow \theta_n, \theta'_n)$$

θ_n ne contenant comme fonctions terminales que les fonctions $g_1\chi S^2, \dots, g_p\chi S^2$.

La règle de calcul du § 3.2 permet de mettre χ en facteur-droite dans θ_n d'où $\theta_n \equiv f\chi S^2$, f ne contenant comme fonctions terminales que les fonctions g_1, \dots, g_k .

Ceci achève la démonstration.

REMARQUES : 1) la démonstration montre que la fonction prédicat p dans $I(p \rightarrow fIS^2, f')$ est une fonction conditionnelle formée à partir de φ de manière telle qu'il est le plus souvent impossible de l'exprimer par une instruction autorisée par un langage de programmation.

A titre d'exemple soit la fonction :

$$\varphi(\chi) \equiv (p_1 \rightarrow f_1\chi S^2, (p_2 \rightarrow f_2\chi S^2, f_3))$$

$I(\varphi(I))$ s'exprime par une boucle étiquetée, deux instructions conditionnelles et deux « GOTO ». La propriété 5 appliquée à ce cas donne :

$$\varphi(\chi) \equiv ((p_1 \rightarrow VS^0, p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow f_1, f_2)\chi S^2, f_3)$$

Soit maintenant l'exemple :

$$\varphi(\chi) \equiv (p_1 \rightarrow q(p_2 \rightarrow f_1\chi S^2, f_2)S^2, f_3)$$

On aboutit à :

$$\varphi(\chi) \equiv ((p_1 \rightarrow gp_2S^2, FS^0) \rightarrow f_1\chi S^2, (p_1 \rightarrow gf_2S^2, f_3))$$

non traduisible *directement* par une instruction **tantque - faire**.

2) Nous observons au contraire que la factorisation par adjonction de variables (§ 3.3) ne modifie pas la structure du corps $\varphi(\chi)$ du moins radicalement comme dans le cas précédent, ceci justifie l'intérêt de [2] et de la généralisation qui en résulte.

La voie pour ramener une fonction-boucle générale à une fonction boucle simple, donc à une fonction-boucle primitive (laquelle s'exprime dans un langage de programmation sans étiquettes et sans **goto**) n'est donc pas unique.

L'application de la propriété 6, § 3.3 au corps (7) d'une fonction-boucle générale donne en effet :

$$(8) \quad \varphi(g_1\chi S^2, \dots, g_k\chi S^2, f_1, \dots, f_n) \equiv \varphi'(p^* \rightarrow \pi_1\chi S^2, \pi_1)S^2$$

où $\varphi' \equiv \varphi(g_1 h_V S^2, \dots, g_k h_V S^2, f_1 h_F S^2, \dots, f_n h_F S^2)$

Les propriétés établies par Böhm et Jacopini s'obtiennent aisément.

Par (8) et la propriété 6, § 4 :

$$(9) \quad I(\varphi(I)) \equiv I(\varphi'(p^* \rightarrow \pi_1 I S^2, \pi_1) S^2)$$

Or $h_V \pi_1 S^2 \equiv \pi_0$, le second membre de (9) devient donc :

$$h_V \pi_1 I(\varphi'(p^* \rightarrow \pi_1 I S^2, \pi_1) S^2) S^2$$

d'où par la propriété 4, § 4 :

$$h_V I(\pi_1 \varphi' S^2(p^* \rightarrow I, \pi_1) S^2) S^2$$

Or (propriété 2 § 5.1) :

$$\begin{aligned} h_V I(p^* \rightarrow \pi_1 \varphi' S^2 I S^2, \pi_0) S^2 &\equiv h_V(p^* \rightarrow I(\pi_1 \varphi' S^2(p^* \rightarrow I, \pi_0) S^2), \pi_0) S^2, \\ &\equiv h_V I(\pi_1 \varphi' S^2(p^* \rightarrow I, \pi_1) S^2) S^2, (h_V p^* S^2 \equiv V S^0) \end{aligned}$$

finalement en revenant à (9) :

$$(10) \quad I(\varphi(I)) \equiv h_V I(p^* \rightarrow \pi_1 \varphi' S^2 I S^2, \pi_0) S^2 \pi_1 S^2$$

La structure de φ' respecte celle de φ et si celle-ci est construite pour être traduisible en instructions d'un langage de programmation ou si elle exprime la sémantique de ces instructions (selon la démarche choisie) la fonction-boucle primitive contenue dans (10) jouit elle aussi de ces propriétés.

3) Ce qui précède n'épuise évidemment pas les propriétés des fonctions-boucles étudiées, ainsi il peut être montré que toute fonction-boucle est équivalente à une fonction formée avec des fonctions-boucles primitives (exprimées par des instructions **tantque - faire**).

L'exemple suivant donne la démarche.

Soit la fonction

$$\chi(p \rightarrow f \chi S^2, \varphi(\chi)) \text{ rec}$$

Par la propriété 5, § 4 :

$$\chi(p \rightarrow f \chi S^2, \varphi(\chi)) \text{ rec} \equiv \chi_1 \chi_2(p \rightarrow f \chi_2 S^2, \varphi(\chi_1)) \text{ rec rec}$$

Or pour toute fonction $\varphi(\chi_1)$ par propriété 1, § 5.1 :

$$\chi_2(p \rightarrow f \chi_2 S^2, \varphi(\chi_1)) \text{ rec} \equiv \chi_2(p \rightarrow f \chi_2 S^2, \pi_0) \text{ rec} \varphi(\chi_1) S^2$$

De là, nous déduisons donc :

$$\textbf{Propriété 6 : } I(p \rightarrow f I S^2, \varphi(I)) \equiv I_1(I_2(p \rightarrow f I_2 S^2, \pi_0) \varphi(I_1) S^2)$$

Par la propriété 4, § 4 enfin nous obtenons :

Propriété 7 :

$$I(p \rightarrow fIS^2, \varphi(I)) \equiv I_2(p \rightarrow fI_2S^2, \pi_0)I_1(\varphi(I_2(p \rightarrow fI_2S^2, \pi_0)I_1S^2))S^2$$

Il est immédiat si χ est terminale dans $\varphi(\chi)$, (1) est alors une fonction-boucle générale, que la propriété conduit au produit de deux fonctions-boucles primitives dont l'une contient une fonction-boucle primitive.

A nouveau les propriétés 6 et 7 indiquent que le calcul dans \mathcal{A} est étendu en considérant les étiquettes comme des fonctions dans le corps d'une fonction-boucle.

EXEMPLE : $\varphi(\chi) \equiv (p_1 \rightarrow f_1\chi S^2, \pi_0)$ la propriété 7 donne l'équivalence :

$$\begin{aligned} I(p \rightarrow fIS^2, (p_1 \rightarrow f_1IS^2, \pi_0)) \\ \equiv I_2(p \rightarrow fI_2S^2, \pi_0)I_1(p_1 \rightarrow f_1I_2(p \rightarrow fI_2S^2, \pi_0)S^2I_1S^2, \pi_0)S^2 \end{aligned}$$

elle exprime la sémantique de l'équivalence (dont elle est la preuve) :

I : si $p(a)$ alors $a := f(a)$; allera I sinon si $p_1(a)$ faire début $a := f_1(a)$; allera I fin \equiv tantque $p(a)$ faire $a := f(a)$; tantque $p_1(a)$ faire debut $a := f_1(a)$; tantque $p(a)$ faire $a := f(a)$; fin

5.3. Seconde généralisation

Définition 2 : Nous appellerons fonction-boucle générale une fonction f_1 définie par le système : $f_1 \equiv \varphi_1(f_1, \dots, f_n), \dots, f_n \equiv \varphi_n(f_1, \dots, f_n)$ où toutes les occurrences de f_1, \dots, f_n sont terminales dans les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Elle englobe la précédente § 5.2 si on prend $\varphi_2 \equiv f_2, \dots, \varphi_n \equiv f_n$. Pour illustrer cette définition et ne pas alourdir cette note, prenons le cas $n = 2$. Alors :

$$(1) \quad f_1 \equiv I_1(\varphi_1(I_1, I_2(\varphi_2(I_1, I_2))))$$

toutes les occurrences de I_1, I_2 étant terminales. (1) exprime la relation :

$$(2) \quad f_1 \equiv \chi_1\varphi_1(\chi_1, \chi_2\varphi_2(\chi_1, \chi_2)) \mathbf{rec} \mathbf{rec}$$

χ_1, χ_2 étant terminales dans φ_2 par le lemme 2, § 5.2 et la règle de calcul du § 3.2 :

$$(3) \quad \varphi_2(\chi_1, \chi_2 \mid) \equiv (q \rightarrow f\chi_2S^2, \theta'_n)$$

χ_2 n'ayant aucune occurrence dans θ'_n .

Dans θ'_n toutes les occurrences de χ_1 sont terminales par hypothèse donc de la même manière :

$$(4) \quad \theta'_n \equiv (q_1 \rightarrow f_1\chi_1S^2, f),$$

χ_1 n'ayant aucune occurrence dans f .

Il résulte :

$$\begin{aligned} \chi_2 \Phi_2(\chi_1, \chi_2) \text{ rec} &\equiv \chi_2(q \rightarrow f\chi_2 S^2, (q_1 \rightarrow f_1 \chi_1 S^2, f)) \text{ rec} \\ &\equiv \chi_2(q \rightarrow f\chi_2 S^2, \pi_0) \text{ rec } (q_1 \rightarrow f_1 \chi_1 S^2, f) S^2 \end{aligned}$$

En remontant à (2) :

$$f_1 \equiv \chi_1 \Phi_1(\chi_1, \chi_2(q \rightarrow f\chi_2 S^2, \pi_0) \text{ rec } (q_1 \rightarrow f_1 \chi_1 S^2, f) S^2) \text{ rec}$$

d'où

$$(5) \quad f_1 \equiv I_1(\Phi_1(I_1, I_2(q \rightarrow fI_2 S^2, \pi_0))(q_1 \rightarrow f_1 I_1 S^2, f) S^2)$$

qui répond à la définition du § 5.2 le corps de la fonction-boucle générale contenant au moins une occurrence d'une fonction-boucle primitive.

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que cette propriété est générale. Il est clair que ce § n'épuise pas le sujet, il illustre l'emploi de l'algèbre des fonctions.

6. PROBLEMES D'EQUIVALENCE

Nous terminerons cette note par deux propriétés ayant un certain intérêt pratique.

Propriété 1 : Soient h_1^i et h_2^i les fonctions de Kleene de $\varphi_1(\chi)$ et $\varphi_2(\chi)$ respectivement, $I(\varphi_1(I)) \leq I(\varphi_2(I))$ si et seulement si $h_1^i \leq h_2^i$ pour tout i (même chose pour l'équivalence).

La preuve est immédiate d'après § 4.

$$\text{EXEMPLE : } \varphi_1(\chi) \equiv (p \rightarrow f\chi S^2 \chi S^2, \pi_0), \quad \varphi_2(\chi) \equiv (p \rightarrow f\chi S^2, \pi_0),$$

Pour φ_2 d'après propriété 3, § 5.1. h_2^i est connue.

Il est clair que $h_1^0 \equiv h_2^0$.

Supposons que $h_1^i \equiv h_2^i$

$$h_1^{i+1} \equiv (p \rightarrow fh_1^i S^2 h_1^i S^2, \pi_0) \equiv (p \rightarrow fh_2^i S^2 h_2^i S^2, \pi_0)$$

Or par calcul élémentaire dans \mathcal{A} on vérifie ⁽¹⁾ que $h_2^i h_2^i S^2 \equiv h_2^i$ d'où $h_1^{i+1} \equiv h_2^{i+1}$.

(1) Plus généralement $h_2^i h_2^i S^2 \equiv h_2^i$ qui suggère la propriété :

$$2. I(p \rightarrow fIS^2, \pi_0) \equiv I(p \rightarrow fIS^2, \pi_0)$$

(idempotence de la fonction-boucle primitive). En effet le membre de gauche donne successivement :

$$\begin{aligned} 2. I(\dots) &\equiv \lim_i \{ h_2^i \} I(\dots) S^2 \equiv \lim_i \{ h_2^i I(\dots) S^2 \} \equiv \lim_i \{ h_2^i \lim_j \{ h_2^j \} S^2 \} \\ &\equiv \lim_{i,j} \{ h_2^i h_2^j S^2 \} \equiv \lim_i \{ h_2^i \}. \end{aligned}$$

Propriété 2 : Si $\varphi_1(f_\omega) \equiv g\varphi_2(f_\omega)S^2$ et $\forall i \in \mathbb{N}$, $\varphi_1(gh_2^i S^2) \equiv gh_2^{i+1} S^2$, alors $I(\varphi_1(I)) \equiv gI(\varphi_2(I))S^2$.

Cette propriété permet l'étude des relations entre récursion et itération [10] et plus généralement dans tous les cas où le calcul des fonctions de Kleene de $\varphi_2(\chi)$ est possible (ce qui se présente généralement pour les fonctions-boucles).

7. NOTE FINALE

L'introduction des noms désignant des objets de $B \cup \mathcal{L}_B$ et des noms désignant des fonctions ne présente pas de difficultés et achève de constituer l'algèbre des fonctions en outil informatique; nous renvoyons à [10] malgré les imperfections de ce texte.

Le lien direct entre notre propos et l'informatique est établi par le concept d'exécutant, voir une première remarque à ce propos §1.2. Si un exécutant unique, ou tel exécutant, est rendu actif par un microprogramme (par exemple) il est clair que notre approche s'applique à ce niveau. Le lien avec les langages de programmation est moins direct (sauf vers un langage d'assemblage pour les raisons évoquées ci-dessus), il nous paraît possible de l'établir dans tous les cas sans difficultés de principe.

Je suis reconnaissant à Maurice Nivat des critiques qu'il a faites au premier manuscrit soumis à la RIRO, la présente note a bénéficié des discussions que nous avons eues.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J. ARSAC, *Les langages sans étiquettes*. Publication 73/13. Institut de Programmation. Université de Paris VI.
- [2] C. BOHM et G. JACOPINI, *Flow diagrams, Turing machines and languages with only two formation rules*, Comm. ACM, may 1966, vol. 9, n° 5, 366-371.
- [3] J. CADIOU, *Recursive definitions of partial functions and their conditions*. Ph D, thesis. Computer Science department, Stanford University. June 72.
- [4] S. C. KLEENE, *Introduction to Metamathematics* (the recursion theorem, p. 348). Van Nostrand, 1952.
- [5] J. KOTT, *Remarques sur la structure des schémas de programme*, in Théorie des automates, des langages et de la programmation, Colloques IRIA, 1972, pp. 191-194.
- [6] A. L. MALCEV, *Algorithms and recursive functions*, Wolters-Noordhoff Publishing Corp. Netherlands, 1970.
- [7] H. D. MILLS, *The new Math of Computer Programming*. Com. ACM, January 1975, vol. 18, n° 1, pp. 43-48.
- [8] R. E. PRATHER, *A convenient Cryptomorphic Version of Recursive Function Theory in Information and Control*, vol. 27, n° 2, February 1975, pp. 178-195.
- [9] F. H. RAYMOND, *Tentative de formalisation en informatique*, in Structure et programmation des calculateurs, Séminaires IRIA, 1972, pp. 201-248.
Et : *Formalisation du concept de calcul*. Publications 25 et 32, 1972-1973, Institut de Programmation, Université Paris VI.
- [10] F. H. RAYMOND, *Algèbre des fonctions*. Cours du CNAM. Éditions Scientifiques Riber, Paris, 1974.