Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Informatique théorique

P. A. Picon

Sur les termes nuls d'une suite récurrente cubique

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Informatique théorique, tome 8, nº R3 (1974), p. 47-61

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1974__8_3_47_0>

R.A.I.R.O.
(8e année, R-3, 1974, p. 47 à 61)

SUR LES TERMES NULS D'UNE SUITE RECURRENTE CUBIQUE

par P. A. PICON (1)

Communiqué par Jean BERSTEL

Résumé. — *On étudie le nombre maximal et la distribution des termes nuls d'une suite récurrente cubique. On démontre que la séquence des indices des termes nuls, ordonnée par une certaine relation, est croissante-décroissante. On donne des bornes supérieures du nombre de termes nuls dans des cas particuliers.*

INTRODUCTION

C'est dans l'étude du lien entre la rationalité d'un code préfixe et celle de la série génératrice de l'événement récurrent associé (voir [3] et [11]) entreprise par M. P. Schützenberger que l'on trouve, semble-t-il, la première apparition des séries formelles en théorie algébrique des langages. Depuis, de nombreux travaux ont eu pour objet l'étude ou l'application des séries formelles rationnelles en une ou plusieurs variables non commutatives (voir [14], et [4] où l'on trouvera une bibliographie) motivés en particulier par l'efficacité de cet outil pour l'examen de problèmes de nature très diverse, en théorie des langages et en informatique théorique. Citons, par exemple, les langages de description des graphes [1], les langages stochastiques ([18], [5]), enfin récemment les systèmes de Lindenmayer, et en particulier les DOL systèmes, où les séries rationnelles en une variable ou suites récurrentes (qui ne sont que deux aspects du même objet) apparaissent de façon centrale ([10], [7], [12]).

La spécificité des problèmes de la théorie algébrique des langages, comme les questions de décidabilité par exemple, a conduit, réciproquement, à un regain d'intérêt et à de nouvelles recherches dans la théorie classique des suites récurrentes, dont témoigne par exemple le chapitre VIII du récent livre d'Eilenberg [2].

(1) Université Paris VII.

La motivation initiale de cet article se rapproche des questions concernant la nature et le comportement de certains termes de suites récurrentes, comme elles apparaissent par exemple dans [13], où est prouvé que le nombre d'occurrences de termes égaux dans la suite récurrente des longueurs des mots d'un DOL langage est uniformément bornée. Ici nous examinons le nombre maximum de termes égaux dans une suite récurrente ou, plus généralement, le nombre de termes nuls qui peuvent apparaître dans une suite récurrente. Cette question peut être résolue dans chaque cas particulier par une méthode longue à mettre en œuvre, due à Strassman (cité dans [9]), mais aucune borne supérieure générale n'est connue.

Nous donnons, dans ces pages, quelques propriétés reliées à ce problème pour les suites récurrentes les plus simples, pour lesquelles la réponse n'est pas immédiate, à savoir les suites d'ordre 3 ou cubiques.

L'un des résultats principaux (théorème 1) montre que les indices des termes nuls, rangé par ordre croissant des restes (mod 2π) de leurs arguments, forment une suite d'abord croissante puis décroissante. Nous en tirons, dans certains cas, des bornes sur le nombre de termes nuls (ou « zéros »), et parfois des informations assez précises sur la localisation possible de ces termes nuls.

Une suite récurrente cubique linéaire réelle (T) est définie par T_0, T_1, T_2 et par :

$$T_{n+3} - PT_{n+2} + QT_{n+1} - RT_n = 0, \qquad n \in Z$$

où les nombres T_0, T_1, T_2, P, Q, R sont réels et $R \neq 0$.

On suppose que les zéros u, v, w du *polynôme caractéristique* de (T)

$$f(z) = z^3 - Pz^2 + Qz - R$$

sont distincts. Dans ces conditions, on a pour $n \in Z$

$$T_n = Au^n + Bv^n + Cw^n$$

avec $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

Il est clair que, si u, v, w sont réels, A, B, C le sont aussi et que si u est réel et $v = \bar{w}$, alors A est réel et $B = \bar{C}$.

On appelle *zéro* de (T), un entier k pour lequel $T_k = 0$. Nous allons examiner le problème du nombre et de la répartition des zéros d'une récurrence cubique. On écarte le cas trivial $T_0 = T_1 = T_2 = 0$ qui est celui de la suite récurrente nulle. Quand le rapport de deux zéros de $f(z)$ est une racine de l'unité, des exemples très simples montrent que (T) peut avoir une infinité de zéros. Réciproquement, ([8], [6], [16]), si une suite récurrente a une infinité de zéros, pour tout zéro du polynôme caractéristique, il en existe un autre tel que leur quotient soit une racine de l'unité. Dans la suite nous excluons ce cas, et par conséquent, nous supposons que les suites récurrentes cubiques étudiées sont telles que l'argument de v n'est pas rationnel avec π.

La plupart des auteurs qui ont étudié ce problème, l'ont fait dans le cas où la suite récurrente est entière (i.e. P, Q, R, T_0, T_1, T_2 sont des entiers).

Siegel [15], en 1921, montre que pour une récurrence entière, si $R = \pm 1$ et si $f(z)$ a des zéros complexes, (T) a un nombre fini de zéros, puis Ward [19], en 1934 montre que, dans ce même cas, (T) a au plus cinq zéros.

En 1935, Mahler [6] montre qu'une suite récurrente linéaire entière d'ordre quelconque a un nombre fini de zéros et, en 1953, Lech [8] étend ce résultat au cas d'une récurrence réelle.

En 1955, Ward [19] montre que si la récurrence cubique est entière et si les zéros de $f(z)$ sont entiers et premiers deux à deux, (T) a au plus trois zéros.

En 1956, Smiley [17] étend ce résultat au cas d'une récurrence réelle, quand les zéros de $f(z)$ sont réels.

Le cas où $f(z)$ a des zéros complexes et $R \neq \pm 1$ reste ouvert et on ignore même si la borne du nombre de zéros est indépendante de la récurrence, c'est-à-dire qu'il n'est pas exclu qu'il existe des suites récurrentes cubiques ayant un nombre arbitrairement grand de zéros. (Voir [9].)

On a conjecturé que, dans le cas $R = \pm 1$, cinq est le maximum possible. (Voir aussi [9].)

Cette conjecture est fausse, comme le montre l'exemple suivant dû à Berstel : la récurrence (B) définie par :

$$f(z) = z^3 - 2z^2 + 4z - 4 \quad \text{et} \quad B_0 = B_1 = 0, \qquad B_2 = 1$$

possède au moins six zéros qui sont 0, 1, 4, 6, 13, 52 (1).

Dans ce qui suit, on se place dans le cas d'une récurrence *réelle*, $f(z)$ ayant un zéro réel u et deux autres $v = \rho\, e^{2i\pi\theta} : \bar{v} = \rho\, e^{-2i\pi\theta}$ complexes conjugués dont l'argument n'est pas rationnel avec π. On donne en utilisant des méthodes élémentaires, des propriétés des zéros de la récurrence ainsi que, dans un cas, des bornes sur leur nombre et leur rang en fonction des premiers zéros.

I. DEFINITIONS ET NOTATIONS

Nous mettons une suite récurrente sous une forme canonique au moyen des deux opérations suivantes :

1. Translation

Si une récurrence (T') est définie par $T'_n = T_{n+r}$ on dit que (T') est une translatée de (T); toute translatée de (T) a le même polynôme caractéristique que (T) et si k est un zéro de (T), $k - r$ est un zéro de (T').

---

(1) Récemment Mignotte (communication personnelle) a montré qu'elle n'en a pas d'autres.

2. Symétrie-translation

Soit une récurrence (T) ayant pour zéros $k_0 = 0, k_1, k_2, \ldots, k_p$. La récurrence (T') définie par $T'_n = T_{-n+k_p}$ est appelée une symétrique translatée de (T). Son polynôme caractéristique est le polynôme réciproque de celui de (T) et elle admet comme zéros $0, k_p - k_{p-1}, \ldots, k_p - k_1, k_p$.

Si $$T_k = Au^k + B\rho^k e^{2i\pi k\theta} + \bar{B}\rho^k e^{-2i\pi k\theta} = 0$$

alors $\dfrac{T_k}{\rho^k} = A\left(\dfrac{u}{\rho}\right)^k + B\,e^{2i\pi k\theta} + \bar{B}\,e^{-2i\pi k\theta} = 0$ et on a également $(-1)^k T_k = 0$.

Si (T) possède au moins un zéro, on voit qu'au moyen de ces dernières propriétés et d'une translation convenable, on peut toujours supposer que $T_0 = 0$, que $n \in N$, que $u > 0$ et que $|v| = 1$. C'est dans ces hypothèses qu'on se placera dans tout ce qui suit.

II. LEMMES PRELIMINAIRES

Lemme 1. Si $T_0 = T_r = T_s = 0$ *avec* $0 < r < S$ *alors* u, $e^{2i\pi\theta}$, $e^{-2i\pi\theta}$ *sont racines de*

$$P(x) = x^s \sin 2\pi r\theta - x^r \sin 2\pi s\theta + \sin 2\pi(s - r)\theta = 0$$

et on a $u \neq 1$.

Preuve : Le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u^r & e^{2i\pi r\theta} & e^{-2i\pi r\theta} \\ u^s & e^{2i\pi s\theta} & e^{-2i\pi s\theta} \end{vmatrix}$$

est nul. (Voir [8].)

Ensuite, si l'on suppose $u = 1$, on obtient

$$P(1) = \sin 2\pi r\theta - \sin 2\pi s\theta + \sin 2\pi(s - r)\theta$$
$$= 4 \sin \pi r\theta \cdot \sin \pi s\theta \cdot \sin \pi(s - r)\theta = 0,$$

ce qui implique que θ est rationnel et contredit les hypothèses.

On en déduit le :

Corollaire. Si les trois racines ont même module, la récurrence a au plus deux zéros.

On peut obtenir aussi à l'aide du lemme 1 le résultat suivant :

Proposition. *Si* $T_0 = T_1 = 0$ *et si* $u \geqslant 2$, *la récurrence* (T) *n'a pas d'autres zéros.*

Preuve. Supposons $T_0 = T_1 = T_n = 0$ avec $n \geqslant 3$. Nous allons montrer que $P(x) = x^n \sin 2\pi\theta - x \sin 2\pi n\theta + \sin 2\pi(n-1)\theta$ est positif pour $x \geqslant 2$. On sait que pour n entier $|\sin 2\pi n\theta| \leqslant n|\sin 2\pi\theta|$; comme on peut toujours supposer $\sin 2\pi\theta > 0$, on obtient

$$P(x) \geqslant \sin 2\pi\theta(x^n - nx - n + 1).$$

La fonction $x \to f_n(x) = x^n - nx - n + 1$ est croissante pour $x > 1$, la fonction $n \to f_n(2)$ est croissante pour $n \geqslant 3$ et comme $f_3(2) = 3 > 0$, on obtient $P(x) > 0$ pour $x \geqslant 2$ et $n \geqslant 3$ ce qui achève la preuve.

Pour $1 < u < 2$ on a une borne de n en fonction de u telle que

$$U^n - nU - n + 1 > 0.$$

Pour tout x réel, on pose $x = [x] + \{ x \}$ où $[x]$ et $\{ x \}$ sont respectivement la partie entière et la partie fractionnaire de x.

On utilisera les égalités $\{ x - y \} = \{ x \} - \{ y \}$ si $\{ x \} \geqslant \{ y \}$

$\{ x - y \} = 1 + \{ x \} - \{ y \}$ si $\{ x \} < \{ y \}$

Lemme 2. *Si la suite des signes des coefficients de $P(x)$ est :*

(1) $+ \; - \; +$ ou, ce qui est équivalent, si $\{ r\theta \} < \{ s\theta \} < \frac{1}{2}$, *alors $P(x) = 0$ a 0 ou 2 racines positives simultanément inférieures ou supérieures à* 1.

(2) $+ \; - \; -$ *ou, ce qui est équivalent, si $\{ s\theta \} < \{ r\theta \} < \frac{1}{2}$, alors $P(x) = 0$ a une seule racine positive supérieure à* 1.

(3) $+ \; + \; -$ *ou, ce qui est équivalent, si $\{ r\theta \} + \frac{1}{2} < \{ s\theta \}$ alors $P(x) = 0$ a une seule racine positive inférieure à* 1.

(4) $+ \; + \; +$ *$P(x) = 0$ n'a aucune racine positive.*

Preuve. Dans les quatre cas la règle de Descartes donne le résultat sur le nombre de racines positives.

Quant à leur place par rapport à 1 :

(1) $P(1) = \sin 2\pi r\theta \cdot (1 - \cos 2\pi(s - r)\theta) + \sin 2\pi s\theta \cdot (1 - \cos 2\pi r\theta) > 0$

(2) $P(1) = \sin 2\pi s\theta \cdot (\cos 2\pi(s - r)\theta - 1) + \sin 2\pi(s - r)\theta \cdot (1 - \cos 2\pi s\theta) < 0$

(3) $P(1) = \sin 2\pi r\theta \cdot (1 - \cos 2\pi s\theta) - \sin 2\pi s\theta \cdot (1 - \cos 2\pi r\theta) > 0$

REMARQUES

1. Pour k entier non nul, on a toujours $\sin 2\pi k\theta \neq 0$ car θ est irrationnel.

2. On peut toujours choisir $\sin 2\pi r\theta > 0$ $\left(\text{c'est-à-dire } 0 < \{ r\theta \} < \frac{1}{2}\right)$ en changeant au besoin θ en $1 - \theta$, ce qui échange les deux zéros non réels du polynôme caractéristique sans changer la récurrence ; il suffit donc de considérer les cas du lemme 2.

3. Quand $u > 1$ et quand, ayant choisi $\sin 2\pi r\theta > 0$, $P(x)$ est du type (1), on voit qu'on a nécessairement $\sin 2\pi r\theta < \sin 2\pi s\theta$.

III. STRUCTURE DES ZEROS D'UNE RECURRENCE (T)

θ étant un nombre irrationnel compris entre 0 et 1, soit α_θ la relation sur N définie pour tous entiers r et s par $r\alpha_\theta s$ si et seulement si $\{ r\theta \} \leqslant \{ s\theta \}$. α_θ est une relation d'ordre car θ est irrationnel et elle est totale. $\alpha_{1-\theta}$ est la relation d'ordre inverse de α_θ car $\{ n(1 - \theta) \} = 1 - \{ n\theta \}$. On dira qu'une suite d'entiers $(n_1, \ldots, n_p)$ tels que $n_1 \alpha_\theta \ldots \alpha_\theta n_p$ est *montante* (respectivement *descendante*) si et seulement si $n_1 \leqslant \ldots \leqslant n_p$ (respectivement $n_1 \geqslant \ldots \geqslant n_p$). Soient $k_1, \ldots, k_n$ tous les zéros non nuls d'une récurrence (T). Ayant choisi θ, on appelle *suite des zéros* de (T) la suite $\mathcal{S}(T) = (k_1, \ldots, k_n)$ telle que $k_1 \alpha_\theta \ldots \alpha_\theta k_n$, c'est-à-dire l'ensemble des zéros non nuls de (T) ordonnés suivant α_θ. Nous allons montrer le :

Théorème 1. $\mathcal{S}(T) = (m_1, m_2, \ldots m_n, l, d_p, \ldots, d_2, d_1)$ *où* $(m_1, m_2, \ldots, l)$ *est une suite montante et* $(l, \ldots, d_2, d_1)$ *est une suite descendante.*

Preuve. Il suffit de montrer qu'il est impossible que $\mathcal{S}(T)$ contienne un triplet de la forme (s, r, t) avec $r < s$ et $r < t$, ce que nous allons supposer.

1. Cas $u < 1$. Si θ est tel que $\{ r\theta \} < \frac{1}{2}$, le couple (s, r) correspond à un polynôme $P(x)$ dont les signes des coefficients sont $+ - -$. D'après le cas (2) du lemme 2 $P(x)$ a une seule racine positive supérieure à 1, ce qui amène une contradiction. Si $\{ r\theta \} > \frac{1}{2}$, en changeant θ en $1 - \theta$, (s, r, t) se change en (t, r, s) et la considération du couple (t, r) donne alors une contradiction.

2. Cas $u > 1$

a) Si $r < s < t$, la récurrence (T') définie par $T'_n = T_{n+t}$ a 3 zéros : $t - s, t - r, t$ tels que $t - s < t - r < t$ et $\frac{1}{u} < 1$ est zéro de son polynôme caractéristique. Comme alors on a :

$$\{ (t - s)\theta \} = \{ t\theta \} - \{ s\theta \} \quad \text{et} \quad \{ (t - r)\theta \} = \{ t\theta \} - \{ r\theta \}$$

on voit que $\{ (t - r)\theta \} < \{ (t - s)\theta \} < \{ t\theta \}$, ce qui signifie que $\mathcal{S}(T')$ contient le triplet $(t - r, t - s, t)$ ce qui est impossible d'après le 1.

b) Si $r < t < s$, le changement de θ en $1 - \theta$ change (s, r, t) en (t, r, s) ce qui ramène au cas précédent en échangeant les rôles de s et t. La preuve est achevée.

REMARQUE. Le résultat du théorème 1 reste vrai si l'on remplace θ par $1 - \theta$. Si $(m_1, ..., l, ... d_1)$ est la suite obtenue avec θ, celle que l'on obtient avec $1 - \theta$ est la suite opposée, soit $(d_1, ..., l, ..., m_1)$.

Désormais, dans tout ce qui suivra, on choisit θ tel que $\{ l\theta \} < \frac{1}{2}$, l étant le plus grand zéro.

Propriétés de $\mathcal{S}(T)$

A. *Cas $u > 1$*

1. Tous les zéros k_i sont tels que $\{ k_i\theta \} < \frac{1}{2}$.

2. Un couple est montant si et seulement si le polynôme $P(x)$ correspondant est du type $+ \; - \; +$; un couple descendant correspond à un polynôme $P(x)$ du type $+ \; - \; -$.

3. La remarque 3 du lemme 2 implique $\{ m_n\theta \} < \frac{1}{4}$.

B. *Cas $u < 1$*

1. On a $\{ m_1\theta \} < ... < \{ l\theta \} < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < \{ d_p\theta \} < ... < \{ d_1\theta \}$.

2. Les couples (m_i, m_j) ou (m_i, l) et les couples (d_i, d_j) avec $i < j$, correspondent à un polynôme $P(x)$ du type $+ \; - \; +$ alors que les couples (m_i, d_j) ou (l, d_j) correspondent à un polynôme $P(x)$ du type $+ \; + \; -$.

Toutes ces propriétés découlent immédiatement du lemme 2.

C. *Effet d'une translation et d'une symétrie-translation sur*

$$\mathcal{S}(T) = (m_1, m_2, ..., l, ..., d_2, d_1).$$

1. Translation de m_1.

Soit (Q) telle que $Q_n = T_{n+m_1}$, on a alors

$$\mathcal{S}(Q) = (m_2 - m_1, ..., l - m_1, ..., d_i - m_1)$$

avec d_i tel que $d_{i-1} < m_1 < d_i$.

2. Translation de d_1.

Soit (Q) telle que $Q_n = T_{n+d_1}$, on a alors

$$\mathcal{S}(Q) = (d_2 - d_1, ..., l - d_1, ..., m_i - d_1)$$

avec m_i tel que $m_{i-1} < d_1 < m_i$.

3. Symétrie-translation.

Soit (Q) telle que $Q_n = T_{-n+l}$, on a alors

$$\mathcal{S}(Q) = (l - m_n, \ldots, l - m_1, l, l - d_1, \ldots, l - d_p)$$

IV. BORNES SUR LE NOMBRE ET LE RANG DES ZEROS

r et s étant deux entiers quelconques, on pose

$$d(r, s) = s[r\theta] - r[s\theta] = r\{s\theta\} - s\{r\theta\}$$

θ étant un nombre réel donné. On voit que $d(r, s)$ est un entier, que

$$d(s, r) = -d(r, s)$$

et qu'on a, pour trois entiers r, s, t, l'identité :

$$\begin{vmatrix} r & s & t \\ [r\theta] & [s\theta] & [t\theta] \\ \{r\theta\} & \{s\theta\} & \{t\theta\} \end{vmatrix} = 0$$

dont les deux formes suivantes nous serviront par la suite :

$$rd(s, t) + sd(t, r) + td(r, s) = 0 \tag{1}$$

$$\{r\theta\}\, d(s, t) + \{s\theta\}\, d(t, r) + \{t\theta\}\, d(r, s) = 0 \tag{2}$$

A. *Cas $u > 1$*

Lemme 3. *Soient r et s deux zéros différents et non nuls d'une récurrence (T) avec $u > 1$. On a*

$$r\alpha_\theta s \Leftrightarrow d(r, s) \geqslant 1$$

Preuve. Supposons $r\alpha_\theta s$ et distinguons deux cas :

a) Si $r < s$, le couple (r, s) est montant et correspond à un polynôme $P(x)$ du type $+ \; - \; +$. Comme $P(x) = 0$ a, dans ce cas, deux racines supérieures à 1, on a nécessairement $P'(1) < 0$, c'est-à-dire :

$$s \sin 2\pi r\theta - r \sin 2\pi s\theta < 0$$

qui s'écrit encore

$$\frac{s}{r} < \frac{\sin 2\pi\{s\theta\}}{\sin 2\pi\{r\theta\}}$$

Or la fonction $x \rightarrow \dfrac{\sin x}{x}$ est décroissante entre 0 et π, ce qui permet d'écrire

$$\frac{\sin 2\pi\{s\theta\}}{\sin 2\pi\{r\theta\}} < \frac{\{s\theta\}}{\{r\theta\}}$$

car par hypothèse, $0 < 2\pi\{r\theta\} < 2\pi\{s\theta\} < \pi$.

En rapprochant les deux inégalités, on obtient :

$$r \{ s\theta \} - s \{ r\theta \} > 0$$

et comme $d(r, s)$ est un entier, on a bien $d(r, s) \geqslant 1$.

b) Si $r > s$, le résultat est évident puisque, par hypothèse,

$$\{ s\theta \} > \{ r\theta \}.$$

Supposons maintenant $d(r, s) \geqslant 1$. Si $s\alpha_\theta r$, on a $d(s, r) \geqslant 1$ d'après la première partie du lemme ; mais comme $d(s, r) = -d(r, s)$ il vient une contradiction qui montre que l'on a $r\alpha_\theta s$. La preuve est complète.

Corollaire 1. Pour tout zéro $k_i \neq d_1$, *on a* $k_i > \dfrac{1}{\theta} > 1$.

En effet, $d(k_i, d_1) \geqslant 1$ implique $[k_i\theta] \geqslant 1$.

Corollaire 2. *On a* $l < \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \dfrac{\dfrac{mi}{2} - 1}{\{ m_i\theta \}}$.

Ceci se déduit immédiatement de $d(m_i, l) \geqslant 1$.

On peut à présent, montrer les deux théorèmes suivants qui donnent des bornes sur le nombre des zéros en fonction des premiers zéros.

Théorème 2. *Si* $N(T)$ *est le nombre de zéros d'une récurrence* (T) *avec* $u > 1$, *alors* $N(T) < \dfrac{m_1}{2} + 2$.

Preuve : Considérons 3 zéros non nuls r, s, t tels que $r\alpha_\theta s\alpha_\theta t$. Nous allons montrer que $d(r, s) < d(r, t)$. En effet, la relation (2) s'écrit

$$\{ r\theta \} d(s, t) = \{ s\theta \} d(r, t) - \{ t\theta \} d(r, s)$$

Par hypothèse, $\{ s\theta \} < \{ t\theta \}$ et d'après le lemme 3 $d(s, t) > 0$, ce qui montre que nécessairement $d(r, s) < d(r, t)$.

Ceci implique en particulier que l'application $s \to d(m_1, s)$ est strictement croissante suivant l'ordre α_θ et donc qu'elle est injective ; comme d'autre part, pour tout s,

$$d(m_1, s) = m_1 \{ s\theta \} - s \{ m_1\theta \} < \frac{m_1}{2},$$

on obtient en comptant $T_0 = 0$, le résultat annoncé.

Cette inégalité est la meilleure possible comme le montrera un exemple plus loin.

Donnons une conséquence plus pratique de ce théorème montrant que l'on peut avoir une borne pour $N(T)$ en fonction des premiers zéros sans connaître leur ordre suivant α_θ

Corollaire A. *Si r et s, avec $r < s$, sont les deux premiers zéros d'une récurrence (T) avec $u > 1$, alors*

$$N(T) < \operatorname{Max}\left(\frac{s}{2} + 2, \frac{s - r}{2} + 3\right)$$

Preuve. On considère les cas possibles

1. Si $r = m_1$, alors $N(T) < \frac{r}{2} + 2$.

2. Si $r = d_1$ et $s = m_1$, alors $N(T) < \frac{s}{2} + 2$.

3. Si $r = d_1$ et $s = d_2$, alors $N(T) < \frac{s - r}{2} + 3$ en utilisant la translatée de module r.

Théorème 3. *Si $N(T)$ est le nombre de zéros d'une récurrence (T) avec $u > 1$, alors*

$$N(T) < \frac{m_1 + d_2 - d_1}{4} + 4$$

Preuve : Pour une récurrence (T) telle que :

$$\mathcal{S}(T) = (m_1, \ldots, m_n, l, d_p, \ldots, d_1), \text{ on a } N(T) = n + p + 2.$$

On montre d'abord que :

1) Si $\{ l\theta \} < \frac{1}{4}$, alors $n + 1 < \frac{m_1}{4} + 1$.

2) Si $\{ l\theta \} > \frac{1}{4}$, alors $n < \frac{m_1}{4} + 1$.

En effet, l'application $s \to d(m_1, s)$ est injective et dans les deux cas, on a $1 \leqslant d(m_1, s) < \frac{m_1}{4}$ d'après la propriété 3 de $\mathcal{S}(T)$ pour $u > 1$, quand s parcourt $(m_2, \ldots, m_n)$

A présent, soit (Q) telle que $Q_n = T_{n+d_1}$; on a

$$\mathcal{S}(Q) = (d_2 - d_1, \ldots, d_p - d_1, l - d_1, \ldots, m_i - d_1).$$

Si $\{ l\theta \} > \frac{1}{4}$, on voit que $\{ (1 - d_1)(1 - \theta) \} < \frac{1}{4}$, donc qu'on a $p < \frac{d_2 - d_1}{4} + 1$ d'après le 1) appliqué à (Q) et $n < \frac{m_1}{4} + 1$ d'après le 2).

Si $\{ l\theta \} < \frac{1}{4}$, on a $n + 1 < \frac{m_1}{4} + 1$ d'après le 1) et $p - 1 < \frac{d_2 - d_1}{4} + 1$ d'après le 2) appliqué à (Q).

En définitive, dans les deux cas, on obtient

$$n + p + 2 < \frac{m_1 + d_2 - d_1}{4} + 4$$

Le théorème suivant montre que, les deux premiers zéros de la suite montante étant donnés, il ne peut y avoir d'écart arbitrairement grand entre les zéros supérieurs et donne donc une borne pour le plus grand zéro.

Théorème 4. *Si r, s, t sont trois zéros non nuls et différents d'une récurrence (T) avec $u > 1$, tels que la suite (r, s, t) soit montante, alors on a*

$$t < \frac{r(s - r)}{2}$$

Preuve. Soit (T') telle que $T'_n = T_{n+r}$; $s - r$ et $t - r$ sont deux zéros de (T') et le couple $(s - r, t - r)$ est montant ce qui entraîne, d'après le lemme 3, $d(s - r, t - r) \geqslant 1$. Or, on vérifie immédiatement que, pour un couple montant $(s - r, t - r)$,

$$d(s - r, t - r) = d(r, s) + d(s, t) - d(r, t)$$

d'où l'on déduit $d(s, t) \geqslant 1 + d(r, t) - d(r, s)$ et d'après la relation (1)

$$sd(r, t) - td(r, s) = rd(s, t) \geqslant r(1 + d(r, t) - d(r, s))$$

soit

$$0 \leqslant (s - r)d(r, t) - (t - r)d(r, s) - r$$

comme on a $d(r, s) \geqslant 1$ et $d(r, t) < \frac{r}{2}$, on en déduit

$$t < \frac{r(s - r)}{2}.$$

Il s'ensuit immédiatement le

Corollaire

$$l < \min_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{m_j(m_k - m_j)}{2} \leqslant \frac{m_1(m_2 - m_1)}{2}$$

On donne enfin une conséquence pratique du théorème 4 analogue au corollaire A.

Corollaire B. *Si q, r, s, t avec $q < r < s < t$ sont les quatre premiers zéros non nuls d'une récurrence (T) avec $u > 1$, alors on a*

$$l < \operatorname{Max}\left(\frac{q(t - q)}{2}, \frac{r(t - r)}{2}, \frac{s(t - s)}{2}\right)$$

Preuve. On considère tous les cas possibles, ce qui est un peu long mais ne présente aucune difficulté.

B. *Cas* $u < 1$

Soit une récurrence (T) avec $u < 1$ et soit

$$S(T) = (m_1, m_2 \dots m_n, l, d_p, \dots, d_2, d_1)$$

La symétrique-translatée (Q) est telle que

$$S(Q) = (l - m_n, \dots, l - m, l, l - d_1, \dots, l - d_p)$$

En appliquant à (Q) les résultats du cas A, on va obtenir des résultats pour (T).

Le corollaire 1 du lemme 3 se transforme en le

Corollaire 1'. *Pour tout zéro* $k_i \neq d_p$, *on a*

$$l > \frac{1}{\theta} + \kappa_i > 1 + k_i$$

Les théorèmes 2, 3 et 4 en les

Théorème 2' $N(T) < \dfrac{l - m_n}{2} + 2$

Théorème 3' $N(T) < \dfrac{l - m_n + d_p - d_{p-1}}{4} + 4$

Théorème 4' $l > \underset{1 \leqslant j < i \leqslant n}{\mathrm{MAX}} \dfrac{m_i(m_i - m_j)}{m_i - m_j - 2}$

On voit en conclusion, que les résultats obtenus dans le cas $u < 1$, sont bien moins applicables que ceux du cas $u > 1$ au problème du nombre de zéros d'une récurrence, car en fait, dans le cas $u > 1$, les théorèmes que nous avons obtenus, permettent de borner le nombre de zéros, de rang supérieur à ceux d'un couple de zéros fixés, en fonction de la différence de leurs rangs alors que dans le cas $u < 1$, ce sont les zéros de rang inférieur sur lesquels on obtient des informations.

V. EXEMPLES ET APPLICATIONS

Dans cette partie, on commence par donner des exemples de récurrences ayant toutes au moins quatre zéros. Il est facile de voir, que pour toutes ces récurrences, θ est irrationnel.

Récurrence	Polynome caractéristique	Valeurs initiales	Ordre des zéros suivant α_θ
(A)	$z^3 + z^2 + z - 1$	$A_0 = A_1 = 0, A_2 = 1$	(17, 4, 1)
(B)	$z^3 - az^2 + bz - c$ avec $b = a^2$ et $2c = a^3$	$B_0 = B_1 = 0, B_2 = 1$	(1, 6, 52, 13, 4)
(C)	$z^3 - bz - c$ avec $b^3 + c^2 = 0$	$C_0 = C_1 = 0, C_2 = 1$	(1, 8, 3)
(D)	$z^3 - az^2 - c$ avec $a^3 + 2c = 0$	$D_0 = 0, D_1 = 1, D_2 = 0$	(3, 8, 2)
(E)	$z^3 - az^2 - c$ avec $a^3 + c = 0$	$E_0 = 0, E_1 = 1, E_2 = 0$	(3, 16, 7, 2)

Ces cinq récurrences sont telles que $u < 1$.

Donnons ensuite, les récurrences déduites des précédentes par symétrie translations, qui sont donc telles que $u > 1$.

Récurrence	Symétrie-translation	Ordre des zéros suivant α_θ
(A')	$A'_{-n+17} = A_n$	(17, 16, 13)
(B')	$B'_{-n+52} = B_n$	(46, 51, 52, 48, 39)
(C')	$C'_{-n+8} = C_n$	(7, 8, 5)
(D')	$D'_{-n+8} = D_n$	(5, 8, 6)
(E')	$E'_{-n+16} = E_n$	(13. 16, 14, 9)

On va montrer à présent, à l'aide des résultats de la partie précédente, que les récurrences ci-dessus avec $u > 1$; n'ont pas d'autres zéros.

Commençons par appliquer le corollaire 2 du lemme 3 à (A') et (B'). Soient l_a et l_b les plus grands zéros de (A') et (B') respectivement, et θ_a et θ_b les θ correspondants. Le calcul montre que $0{,}21 < \theta_b < 0{,}22$ et $0{,}34 < \theta_a < 0{,}35$.

La translatée (Q) telle que $Q_n = A'_{n+13}$ admet les deux zéros 3 et $l_a - 13$, le couple $(3, l_a - 13)$ est montant et $l_a - 13$ est son plus grand que zéro. On obtient alors $l_a - 13 < \dfrac{3/2 - 1}{1 - \{ 3\theta_a \}} < 14$, d'où $l_a \leqslant 26$. Le calcul montre alors qu'il n'y a pas de zéros entre 17 et 26. Pour (B'), on utilise la translatée (R) telle que $R_n = B'_{n+48}$ et de façon analogue on obtient

$$l_b - 48 < \frac{4/2 - 1}{1 - \{4\theta_b\}} < 8, \quad \text{d'où} \quad l_b \leqslant 55.$$

(B') n'ayant pas de zéros entre 52 et 55, elle n'en a donc pas d'autres.

De la même façon, l'application des théorèmes 2 et 4 à certaines translatées donne souvent de meilleures bornes que l'application directe. Pour (A'), le théorème 2 appliqué à la translation (Q) telle que $Q_n = A'_{n+13}$ donne

$$N(A') < \frac{3}{2} + 2 + 1 = 4{,}5,$$

car la suite des zéros de (Q) est (3, 4). Pour (B'), la translatée de module 46 donne $N(B') < \frac{5}{2} + 2 + 2 = 6{,}5$, car la suite des zéros est (5, 6, 2). (Notons que la translation fait « perdre » un ou plusieurs zéros.) Pour (C'), on prend la translatée de module 5, la suite des zéros est (3,2) et on a

$$N(C') < \frac{3}{2} + 2 + 1 = 4{,}5.$$

Pour (D'), l'application directe donne $N(D') < \frac{5}{2} + 2 = 4{,}5$.

Enfin, pour (E'), la translatée de module 9 a comme suite de zéros (5, 7, 4) et on a $N(E') < \frac{5}{2} + 2 + 1 = 5{,}5$.

Le théorème 2 montre donc dans tous ces cas que ces récurrences n'ont pas d'autres zéros. D'autre part, tous ces exemples montrent aussi que le théorème 2 est le meilleur possible.

Donnons maintenant l'application du théorème 4 aux translatées précédentes ou directement aux récurrences données suivant les cas. Avec des notations évidentes, on obtient successivement :

Pour (A'), $l_a - 13 < \frac{3}{2}$ d'où $l_a < 14{,}5$.

Pour (B'), $l_b - 46 < \frac{5}{2}$ d'où $l_b < 48{,}5$.

Pour (C'), $l_c < \frac{7}{2} = 3{,}5$.

Pour (D'), $l_d < 12$.

Pour (E'), $l_e - 9 < 5$ d'où $l_e < 14$.

Pour (D'), il faut constater qu'il n'y a pas de zéros entre 8 et 12 ; pour toutes les autres le théorème 4 montre, sans autre calcul, que l'existence d'un zéro supérieur au plus grand déjà connu est impossible.

Le théorème 3, dans ces exemples, donne une borne moins bonne que le théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. CORI, *Un code pour les graphes planaires et ses applications*, Thèse Paris VII, 1973.

[2] S. EILENBERG, *Theory of Automata*, vol. A : *Foundations*, Academic Press, 1973.

[3] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, 2^e éd., J. Wiley, 1957.

[4] M. FLIESS, *Sur certaines familles de séries formelles*, Thèse Paris VII, 1972.

[5] M. FLIESS, *Propriétés booléennes des langages stochastiques*, Math. Systems Th. *7* (1974), 353-359.

[6] K. MAHLER, *Eine arithmetische Eigenschaft der Taylor — Koeffizienten rationaler Funktionen*, Proc. Amsterdam Acad., *38* (1935), 50-60.

[7] M. NIELSEN, *On the decidability of some equivalence problems for DOL systems*, Information and Control *25* (1974), 166-193.

[8] C. LECH, *A note on recurring series*, Archiv Math. *2* (1953), 417-421.

[9] D. J. LEWIS, Diophantine equations : p-adic methods, *in* : Leveque (ed), *Studies in Number Theory*, Math. Ass. America, Prentice-Hall 1969.

[10] A. PAZ and A. SALOMAA, *Integral sequential word function and growth equivalence of Lindenmayer systems*, Information and Control, *23*, 1973, 313-343.

[11] J. F. PERROT, *Quelques problèmes combinatoires de la théorie des automates*, Notes d'un cours de M. P. Schützenberger, Institut de Programmation, Paris, 1967 (miméographié).

[12] W. POLLUL and D. SCHÜTT, *Growth in DOL systems*, à paraître.

[13] G. ROZENBERG, *The length sets of DOL languages are uniformly bounded*, Inf. Proc. Letters *2* (1974), 185-188.

[14] M. P. SCHÜTZENBERGER, *On the definition of a family of automata*, Information and Control *4* (1961), 245-270.

[15] C. S. SIEGEL, *Ueber die Koefficienten in der Taylor — Entwicklung rationaler Funktionen*, Tohoku Journal *20* (1921), 26-31.

[16] T. SKOLEM, *Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentieller Gleichungen*, *in* C. R. 8^e congrès Math. Scand., Stochkolm 1934, Lund 1935, 163-188.

[17] M. F. SMILEY, *On the zeros of a cubic recurrence*, American Math. Monthly *63* (1956), 171-172.

[18] P. TURAKAINEN, *Some closure properties of the family of stochastic languages*, Information and Control *18* (1971), 253-256.

[19] M. WARD, *Note on an arithmetical property of recurring series*, Math. Zeitschrift *39* (1934), 211-224.