MARYSE DESROCHERS

# Dimensions globales des extensions de Ore et des algèbres de Weyl

*Groupe d'étude d'algèbre*, tome 2 (1976-1977), exp. n° 6, p. 1-31
<http://www.numdam.org/item?id=GEA_1976-1977__2__A6_0>

Groupe d'étude d'ALGÈBRE
(Marie-Paule MALLIAVIN)
2e année, 1976/77, n° 6, 31 p.



19 et 26 avril, et 3 mai 1977

# DIMENSIONS GLOBALES DES EXTENSIONS DE ORE ET DES ALGÈBRES DE WEYL

par Maryse DESROCHERS

## 1. Introduction.

La première partie de cet exposé concerne les extensions de Ore. Soit $R$ un anneau muni d'une dérivation $D$, et soit $S = R[t]$, l'extension de Ore associée à $D$. $S$ est additivement le groupe des polynômes en une indéterminée $t$ avec $tr = rt + D(r)$ pour tout $r$ appartenant à $R$. L'inégalité $\text{l.gl.dim } S \leqslant \text{l.gl.dim } R + 1$ a déjà été remarqué par plusieurs auteurs, parmi lesquels K. FIELDS, N. S. GOPALAKRISHNAN et R. SRIDHARAN (cf. [8] et [12]). Nous montrons ici que, dans le cas où $R$ est noethérien à droite et à gauche, de dimension globale à gauche finie, une condition nécessaire et suffisante pour obtenir l'égalité est l'existence d'un $S$-module $M$, de type fini sur $R$, tel que $\text{l. dim}_R M = \text{l.gl.dim } R$. Si, de plus, $R$ est commutatif, nous obtenons une partie du théorème 22 de GOODEARL (cf. [11]).

Dans la deuxième partie sont étudiées les algèbres de Weyl :

$$A_n(R) = R[x_1 , \ldots , x_n , t_1 , \ldots , t_n] ,$$

$t_i x_i - x_i t_i = 1$ et $x_i t_j = t_j x_i$ pour $i$ différent de $j$. Pour $R$, anneau noethérien à droite et à gauche, on montre que $\text{gl. dim } A_n(R) = \text{gl. dim } R + 1$ ou $\text{gl. dim } R + 2$, le second cas se produisant si, et seulement si, il existe un $A_n(R)$-module à gauche, $M$, de type fini en tant que $R$-module, tel que

$$\text{l. dim}_R M = \text{gl. dim } R$$

lorsque $\text{gl. dim } R < \infty$. Si $R$ est un anneau commutatif noethérien contenant les nombres rationnels, on prouve que $\text{gl. dim } A_n(R) = \text{gl. dim } R + n$, et si $R$ ne contient pas les nombres rationnels, on introduit $m$, le maximum des dimensions projectives des $R$-modules à gauche cycliques qui sont des groupes de torsion abéliens ; on obtient alors $\text{gl. dim } A_n(R) = \text{gl. dim } R + n$ pour $n$ inférieur ou égal à $\text{gl. dim } R - m$, et $\text{gl. dim } A_n(R) = m + 2n$ pour $n$ supérieur ou égal à $\text{gl. dim } R - m$.

## 2. Foncteur Tor et intersections.

Dans cette section, nous allons prouver la formule

$$\text{(2.1)} \qquad \text{Tor}_d^R (N , \cap M_i) = \cap \text{Tor}_d^R (N , M_i)$$

pour $R$ anneau noethérien à droite tel que $\text{w.gl.dim } R = d$, $N$ un $R$-module à droite, et $\{M_i\}$ une famille de sous-modules d'un $R$-module à gauche $M$. On rappelle que

$$\text{w.gl.dim}\, R = \sup \text{w.r.dim}_R\, M = \sup \text{w.l.dim}_R\, N \quad (\text{cf. [15], p. 150})$$

avec $M$ R-module à droite et $N$ R-module à gauche,

où $\text{w.r.dim}_R\, M$ est la dimension plate de $M$, c'est-à-dire le plus grand entier positif $n$ tel que $\text{Tor}_n^R(M\ ,\ N) \neq 0$ pour un certain R-module à gauche $N$, $\text{w.l.dim}_R\, N$ étant défini de manière analogue à gauche.

LEMME 2.2. - Soient $R$ un anneau noethérien à droite tel que $\text{w.gl.dim}\, R = d < \infty$, $N$ un R-module à droite arbitraire, et $F$ le foncteur défini par $F(X) = \text{Tor}_d^R(N\ ,\ X)$ pour $X$ R-module à gauche quelconque. Alors,

(i) $F$ est exact à gauche (en particulier, si $X' \subset X$ sont deux R-modules à gauche, l'application $F(X') \longrightarrow F(X)$ est injective, et nous identifierons $F(X')$ et son image dans $F(X)$ ;

(ii) Pour toute famille $\{X_i\}$ de R-modules à gauche, l'application $F(\prod X_i) \longrightarrow \prod F(X_i)$ induite par les projections est injective.

Démonstration. - Montrons que $F$ est exact à gauche. Soit $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ une suite exacte de R-modules à gauche. On a alors

$$\dots \longrightarrow \text{Tor}_{d+1}^R(N\ ,\ X'') \longrightarrow \text{Tor}_d^R(N\ ,\ X') \longrightarrow \text{Tor}_d^R(N\ ,\ X) \longrightarrow \text{Tor}_d^R(N\ ,\ X'') \longrightarrow \dots$$

et $\text{Tor}_{d+1}^R(N\ ,\ X'') = 0$ car $\text{w.gl.dim}\, R = d$, d'où le résultat. De même, si $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte de R-modules à droite, $\text{Tor}_{d+1}^R(N''\ ,\ X) = 0$, et on obtient

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_d^R(N'\ ,\ X) \longrightarrow \text{Tor}_d^R(N\ ,\ X) \longrightarrow \text{Tor}_d^R(N''\ ,\ X)\ .$$

Pour démontrer la partie (ii), notons que si $Y$ est un R-module à droite, il y a un homomorphisme canonique $Y \otimes_R \prod X_i \longrightarrow \prod (Y \otimes_R X_i)$ provenant des projections (cf. [4], p. 90). Cet homomorphisme est bijectif si $Y$ est de type fini sur $R$. En effet, soient $y_1\ ,\ y_2\ ,\ \dots\ ,\ y_n$ des générateurs de $Y$, et soit $\{z_i \otimes x_i\}$ un élément quelconque de $\prod (Y \otimes_R X_i)$. On a $z_i = \sum_{j=1}^n y_j\, r_{i,j}$, et l'élément $\sum_{j=1}^n (y_j \otimes \{r_{i,j}\, x_i\})$ de $Y \otimes_R \prod X_i$ s'envoie bien sur $\{z_i \otimes x_i\}$, d'où la surjectivité. Pour montrer l'injectivité, introduisons une suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow Y \longrightarrow 0\ ,$$

où $F$ est un R-module libre de type fini, et $N$ le noyau de l'homomorphisme $F \longrightarrow Y$. Comme $R$ est noethérien à droite, $N$ est aussi de type fini sur $R$. De plus, $F$ étant libre sur $R$, $F \otimes_R \prod X_i \longrightarrow \prod (F \otimes_R X_i)$ est injectif (cf. [4], p. 92, corollaire 3). Mais le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
N \otimes_R \prod X_i & \longrightarrow & F \otimes_R \prod X_i & \longrightarrow & Y \otimes_R \prod X_i & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\prod (N \otimes_R X_i) & \longrightarrow & \prod (F \otimes_R X_i) & \longrightarrow & \prod (Y \otimes_R X_i) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

(cf. [4], p. 86, proposition 5, et [4], p. 23, proposition 5, pour obtenir les suites exactes horizontales), d'où l'injectivité de

$$Y \otimes_R \prod X_i \longrightarrow \prod (Y \otimes_R X_i) .$$

Notons maintenant que le foncteur $H$ commute avec le produit direct (cf. [6], p. 98, proposition 9.3) et que, si $Y$ est une résolution projective de $N$, alors $\mathrm{Tor}_n^R(N , M)$ et $H_n(Y \otimes_R M)$ sont isomorphes pour tout $n \geq 0$ et tout R-module à gauche $M$ (cf. [15], p. 127, théorème 4). On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_n^R(N , \prod X_i) = H_n(Y \otimes_R \prod X_i) \longrightarrow H_n(\prod (Y \otimes_R X_i)) &= \prod (H_n(Y \otimes_R X_i)) \\ &= \prod \mathrm{Tor}_n^R(N , X_i) ,\end{aligned}$$

ce qui nous donne un homomorphisme

$$\varphi_n : \mathrm{Tor}_n^R(N , \prod X_i) \longrightarrow \prod \mathrm{Tor}_n^R(N , X_i) .$$

Mais comme $R$ est noethérien à droite, si $N$ est de type fini sur $R$, $N$ possède une résolution projective de R-modules de type fini (cf. [6], p. 78, proposition 1.3.). D'où les $\varphi_n$ sont des isomorphismes si $N$ est de type fini.

Maintenant, pour tout R-module à droite $N$, et pour tout sous-module $N'$ de $N$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F(\prod X_i) = \mathrm{Tor}_d^R(N , \prod X_i) \arrow[r, "\varphi_d"] & \prod \mathrm{Tor}_d^R(N , X_i) = \prod F(X_i) \\ \mathrm{Tor}_d^R(N' , \prod X_i) \arrow[u] \arrow[r, "\varphi'_d"] & \prod \mathrm{Tor}_d^R(N' , X_i) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

où, grâce à (i), les flèches verticales sont les monomorphismes induits par l'injection $N' \longrightarrow N$ (cf. [4], p. 23, proposition 5). De plus, $F(\prod X_i)$ est la réunion des sous-groupes $\mathrm{Tor}_d^R(N' , \prod X_i)$, où $N'$ parcourt les sous-modules de $N$ de type fini sur $R$ car $N$ est la limite directe de ses sous-modules de type fini, et les foncteurs $\mathrm{Tor}_n^R$ commutent avec les limites directes (cf. [6], p. 107, proposition 1.3.). Donc tout élément de $\mathrm{Ker}\ \varphi_d$ doit appartenir à $\mathrm{Tor}_d^R(N' , \prod X_i)$ pour $N'$ sous-module de type fini. Mais comme alors $\varphi'_d$ et les deux flèches verticales sont injectives, on a bien $\mathrm{Ker}\ \varphi_d = 0$, d'où l'injectivité.

LEMME 2.3. - <u>Soit $F$ un foncteur de la catégorie des R-modules à gauche dans la catégorie des groupes abéliens qui satisfassent aux conditions (i) et (ii) du lemme 2.2. Alors, pour tout R-module à gauche $M$ et pour toute famille $\{M_i\}$ de sous-modules de $M$, on a</u>

$$\bigcap F(M_i) = F(\bigcap M_i) .$$

<u>Démonstration</u>. - Notons respectivement $p_i$ et $q_i$ les projections $\prod M/M_i \rightarrow M/M_i$ et $M \rightarrow M/M_i$. Le foncteur $F$ étant exact à gauche, et le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \bigcap M_i \arrow[r] & M \arrow[r, "\prod q_i"] \arrow[d, equal] & \prod (M/M_i) \arrow[d, "p_j"] \\ & & M \arrow[r, "q_j"] & M/M_j \end{tikzcd}$$

étant commutatif avec la suite exacte à la première ligne, on obtient un second diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F(\cap M_i) & \longrightarrow & F(M) & \xrightarrow{F(\prod q_i)} & F(\prod (M/M_i)) \\ & & & & \| & & \downarrow \prod F(p_i) \\ 0 & \longrightarrow & \cap F(M_i) & \longrightarrow & F(M) & \xrightarrow{\prod F(q_i)} & \prod F(M/M_i) \end{array}$$

où chacune des lignes est une suite exacte. En effet, $q_j = p_j \circ \prod q_i$, d'où $F(q_j) = F(p_j) \circ F(\prod q_i)$, d'où

$$\prod F(q_i) = \prod (F(p_i)) \circ F(\prod q_i) \ ,$$

et $0 \longrightarrow M_i \longrightarrow M \xrightarrow{q_i} M/M_i$, d'où

$$0 \longrightarrow F(M_i) \longrightarrow F(M) \xrightarrow{F(q_i)} F(M/M_i) \ ,$$

donc $\operatorname{Ker}(F(q_i)) = F(M_i)$, ce qui donne

$$\operatorname{Ker}(\prod F(q_i)) = \cap F(M_i) \ .$$

Mais alors $\prod F(p_i) \circ F(\prod q_i) = \prod F(q_i)$, et $\prod F(p_i)$ est injective grâce à la condition (ii), donc

$$\operatorname{Ker}(\prod F(q_i)) = \operatorname{Ker}(F(\prod q_i)) \ ,$$

ce qui donne bien $F(\cap M_i) = \cap F(M_i)$.

Il est clair que les lemmes 2.2 et 2.3 prouvent (2.1).

## 3. Extensions de Ore - Première partie

Soit $R$ un anneau muni d'une dérivation $D$, et soit $S = R[t]$ l'extension de Ore correspendante. Si $\text{w.gl.dim } R = d < \infty$, nous allons tirer certaines conclusions de l l'égalité $\text{w.gl.dim } S = d + 1$.

Introduisons d'abord, pour tout $S$-module à gauche $M$, le complexe suivant de $S$-modules à gauche :

(3.1) $$0 \longrightarrow S \otimes_R M \xrightarrow{a_e(M)} S \otimes_R M \xrightarrow{b_e(M)} M \longrightarrow 0 \ ,$$

où la structure de $S$-module à gauche de $S \otimes_R M$ est définie par

$$s(s' \otimes m) = ss' \otimes m \ ,$$

$s$ et $s'$ appartenant à $S$, $m$ appartenant à $M$, et où $a_e(M)$ et $b_e(M)$ sont définies par

$$a_e(s \otimes m) = st \otimes m - s \otimes tm \ ,$$

$$b_e(s \otimes m) = sm \ .$$

Nous allons montrer qu'il s'agit en fait d'une suite exacte de $S$-modules à gauche. En effet, la surjectivité de $b_e(M)$ est évidente ; soit maintenant $u$ un élément quelconque de $\operatorname{Ker}(a_e(M))$. Notons que tout élément de $S \otimes_R M$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{i=0}^n t^i \otimes m_i$ avec $m_i$ appartenant à $M$ pour $0 \leq i \leq n$ car $S$ est libre sur $R$ de base $1, t, t^2, \ldots$. On a donc $u = \sum_{i=0} t^i \otimes m_i$,

$$(a_e(M))(u) = \sum_{i=0}^{n+1} t^i \otimes m'_i \ ,$$

avec $m'_0 = -tm_0$ , $m'_i = m_{i-1} - tm_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ , $m'_{n+1} = m_n$ ; or $(a_e(M))(u) = 0$ , donc $m'_i = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant n+1$ , donc $m_i = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$ . On a bien Ker $(a_0(M)) = 0$ ; d'où l'injectivité de $a_e(M)$ . De même, soit $u$ appartenant à Ker $(b_e(M))$ : $u = \sum_{i=0}^{n} t^i \otimes m_i$ avec $m_0 + tm_1 + \dots + t^n m_n = 0$ . IL s'agit de trouver un élément $v = \sum_{i=0}^{n-1} t^i \otimes m'_i$ tel que $a_e(M)(v) = u$ , c'est-à-dire tel que

$$- tm'_0 = m_0$$

$$m'_{i-1} - tm'_i = m_i \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

$$m'_{n-1} = m_n \; .$$

On obtient

$$\begin{aligned}
m'_{n-1} &= m_n \\
m'_{n-2} &= m_{n-1} + tm_n \\
m'_{n-3} &= m_{n-2} + tm_{n-1} + t^2 m_n \\
&\vdots \\
m'_1 &= m_2 + tm_3 + \dots + t^{n-2} m_n \\
m'_0 &= m_1 + tm_2 + \dots + t^{n-1} m_n
\end{aligned}$$

et alors

$$- tm'_0 = - tm_1 - t^2 m_2 - \dots - t^n m_n = m_0$$

d'où l'exactitude de (3.1).

Soient $N$ un S-module à droite, et $Z$ une S-résolution projective de $N$ définie par la suite exacte

$$\dots \longrightarrow Z_i \xrightarrow{h_i} Z_{i-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow Z_1 \xrightarrow{h_1} Z_0 \xrightarrow{h_0} N \longrightarrow 0 \; ,$$

où les $Z_i$ sont des S-modules à droite projectifs et les $h_i$ des S-homomorphismes. Les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
Z_i \otimes_R M & \xrightarrow{h_i \otimes 1_M} & Z_{i-1} \otimes_R M \\
\downarrow & & \downarrow \\
Z_i \otimes_R M & \xrightarrow{h_i \otimes 1_M} & Z_{i-1} \otimes_R M
\end{array} \quad , \; i \geqslant 1 \; , \text{ et } \quad
\begin{array}{ccc}
Z_0 \otimes_R M & \xrightarrow{h_0 \otimes 1_M} & N \otimes_R M \\
\downarrow & & \downarrow \\
Z_0 \otimes_R M & \xrightarrow{h_0 \otimes 1_M} & N \otimes_R M
\end{array}$$

où les flèches verticales sont données par $z \otimes m \longmapsto zt \otimes m - z \otimes tm$ , sont commutatifs, donc

$$\alpha(z \otimes m) = zt \otimes m - z \otimes tm$$

définit un endomorphisme du complexe $Z \otimes_R M$ . De plus, on vérifie facilement que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
Z \otimes_S S \otimes_R M & \xrightarrow{1 \otimes a_e(M)} & Z \otimes_S S \otimes_R M \\
\downarrow & & \downarrow \\
Z \otimes_R M & \xrightarrow{\alpha} & Z \otimes_R M
\end{array}$$

où les flèches verticales sont définies par $z \otimes s \otimes m \longmapsto zs \otimes m$ , est également commutatif. Mais comme $S$ est un $R$-module libre, une $S$-résolution projective est aussi une $R$-résolution projective donc, en passant aux groupes d'homologie, on obtient le diagramme commutatif suivant

$$(3.2)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}^S(N, S\otimes_R M) & \xrightarrow{\mathrm{Tor}^S(N,a_e(M))} & \mathrm{Tor}^S(N, S\otimes_R M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Tor}^R(N, M) & \xrightarrow{\mathrm{Tor}^R(\alpha)} & \mathrm{Tor}^R(N, M) \end{array}$$

(cf. [15], p. 127, théorème 4), et les flèches verticales sont des isomorphismes car $S$ est plat sur $R$ (cf. [6], p. 117, proposition 4.1.1).

LEMME 3.3. - Soit $R$ un anneau tel que w.gl.dim $R = d < \infty$ . Alors $V$ , le noyau de l'endomorphisme $\mathrm{Tor}_d^R(\alpha)$ , est isomorphe à $\mathrm{Tor}_{d+1}^S(N, M)$ .

Démonstration. - La longue suite exacte pour le foncteur $\mathrm{Tor}^S$ , induite par (3.1), donne

$$\dots \longrightarrow \mathrm{Tor}_{d+1}^S(N, S\otimes_R M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{d+1}^S(N, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_d^S(N, S\otimes_R M) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_d^S(N,a_e(M))} \mathrm{Tor}_d^S(N, S\otimes_R M) \longrightarrow \dots$$

Mais $\mathrm{Tor}^S(N, S\otimes_R M) \simeq \mathrm{Tor}^R(N, M)$ , d'où

$$\mathrm{Tor}_{d+1}^S(N, S\otimes_R M) \simeq \mathrm{Tor}_{d+1}^R(N, M) \quad \text{avec} \quad \text{w.gl.dim. } R = d ,$$

ce qui donne $\mathrm{Tor}_{d+1}^S(N, S\otimes_R M) = 0$ . On en déduit

$$\mathrm{Tor}_{d+1}^S(N, M) \simeq \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tor}_d^S(N, a_e(M)))$$

avec, par (3.2),

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tor}_d^S(N, a_e(M))) \simeq \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tor}_d^R(\alpha)) ,$$

d'où le résultat.

Maintenant soit $M'$ un $R$-sous-module du $S$-module $M$ . Pour $i = 0, 1, 2, \dots,$ on pose

$$K_i = \{x \text{ de } M' ;\ t^j x \in M' ,\ j = 0, 1, 2, \dots, i\} .$$

Il est clair que $K_i \supseteq K_{i+1}$ et une induction triviale sur $j$ montre que

$$(3.4)\qquad \begin{aligned} t^j r &= rt^j + jD(r)t^{j-1} + \dots + D^j(r) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^j \binom{j}{i} D^i(r)t^{j-i} \end{aligned}$$

pour tout $r$ appartenant à $R$ . Donc si $r$ est un élément quelconque de $R$ , $x$ un élément quelconque de $K_i$ ,

$$t^j(rx) = \textstyle\sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} D^\ell(r)t^{j-\ell} x \ ; \text{ pour } j \leq i ,$$

$j - \ell$ est inférieur ou égal à $i$ , donc $t^{j-\ell} x$ appartient au $R$-module $M'$ , donc $t^j(rx)$ aussi. Par conséquent, les $K_i$ sont des $R$-sous-modules de $M'$ .

Définissons $\pi_i : K_i \longrightarrow M/M'$ par $\pi_i(x) = t^{i+1} x + M'$ . On a

$$\pi_i(rx) = t^{i+1}\, rx + M' \quad \text{pour } r \text{ appartenant à } R$$
$$= rt^{i+1}\, x + \textstyle\sum_{j=1}^{i+1} \binom{i+1}{j} D^j(r) t^{i+1-j}\, x + M' \quad \text{par } (3.4)$$
$$= rt^{i+1}\, x + M' = r(t^{i+1}\, x + M') = r\pi_i(x)\ .$$

Les $\pi_i$ sont donc des R-homomorphismes, d'où la suite exacte de R-modules :

(3.5)
$$0 \longrightarrow K_{i+1} \longrightarrow K_i \xrightarrow{\pi_i} M/M'\ .$$

LEMME 3.6. - <u>Soit</u> R <u>un anneau tel que</u> $\text{w.gl.dim}\, R = d < \infty$ . <u>En identifiant</u> $\mathrm{Tor}_d^R(N, K_i)$ <u>à son image dans</u> $\mathrm{Tor}_d^R(N, M)$ <u>par le lemme</u> 2.2 (i), <u>on a, pour tout</u> v <u>appartenant à</u> $V \cap \mathrm{Tor}_d^R(N, K_i)$

$$\mathrm{Tor}_d^R(N, \pi_i)(v) = 0\ .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit Z une S-résolution projective de N , définie par la suite exacte

$$\cdots \longrightarrow Z_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} Z_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow Z_0 \xrightarrow{\delta_0} N \longrightarrow 0\ .$$

On a

$$\mathrm{Tor}_d^R(N, M) \simeq H_d(Z \otimes_R M) = \mathrm{Ker}\,(\delta_d \otimes 1_M)/\mathrm{Im}\,(\delta_{d+1} \otimes 1_M)\ .$$

Soit f un cocycle représentant la classe de cohomologie de v . Toujours par le lemme 2.2 (i), on peut supposer

$$f = \textstyle\sum z_h \otimes k_h \quad \text{avec} \quad z_h \in Z_d\ , \quad k_h \in K_i\ .$$

Puisque v est dans V , la classe de cohomologie de $\alpha(f)$ est nulle, donc on peut trouver un élément w de $Z_{d+1} \otimes_R M$ tel que

$$\alpha(f) = \textstyle\sum z_h\, t \otimes k_h - \sum z_h \otimes tk_h$$
$$= (\delta_{d+1} \otimes 1_M)(w)\ .$$

Une induction triviale sur n montre que

$$\alpha^n(z \otimes k) = zt^n \otimes k - nzt^{n-1} \otimes tk + \binom{n}{2} zt^{n-2} \otimes t^2\, k \ldots \pm z \otimes t^n\, k$$
$$= \textstyle\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} zt^{n-i} \otimes t^i\, k\ .$$

Donc

$$\alpha^{i+1}(f) = \alpha^{i+1}(\textstyle\sum_h z_h \otimes k_h) = \sum_h \alpha^{i+1}(z_h \otimes k_h)$$
$$= \textstyle\sum_h \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j \binom{i+1}{j} z_h\, t^{i+1-j} \otimes t^j\, k_h$$

avec $t^j\, k_h$ dans M' pour $0 \leq j \leq i$ , d'où, modulo $Z \otimes M'$ , on a

$$\textstyle\sum_h z_h \otimes t^{i+1}\, k_h \equiv \pm\, \alpha^{i+1}(f) = \pm\, \alpha^i(\delta_{d+1} \otimes 1)(w)$$
$$= \pm\, (\delta_{d+1} \otimes 1)(\alpha^i(w))$$

car $\alpha$ est un endomorphisme du complexe $Z \otimes_R M$ . Mais $\mathrm{Tor}_d^R(N, \pi_i)(v)$ est représenté dans $Z \otimes_R M/M'$ par $\sum_h z_h \otimes t^{i+1}\, k_h + M'$ , donc est bien un cobord dans $Z \otimes M/M'$ , ce qui prouve le lemme.

Pour tout R-sous-module $M'$ de $M$, soit $K(M') = K = \bigcap K_i$, le plus grand S-sous-module de $M$ contenu dans $M'$.

LEMME 3.7. - Si $R$ est noethérien à droite avec $\text{w.gl.dim}\, R = d < \infty$, et si $M'$ est un sous-module de $M$ tel que $\text{w.}\dim_R K < d$, alors $V \cap \operatorname{Tor}_d^R(N, M') = 0$.

Démonstration. - Par (2.1) on a $\operatorname{Tor}_d^R(N, K) = \bigcap \operatorname{Tor}_d^R(N, K_i)$ avec $\text{w.}\dim_R K < d$, donc $\bigcap \operatorname{Tor}_d^R(N, K_i) = 0$. Ainsi, en utilisant l'identification du lemme 2.2 (i), la famille des $\operatorname{Tor}_d^R(N, K_i)$ forme une chaîne descendante de sous-groupes de $\operatorname{Tor}_d^R(N, M')$ dont l'intersection est nulle. D'où, si $v$ est un élément non nul de $V \cap \operatorname{Tor}_d^R(N, M')$, il existe un entier $i$ tel que $v$ soit dans $\operatorname{Tor}_d^R(N, K_i)$ et non dans $\operatorname{Tor}_d^R(N, K_{i+1})$. Mais, par (3.5) et le lemme 2.2 (i), la suite

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}_d^R(N, K_{i+1}) \longrightarrow \operatorname{Tor}_d^R(N, K_i) \xrightarrow{\operatorname{Tor}_d^R(N,\pi_i)} \operatorname{Tor}_d^R(N, M/M')$$

est exacte (cf. [6], p. 25, proposition 4.3 (a)). Donc $\operatorname{Tor}_d^R(N, \pi_i)(v) \neq 0$, ce qui en contradiction avec le lemme 3.6 : on a bien

$$V \cap \operatorname{Tor}_d^R(N, M') = 0 .$$

THÉORÈME 3.8. - Soit $R$ un anneau noethérien à droite et à gauche avec $\text{gl.}\dim R = \text{w.gl.dim}\, R = d < \infty$, et soit $S = R[t]$ l'extension de Ore de $R$ associée à une dérivation $D$. Si $M$ est un S-module à gauche tel que $\text{w.}\dim_S M = d+1$ alors $M$ contient un S-sous-module $M_0$ de type fini sur $R$, et

$$\dim_R M = \text{w.}\dim_R M_0 = d .$$

Démonstration. - On rappelle que si $R$ est un anneau noethérien à gauche et à droite, alors

$$\text{w.gl.dim}\, R = \text{r.gl.dim}\, R = \text{l.gl.dim}\, R$$

(cf. [15], p. 153, théorème 20), et pour tout R-module à gauche $A$ de type fini sur $R$, on a

$$\text{w.}\dim_R A = \text{l.}\dim_R A$$

(cf. [15], p. 153, théorème 19).

Puisque $\text{w.}\dim_S M = d+1$, il existe un S-module à droite $N$ tel que

$$\operatorname{Tor}_{d+1}^S(N, M) \neq 0 .$$

Soit $M'$ un R-sous-module de $M$ de type fini sur $R$. Comme $R$ est noethérien à gauche, $K(M') = K$, R-sous-module de $M'$, est également de type fini. Si le théorème était faux, on aurait donc $\text{w.}\dim_R K(M') < d$, et le lemme 3.7 donnerait

$$V \cap \operatorname{Tor}_d^R(N, M') = 0$$

pour tous les R-sous-modules $M'$ de $M$, de type fini sur $R$. Or on remarque que $M$ est la limite directe de ses sous-modules de type fini, et comme le foncteur

$\mathrm{Tor}^R$ commute avec les limites directes (cf. [6], p. 107, proposition 1.3), l'identification du lemme 2.2 (i) nous permet d'écrire

$$\mathrm{Tor}_d^R (N , M) = \bigcup \mathrm{Tor}_d^R (N , M') ,$$

où $M'$ parcourt tous les R-sous-modules de type fini de $M$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} V &= V \cap \mathrm{Tor}_d^R (N , M) \\ &= V \cap \textstyle\bigcup_{M'} \mathrm{Tor}_d^R (N , M') \\ &= \bigcup (V \cap \mathrm{Tor}_d^R (N , M')) = 0 \end{aligned}$$

ce qui contredit le lemme 3.3 puisque $\mathrm{Tor}_{d+1}^S (N , M)$ est non nul, d'où le théorème.

## 4. Le cas commutatif.

Si $R$ est commutatif, nous allons déduire une partie du théorème 22 de [11] à partir du théorème 3.8.

LEMME 4.1. - Soient $R$ un anneau commutatif noethérien tel que $\mathrm{gl.\,dim}\, R = d < \infty$, $\mathfrak{M}$ l'ensemble des idéaux maximaux de $R$ , et $M$ un $R$-module à gauche de type fini tel que $\dim_R M = d$ . Alors il existe un élément $m_0$ de $\mathfrak{M}$ tel que $\dim_R R/m_0 = d$ , et un élément non nul de $M$ , $x$ , avec $m_0 x = 0$ .

Démonstration. - Comme $M$ est de type fini sur $R$ noethérien, on a

$$d = \dim_R M = \sup_{m\in \mathfrak{M}} \dim_{R_m} M_m$$

(cf. [15], p. 188, théorème 11). Donc il existe un élément $m_0$ de $\mathfrak{M}$ tel que $d = \dim_{R_{m_0}} M_{m_0}$ . Et, toujours parce que $R$ est commutatif noethérien, on a aussi

$$d = \mathrm{gl.\,dim}\, R = \sup_{m\in \mathfrak{M}} \mathrm{gl.\,dim}\, R_m \quad \text{et} \quad \mathrm{gl.\,dim}\, R_m = \dim_R R/m$$

(cf. [15], p. 195, théorème 19). Donc $\mathrm{gl.\,dim}\, R_{m_0} \leq d$ avec $\dim_{R_{m_0}} M_{m_0} = d$ ce qui donne $\dim_R R/m_0 = \mathrm{gl.\,dim}\, R_{m_0} = \dim_{R_{m_0}} M_{m_0} = d$ . Si on remarque encore que $R_{m_0}$ est local d'idéal maximal $R_m \cdot m_0$ (cf. [15], p. 187, proposition 2), on sait alors qu'il existe un élément non nul $x/s$ de $M_{m_0}$ dont l'annulateur soit $R_{m_0} \cdot m_0$ (cf. [1], p. 396, proposition 2.2, et p. 392, lemme 1.1 (b)). L'anneau $R$ étant noethérien, $m_0$ a un nombre fini de générateurs : $h_1 , \dots , h_n$ . Il existe donc des éléments $s_1 , \dots , s_n$ de $R - m_0$ tels que $s_i h_i x = 0$ . Maintenant $R - m_0$ est un ensemble multiplicatif fermé, car $m_0$ est maximal donc premier, d'où $s_1 \dots s_n \in R - m_0$ et, en particulier, est non nul. Il est évident que $m_0(s_1 \dots s_n x) = 0$ , et l'élément $s_1 \dots s_n x$ est non nul dans $M$ sinon $x/s$ serait nul dans $M_{m_0}$ , d'où le lemme.

Notons que si $R$ est noethérien à droite (à gauche), $S$ , extension de Ore est associée à une dérivation $D$ de $R$ , l'est aussi (cf. [7], p. 352, proposition 7.27)

THÉORÈME 4.2. - Soit $R$ un anneau commutatif noethérien avec $\mathrm{gl.\,dim}\, R = d < \infty$ , et soit $S = R[t]$ , l'extension de Ore de $R$ associée à une dérivation $D$ . Si on a gl. dim $S = d + 1$ , alors il existe un idéal maximal $m_0$ de $R$ tel que

$$\dim_R R/m_0 = d ,$$

et soit $D(m_0) \subset m_0$ , soit il existe un premier rationnel dans $m_0$ .

Démonstration. - Par le théorème 3.8, nous savons qu'il existe un $S$-module à gauche $M$ , de type fini en tant que $R$-module, avec $w. \dim_R M = \dim_R M = d$ . Soit $m_0$ l'idéal maximal de $R$ satisfaisant aux conditions du lemme 4.1, et $x$ un élément non nul de $M$ avec $\mathrm{Ann}_R(x) = m_0$ . Introduisons également

$$M' = \{y \in M \ ; \ \mathrm{Ann}_R(y) \supset m_0^{n(y)}\} .$$

On a $M'$ $R$-sous-module de $M$ car, si $y$ , $y'$ sont deux éléments de $M'$ ,

$$m_0^{\max\{n(y),n(y')\}}(y + y') = 0$$

donc $m_0^{\max\{n(y),n(y')\}} \subset \mathrm{Ann}_R(y + y')$ et $y + y' \in M'$ . De même, si $r$ appartient à $R$ ,

$$m_0^{r(y)} \subset \mathrm{Ann}_R(y) \subset \mathrm{Ann}_R(ry) ,$$

d'où $ry \in M'$ . De plus, $x$ appartient à $M'$ avec $r(x) = 1$ donc $M'$ est non nul. Mieux encore, pour $y \in M$ , si $r_1 y = r_2 y = 0$ , alors

$$(r_1 r_2)t = r_1(r_2 t) = r_1(tr_2 - D(r_2))$$

et

$$(r_1 r_2)ty = (r_1 t)r_2 y - r_1 D(r_2)y = 0 ,$$

d'où $\mathrm{Ann}_R(ty) \supset (\mathrm{Ann}_R(y))^2$ d'où $M'$ est également un $S$-module.

Le module $M'$ est un $R$-sous-module de $M$ avec $R$ noethérien et $M$ de type fini, donc $M'$ est aussi de type fini sur $R$ . Soient $m_1$ , ... , $m_s$ des générateurs de $M'$ , $n = \max \{n(m_1) , \ldots , n(m_s)\}$ , et $r_1$ , ... , $r_s$ des éléments quelconques de $R$ . Alors

$$m_0^{(n)} \subset \textstyle\bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Ann}_R(m_i) \subset \bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Ann}_R(r_i m_i) \subset \mathrm{Ann}_R(\sum_{i=1}^{s} r_i m_i) .$$

donc il existe un entier $n$ tel que $m_0^{(n)} \subset \mathrm{Ann}_R(M')$ avec $m_0$ maximal. Ainsi l'idéal $\mathrm{Ann}_R(M')$ est primaire, de radical $m_0$ (cf. [17], p. 153, corollaire 1). Comme $M'$ est un $S$-module, si $r$ est dans $\mathrm{Ann}_R(M')$

$$(tr - rt)(m') = (D(r))m' = trm' - rtm' = 0 \ \text{pour tout } m' \text{ de } M' ,$$

donc

$$D(\mathrm{Ann}_R(M')) \subset \mathrm{Ann}_R(M') .$$

L'idéal $m_0$ étant le radical de $\mathrm{Ann}_R(M')$ , pour tout $r$ de $m_0$ , il existe un nombre entier $\ell$ tel que $r^\ell$ est dans $\mathrm{Ann}_R(M')$ , et $r^{\ell-1}$ n'est pas dans $\mathrm{Ann}_R(M')$ . Alors $D(r^\ell) = [\ell D(r)]r^{\ell-1}$ est dans $\mathrm{Ann}_R(M')$ , et comme $\mathrm{Ann}_R(M')$ est primaire, on obtient que $\ell D(r)$ est dans l'idéal premier $m_0$ . En particulier, si $m_0$ ne contient aucun premier rationnel, $D(r)$ appartient à $m_0$ pour tout $r$ de $m_0$ , d'où le théorème.

Le théorème 22 de [11] est le suivant : soit $R$ un anneau commutatif noethérien muni d'une dérivation $D$ avec $gl.\dim R = n < \infty$. Soit $\mathfrak{M}$ la famille de tous les idéaux maximaux $m$ de $R$ tels que $D(m) \subset m$ ou tels que la caractéristique de $R/m$ soit non nulle, et soit

$$k = \sup \{rg(m) \ , \ m \in \mathfrak{M}\}$$

(si $\mathfrak{M}$ est vide, on pose $k = -\infty$). Alors si $S$ est l'extension de Ore de $R$ associée à $D$,

$$gl.\dim S = \max \{n \ , \ k+1\} \ .$$

Notons d'abord que, pour tout idéal maximal $m$ de $R$,

$$rg(m) = gl.\dim R_m = \dim_R (R/m) \leqslant n$$

(cf. [11], p. 71, proposition 9), donc $k \leqslant n$. Mais alors le théorème 4.2 montre que si $gl.\dim S = n+1$, alors $k = n$, donc on a bien

$$gl.\dim S = \max \{n \ , \ k+1\} \ .$$

Le théorème 1.1 de [2] est également une conséquence immédiate de ce dernier résultat. En effet, ce théorème dit que si $R$ est un anneau de Dedekind contenant $\mathbb{Q}$, et $D$ une dérivation de $R$ telle que, pour tout idéal maximal $m$ de $R$, on a $D(m) \not\subset m$, alors $gl.\dim S = 1$, où $S$ est l'extension de Ore de $R$ associée à $D$.

Ecartons d'abord les cas $gl.\dim R = 0$ ou $gl.\dim S = 0$. En effet, soit $A$ un anneau noethérien tel que $gl.\dim A = 0$, alors $A$ est semi-simple (cf. [6], p. 111 corollaire 2.7) donc $A$ est artinien (cf. [5], p. 21, exemple 1, p. 27, corollaire, et p. 49, théorème 2), et si $A$ est aussi intègre, alors $A$ est un corps. Donc si $gl.\dim R = 0$, $R$ est un corps. On suppose donc $gl.\dim R \geqslant 1$, mais alors $S$ n'est pas un corps, donc $gl.\dim S \geqslant 1$. Or $R$ étant anneau de Dedekind, on a $gl.\dim R = 1$ (cf. [6], p. 134, et p. 112, proposition 2.8), d'où $1 \leqslant gl.\dim S \leqslant 2$. De plus, si on avait $gl.\dim S = 2 = 1 + gl.\dim R$, par le théorème 4.2, il existerait un idéal maximal $m_0$ de $R$ tel que $D(m_0) \subset m_0$ ou tel que $m_0$ contienne un premier rationnel, ce qui est en contradiction avec les hypothèses $D(m_0) \not\subset m_0$ et $\mathbb{Q} \subset R$, d'où $gl.\dim S = 1$.

## 5. Extensions de Ore - Deuxième partie.

Soit $R$ un anneau muni d'une dérivation $D$, et soit $S = R[t \ , \ D]$, l'extension de Ore de $R$ associée à $D$. Soit $M$ un $S$-module à gauche (à droite), on a toujours la suite exacte de $S$-modules à gauche

$$(5.1) \qquad 0 \longrightarrow S \otimes_R M \xrightarrow{a_e(M)} S \otimes_R M \xrightarrow{b_e(M)} M \longrightarrow 0 \quad (\text{cf. } (3.1)) \ .$$

Les applications correspondantes pour les $S$-modules à droite seront notées $a_r$ et $b_r$.

LEMME 5.2. - <u>Soit</u> $M$ <u>un</u> $S$-<u>module à gauche. On définit une action à droite de</u> $S$

<u>sur</u> $M^* = \mathrm{Hom}_R(M , R)$ <u>par</u>

$$(ft)(m) = f(tm) - D(f(m))$$
$$(fr)(m) = f(m)r$$

<u>pour $f$ appartenant à $M^*$ , $m$ appartenant à $M$ . Cette action donne à $M^*$ une structure de $S$-module à droite. De plus, si $F = F(M)$ est l'endomorphisme du groupe abélien $\mathrm{Hom}_R(M , S)$ , défini par $F(g)(m) = tg(m) - g(tm)$ , alors le diagramme</u>

(5.3)
$$\begin{array}{ccc} M^* \otimes_R S & \xrightarrow{a_r(M^*)} & M^* \otimes_R S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_R(M , S) & \xrightarrow{F(M)} & \mathrm{Hom}_R(M , S) \end{array}$$

<u>où les flèches verticales sont données par</u>

$$f \otimes s \longmapsto \{m \longmapsto f(m)s\}$$

<u>est commutatif.</u>

<u>Démonstration</u>. - En effet, pour obtenir la première partie du lemme, il suffit de vérifier que $f(tr) = f(rt) + fD(r)$ . Or, pour $m$ appartenant à $M$ , on a

$$f(tr)(m) = (ft)r(m) = ft(m)r = f(tm)r - D(f(m))r$$

et

$$\begin{aligned} f(rt)(m) = (fr)t(m) &= fr(tm) - D(fr(m)) \\ &= f(tm)r - D(f(m)r) \\ &= f(tm)r - D(f(m))r - f(m)D(r) \\ &= f(tm)r - D(f(m))r - fD(r)(m) \ , \end{aligned}$$

d'où la structure de $S$-module à droite pour $M^*$ . Et, si $f \otimes s$ est un élément quelconque de $M^* \otimes_R S$ , on a

$$f \otimes s \longmapsto \{m \longmapsto f(m)s\} \xmapsto{F(M)} \{m \longmapsto tf(m)s - f(tm)s\}$$

et

$$\begin{aligned} f \otimes s &\xmapsto{a_r(M^*)} f \otimes ts - ft \otimes s \\ &\longmapsto \{m \longmapsto f(m)ts - ft(m)s \\ &\qquad = tf(m)s - D(f(m))s - f(tm)s + D(f(m))s \\ &\qquad = tf(m)s - f(tm)s\} \end{aligned}$$

d'où la commutativité du diagramme (5.3).

PROPOSITION 5.4. - <u>Soient $R$ un anneau noethérien à gauche, et $M$ un $S$-module à gauche, de type fini sur $R$ . Alors, pour tout $i > 1$ ,</u>

$$\mathrm{Ext}^i_S(M , S) \simeq \mathrm{Ext}^{i-1}_R(M , R) \ .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit $X = \dots \xrightarrow{\delta_2} X_1 \xrightarrow{\delta_1} X_0 \xrightarrow{\delta_0} M \longrightarrow 0$ une $S$-résolution projective de $M$ ; on considère les deux complexes $X^* \otimes_R S$ et $\mathrm{Hom}_R(X , S)$ . Les différentielles de $X$ étant des homomorphismes de $S$-modules à gauche, $a_r(X^*)$ et $F(X)$ sont des applications de complexes. La commutativité de (5.3) induit alors un diagramme commutatif de complexes auquel on applique le foncteur homologique $H$

pour obtenir le diagramme commutatif de groupes d'homologie :

$$(5.5)\qquad \begin{array}{ccc} H(X^* \otimes_R S) & \xrightarrow{H(a_r(X^*))} & H(X^* \otimes_R S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(\mathrm{Hom}_R(X\ ,\ S) & \xrightarrow{H(F(X))} & H(\mathrm{Hom}_R(X\ ,\ S)) \end{array}$$

Or $S$ étant libre sur $R$, le foncteur $T(A) = A \otimes_R S$ de $R$-modules à droite est exact et covariant, d'où l'isomorphisme

$$H(X^* \otimes_R S) \simeq H(X^*) \otimes_R S \quad \text{(cf. [15], p. 93, théorème 1).}$$

De plus, $X$ est aussi une résolution projective de $M$ en tant que $R$-module à gauche, donc

$$H(X^*) \simeq \mathrm{Ext}_R(M\ ,\ R) \quad \text{(cf. [15], p. 133, théorème 9).}$$

Mieux encore, les différentielles $\delta_i^* : f \longrightarrow f \circ \delta_i$ de $X^*$ sont des homomorphismes de $S$-modules à droite pour la structure de $S$-module à droite de $X^*$ donnée par le lemme 5.2. En effet,

$$\delta_i^*(ft) = ft \circ \delta_i = (f\delta_i)t = \delta_i^*(f)t\ ,$$
$$\delta_i^*(fr) = fr \circ \delta_i = (f\delta_i)r = \delta_i^*(f)r\ .$$

Par conséquent, $\mathrm{Ext}_R(M\ ,\ R)$ possède également une structure de $\delta$-module à droite, et on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H(X^* \otimes_R S) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}_R(M\ ,\ R) \otimes_R S \\ {\scriptstyle H(a_r(X^*))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a_r(\mathrm{Ext}_R(M,R))} \\ H(X^* \otimes_R S) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}_R(M\ ,\ R) \otimes_R S \end{array}$$

Le $R$-module $S$ étant plat, on obtient

$$H(\mathrm{Hom}_R(X\ ,\ S) \simeq H(\mathrm{Hom}_S(S \otimes_R X\ ,\ S)) \simeq \mathrm{Ext}_S(S \otimes_R M\ ,\ S)$$

car $X$ étant une $R$-résolution projective de $M$, $S \otimes_R X$ est une $S$-résolution projective de $S \otimes_R M$ (cf. [6], p. 118, proposition 4.1.3, et [15], p. 133, théorème 9). Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H(\mathrm{Hom}_R(X\ ,\ S)) & \longrightarrow & H(\mathrm{Hom}_S(S \otimes_R X\ ,\ S) \\ {\scriptstyle H(F(X))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H(\mathrm{Hom}(a_e(X),S))} \\ H(\mathrm{Hom}_R(X\ ,\ S)) & \longrightarrow & H(\mathrm{Hom}_S(S \otimes_R X\ ,\ S) \end{array}$$

est commutatif car, si $A$ est un $S$-module à gauche quelconque, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(A\ ,\ S) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R A\ ,\ S) \\ {\scriptstyle F(A)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(a_e(A),S)} \\ \mathrm{Hom}_R(A\ ,\ S) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R A\ ,\ S) \end{array}$$

est bien commutatif.

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A\ ,\ S) \longmapsto \{\psi\ :\ s \otimes a \longmapsto s\varphi(a)\}$$
$$\xmapsto{\mathrm{Hom}(a_e(A),S)} \{\psi \circ a_e(A)\ :\ s \otimes a \xmapsto{a_e(A)} st \otimes a - s \otimes ta \xmapsto{\psi} st\varphi(a) - s\varphi(ta)\}$$

et

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A\ ,\ S) \xmapsto{F(A)} t\varphi(a) - \varphi(ta)$$
$$\longmapsto \{s \otimes a \longmapsto s(t\varphi(a) - \varphi(ta))\}\ .$$

Par conséquent, l'isomorphisme $H(\mathrm{Hom}_R(X\ ,\ S) \simeq \mathrm{Ext}_S(S \otimes_R M\ ,\ S)$ transforme $H(F(X))$ en $\mathrm{Ext}(a_e(M)\ ,\ S)$ . On obtient, en groupant les résultats ci-dessus,

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}_R(M\ ,\ R) \otimes_R S & \xrightarrow{a_r(\mathrm{Ext}_R(M,R))} & \mathrm{Ext}_R(M\ ,\ R) \otimes_R S \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
H(X^* \otimes_R S) & \xrightarrow{H(a_r(X^*))} & H(X^* \otimes_R S) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H(\mathrm{Hom}_R(X\ ,\ S)) & \xrightarrow{H(F(X))} & H(\mathrm{Hom}_R(X\ ,\ S)) \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
\mathrm{Ext}_S(S \otimes_R M\ ,\ S) & \xrightarrow{\mathrm{Ext}(a_e(M),S)} & \mathrm{Ext}_S(S \otimes_R M\ ,\ S)
\end{array}$$

d'où on tire le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}_R(M\ ,\ R) \otimes_R S & \xrightarrow{a_r(\mathrm{Ext}_R(M,R))} & \mathrm{Ext}_R(M\ ,\ R) \otimes_R S \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Ext}_S(S \otimes_R M\ ,\ S) & \xrightarrow{\mathrm{Ext}(a_e,S)} & \mathrm{Ext}_S(S \otimes_R M\ ,\ S)\ .
\end{array}$$

Mais on remarque que pour déterminer l'application

$$\mathrm{Hom}_R(X\ ,\ R) \otimes_R S \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X\ ,\ S)\ ,$$

on peut remplacer $X$ par une R-résolution projective $Y$ de $M$ . Or, $R$ étant noethérien à gauche et $M$ de type fini sur $R$ , on peut choisir $Y$ constitué de R-modules libres de type fini (cf. [15], p. 146, proposition 8). Mais si $W$ est un R-module à gauche libre de type fini, l'application

$$\mathrm{Hom}_R(W\ ,\ R) \otimes_R S \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(W\ ,\ S)\ ,$$

donnée par $(f \otimes s)(w) = f(w)s$ est un isomorphisme car c'est certainement vrai pour $W = R$ , et si $W = R^{(n)}$ , la distributivité de Hom et du produit tensoriel sur les sommes directes finies donnent le résultat. Les flèches verticales de (5.6) sont donc des $\underset{\sim}{Z}$-isomorphismes.

Considérons maintenant l'analogue à droite de la suite exacte (5.1). Les applications $a_r(\mathrm{Ext}_R(M\ ,\ R))$ étant injectives, par (5.6), les applications $\mathrm{Ext}(a_1\ ,\ S)$ également, d'où la longue suite exacte pour Ext , provenant de (5.1), se décompose en une série de suites exactes de la forme :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_S(S \otimes_R M\ ,\ S) \xrightarrow{\mathrm{Ext}(a_e,S)} \mathrm{Ext}^i_S(S \otimes_R M\ ,\ S) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_S(M\ ,\ S) \longrightarrow 0\ .$$

De même, toujours par (5.1), on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_R(M\ ,\ R) \otimes_R S \xrightarrow{a_r(\mathrm{Ext}^i_r(M,R))} \mathrm{Ext}^i_R(M\ ,\ R) \otimes_R S \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_R(M\ ,\ R) \longrightarrow 0\ .$$

On obtient donc

$$\mathrm{CoKer}(\mathrm{Ext}(a_e\ ,\ S)) \simeq \mathrm{Ext}^{i+1}_S(M\ ,\ S)$$

et

$$\mathrm{CoKer}(a_r(\mathrm{Ext}^i_R(M\ ,\ R) \simeq \mathrm{Ext}^i_R(M\ ,\ R)\ .$$

Mais les flèches verticales du diagramme commutatif (5.6) étant des isomorphismes, les deux conoyaux sont isomorphes, d'où la proposition.

COROLLAIRE 5.7. - Soit $M$ un S-module à gauche.

(a) On a $w.\ \dim_R M \leqslant w.\ \dim_S M \leqslant w.\ \dim_R M + 1$ , d'où

$$w.gl.\dim S \leqslant w.gl.\dim R + 1\ .$$

(b) Si $M \neq 0$ est de type fini sur $R$ noethérien à gauche avec $l.\ \dim_R M$ finie alors $l.\ \dim_S M = l.\ \dim_R M + 1$ .

Démonstration. - La première inégalité résulte du fait que $S$ étant libre, donc plat sur $R$ , toute S-résolution plate de $M$ est aussi une R-résolution plate. La deuxième inégalité est évidente si $w.\ \dim_R M$ est infinie. On suppose donc $w.\ \dim_R M = n < \infty$ . Soit alors $N$ un S-module à droite quelconque, on a

$$\mathrm{Tor}^R_m(N\ ,\ M) = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqslant n + 1 \quad (\text{cf. [15], p. 149, lemme 3}).$$

Mais toujours parce que $S$ est plat sur $R$ , on a également

$$\mathrm{Tor}^R_m(N\ ,\ M) \simeq \mathrm{Tor}^S_m(N\ ,\ S \otimes_R M) = 0$$

pour tout $m \geqslant n + 1$ et pour tout S-module à droite $N$ . Or, la longue suite exacte pour le foncteur Tor , provenant de (5.1), donne

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}^S_{n+2}(N\ ,\ S \otimes_R M) \longrightarrow \mathrm{Tor}^S_{n+2}(N\ ,\ M) \longrightarrow \mathrm{Tor}^S_{n+1}(N\ ,\ S \otimes_R M) \longrightarrow \cdots$$

Par conséquent, $\mathrm{Tor}^S_{n+2}(N\ ,\ M) = 0$ pour tout S-module à droite $N$ , c'est-à-dire $w.\ \dim_S M \leqslant n + 1$ .

Pour prouver (b), nous allons d'abord montrer que si $l.\ \dim_R M = i$ , alors $\mathrm{Ext}^i_R(M\ ,\ R) \neq 0$ . En effet, $R$ étant noethérien à gauche et $M$ de type fini sur $R$ , il existe un R-module à gauche $B$ de type fini tel que $\mathrm{Ext}^i_R(M\ ,\ B) \neq 0$ (cf. [15], p. 147, proposition 9). On construit alors une suite exacte de R-modules à gauche $0 \longrightarrow A \longrightarrow F \longrightarrow B \longrightarrow 0$ avec $F$ libre sur $R$ de base finie. Cette suite induit pour le foncteur Ext la suite

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_R(M\ ,\ F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_R(M\ ,\ B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_R(M\ ,\ A) \longrightarrow \cdots$$

avec $\mathrm{Ext}^{i+1}_R(M\ ,\ A) = 0$ . On a donc aussi

$$\mathrm{Ext}^i_R(M\ ,\ F) \neq 0 \quad \text{et} \quad F \simeq R^{(n)}\ .$$

Comme le foncteur Ext commute avec la somme directe finie (cf. [6], p. 107, proposition 1.2) on obtient $\mathrm{Ext}^i_R(M , R) \neq 0$ . Mais alors la proposition 5.4 nous donne $\mathrm{Ext}^{i+1}_S(M , S) \neq 0$ , donc $\mathrm{l.\,dim}_S\, M \geqslant i + 1$ et, par (a),

$$\mathrm{w.\,dim}_S\, M = \mathrm{l.\,dim}_S\, M \leqslant i + 1 ,$$

d'où le corollaire.

Remarques. - La première partie de ce corollaire a aussi été prouveé par FIELDS (cf. [8]) en utilisant les mêmes méthodes. La deuxième partie a été démontrée, de manière tout à fait différente, dans le cas $R$ semi-premier et noethérien à droite, par GOODEARL (cf. [11]), p. 68, théorème 7). De nombreux résultats peuvent être déduits immédiatement de cette deuxième partie. Par exemple, la proposition 1 et le théorème 2 de [12], le lemme 6, le théorème 8 et le corollaire 9 de [10]. En effet, la proposition 1 de [12] dit que si $R$ est un anneau local, commutatif, noethérien, d'idéal maximal $m$ , et $D$ une dérivation telle que $D(R) \subset m$ , alors l'extension de Ore, associée à $R$ et $D$ , $S$ , est telle que $\mathrm{l.gl.dim}\, S = \mathrm{l.gl.dim}\, R + 1$ quand $\mathrm{l.gl.dim}\, R < \infty$ . Mais considérons le $R$-module à gauche $R/m$ . Puisque $D(R) \subset m$ , on peut munir $R/m$ d'une structure de $S$-module à gauche en posant $t(r + m) = 0$ . L'anneau $R$ étant local, $\mathrm{l.gl.dim}\, R = \mathrm{l.\,dim}_R\, R/m$ (cf. [15], p. 194, théorème 16). Enfin, $R/m$ est un $R$-module cyclique engendré par la classe de $1$ , donc de type fini sur $R$ . On applique le corollaire 5.7 (b) à $R/m$ pour obtenir $\mathrm{l.gl.dim}\, S \geqslant \mathrm{l.\,dim}_S\, R/m = \mathrm{l.gl.dim}\, R + 1$ , d'où la proposition.

De même, pour le théorème 2, si $R$ est un anneau commutatif noethérien, $D$ une dérivation de $R$ telle que soit $D(R) \subset$ radical de $R$ , soit $D(R)$ engendre un idéal propre de $R$ , et Krull dim $R_m$ est la même pour tous les idéaux maximaux $m$ de $R$ , alors $\mathrm{l.gl.dim}\, R < \infty$ donne

$$\mathrm{l.gl.dim}\, S = 1 + \mathrm{l.gl.dim}\, R .$$

En effet, on a $\mathrm{l.gl.dim}\, R = \sup_m \mathrm{l.gl.dim}\, R_m$ , où $m$ parcourt les idéaux maximaux de $R$ , et $\mathrm{gl.\,dim}\, R_m = \dim_R R/m$ (cf. [15], p. 195, théorème 19). Si nous nous trouvons dans la première hypothèse, il existe un idéal maximal $m_0$ tel que $\dim_R R/m_0 = \mathrm{gl.\,dim}\, R$ et on a $D(R) \subset m_0$ , donc les mêmes arguments que précédemment nous donnent le résultat. Dans la deuxième, il existe $m_0$ maximal tel que $D(R) \subset m_0$ et on a

$$\mathrm{l.gl.dim}\, R = \sup_m \mathrm{gl.\,dim}\, R_m$$

avec $\mathrm{gl.dim}\, R_m = \mathrm{Krull\ dim}\, R_m$ (cf. [11], p. 71, proposition 9), donc en particulier

$$\mathrm{gl.\,dim}\, R_{m_0} = \dim_R R/m_0 = \mathrm{gl.\,dim}\, R ,$$

d'où le résultat.

Le lemme 6, le théorème 8 et le corollaire 9 de [10] expriment respectivement que, si $R$ est un anneau différentiel commutatif noethérien de dimension globale $n$ finie avec $R$ local d'idéal maximal $M$ différentiel, $\mathrm{r.gl.dim}\, S = n + 1$ ; si $R$ est un anneau différentiel commutatif noethérien avec $\mathrm{gl.\,dim}\, R = n < \infty$ , et si $R$ possède un idéal différentiel premier $P$ tel que $\dim_R(R/P) = n$ , alors

$$\text{r.gl.dim } S = n + 1 .$$

Enfin, si $R$ est un anneau différentiel commutatif noethérien avec $\text{gl.dim } R = n < \infty$ et $R$ de caractéristique $p$ premier, si encore $R$ a un idéal premier $Q$ tel que $\delta^p(Q) \subseteq Q$ et $\dim_R(R/Q) = n$ , alors $\text{r.gl.dim } S = n + 1$ . En effet, pour démontrer les deux premiers résultats, notons que $R/M$ (ou $R/P$)) peut encore être muni d'une structure de $S$-module en posant

$$f \in \text{Hom}_Z(R/M , R/M) \quad f(r + M) = D(r) + M ;$$

alors

$$f(r(r' + M)) - rf(r' + M) = D(r).(r' + M)$$

et on utilise la remarque (2.3) de [12] (p. 67). Le troisième résultat découle facilement du théorème 8 (cf. [10], p. 320).

On peut aussi démontrer entièrement le théorème 22 de [11] déjà étudié dans la section 4 : on a déjà montré que si $\text{gl. dim } S = n + 1$ , on a bien

$$\text{gl. dim } S = \max \{k , n + 1\} .$$

Et si $\text{gl. dim } S < n + 1$ , alors $\text{gl. dim } S \geqslant \text{gl. dim } R = n$ (cf. [10], p. 316, proposition 3), donc $\text{gl. dim } S = n$ . On veut donc montrer $k < n$ . Or si $k = n$ , il doit exister un idéal maximal de $R$ , $m$ , tel que $\dim_R(R/m) = n$ avec $D(m) \subset m$ ou $A|m$ de caractéristique non nulle. La deuxième hypothèse est écartée par la proposition 10 de [11] (p. 72), et la première par le corollaire 5.7 (b) puisqu'alors $R/m$ est aussi un $S$-module de type fini sur $R$ , donc $\dim_S(R/m) = n + 1$ , ce qui contredit $\text{gl. dim } S = n$ .

COROLLAIRE 5.8. - <u>Soient</u> $R$ <u>un anneau noethérien à droite et à gauche avec</u> $\text{gl. dim } R = d < \infty$ , $D$ <u>une dérivation de</u> $R$ , et $S = R[t]$ <u>l'extension de Ore de</u> $R$ <u>associée à</u> $D$ . <u>Alors</u> $\text{gl. dim } S = d$ <u>ou</u> $d + 1$ , <u>et</u> $\text{gl. dim } S = d + 1$ <u>si, et seulement si, il existe un</u> $S$-<u>module à gauche</u> $M$ <u>de type fini sur</u> $R$ <u>tel que</u> $\text{l. dim}_R M = d$ .

<u>Démonstration</u>. - Par le corollaire 5.7 (a), $\text{gl. dim } S \leqslant d + 1$ , et par la proposition 3 de [10] (p. 316), $\text{gl. dim } S \geqslant d$ . D'où on a bien $\text{gl. dim } S = d$ ou $d + 1$ . De plus, si $\text{gl. dim } S = d + 1$ , alors il existe un $S$-module à gauche $M$ tel que $\text{l. dim}_S M = d + 1$ . Mais, par le théorème 3.8, on peut trouver $M_0$ un $S$-sous-module de $M$ qui soit de type fini sur $R$ avec $\text{l. dim}_R M_0 = d$ , d'où le résultat. Réciproquement, si $M$ existe avec $M$ $S$-module à gauche de type fini sur $R$ , et $\text{l. dim}_R M = d$ , alors le corollaire 5.7 (b) donne $\text{l. dim}_S M = d + 1$ , donc $\text{gl. dim } S = d + 1$ , d'où le corollaire 5.8.

## 6. <u>Algèbres de Weyl</u>.

Soit $R$ un anneau quelconque, et $A_n(R)$ l'algèbre de Weyl en $n$ variables associée à $R$ , c'est-à-dire $A_n(R) = R[X_1, \dots, X_n, t_1, \dots, t_n]$ , où les $X$'s et les $t$'s sont des indéterminées sur $R$ commutant avec les éléments de $R$ , et où $t_i X_i - X_i t_i = 1$ , $t_i X_j = X_j t_i$ pour $i \neq j$ . Notons alors que si $R$ est noethérien à gauche (ou à droite), $A_n(R)$ l'est aussi.

LEMME 6.1. - On a $\text{w.gl.dim}\, R + n \leq \text{w.gl.dim}\, A_n(R) \leq \text{w.gl.dim}\, R + 2n$ .

Démonstration. - Puisque $A_n(R) = A_1(A_{n-1}(R))$ , il suffit de montrer le lemme pour $n = 1$ . Mais, par induction sur $i$ , on a $tX^i = X^i t + iX^{i-1}$ , donc

$$A_i(R) = R[X][t, d/dX] .$$

De plus, $\text{w.gl.dim}\, R[X] = \text{w.gl.dim}\, R + 1$ (cf. [13], p. 45, théorème 5.5). Alors le corollaire 5.7 (a) nous donne

$$\text{w.gl.dim}\, A_1(R) \leq \text{w.gl.dim}\, R[X] + 1 = \text{w.gl.dim}\, R + 2 ,$$

d'où la seconde inégalité du lemme.

L'anneau $R$ étant facteur direct de $A_1(R)$ en tant que $R$-bimodule, on a

$$\text{w.gl.dim}\, R \leq \text{w.gl.dim}\, A_1(R) .$$

En effet, soit $A$ un $R$-module à gauche quelconque, alors $B = A_1(R) \otimes_R A$ est un $A_1(R)$-module à gauche, et si $A_1(R) = R \oplus T$ , alors $B \simeq A \oplus T \otimes_R A$ en tant que $R$-module. Le foncteur Tor commute avec la somme directe (cf. [6], p. 107, proposition 1.2a), donc $\text{w. dim}_R\, B = \max(\text{w. dim}_R\, A , \text{w. dim}_R\, T \otimes_R A)$ , ce qui entraine $\text{w. dim}_R\, A \leq \text{w. dim}_R\, B$ . De plus, par le corollaire 5.7 (a),

$$\text{w. dim}_R\, B \leq \text{w. dim}_{R[X]}\, B \leq \text{w. dim}_{A_1(R)}\, B .$$

On obtient $\text{w. dim}_R\, A \leq \text{w. dim}_{A_1(R)}\, B$ pour tout $R$-module à gauche $A$ , donc $\text{w.gl.dim}\, R \leq \text{w.gl.dim}\, A_1(R)$ . En particulier, si $\text{w.gl.dim}\, R$ est infinie, le lemme 2.1 est prouvé.

Supposons maintenant que $\text{w.gl.dim}\, R = d < \infty$ . Alors $\text{w.gl.dim}\, R[X] = d + 1$ . Soit $M$ un $R[X]$-module à gauche tel que $\text{w. dim}_{R[X]}\, M = d + 1$ . On a une suite exacte de $R[X]$-modules

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow A_1(R) \otimes_{R[X]} M \longrightarrow \bar{M} \longrightarrow 0$$

($\bar{M} = A_1(R) \otimes_{R[X]} M/\{1\} \otimes_{R[X]} M$), qui donne, pour tout $R[X]$-module à droite $N$ ,

$$\dots \longrightarrow \mathrm{Tor}_{d+2}^{R[X]}(N , \bar{M}) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{d+1}^{R[X]}(N , M)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Tor}_{d+1}^{R[X]}(N , A_1(R) \otimes_{R[X]} M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{d+1}^{R[X]}(N , \bar{M}) \longrightarrow \dots$$

On a $\mathrm{Tor}_{d+2}^{R[X]}(N , \bar{M}) = 0$ . Comme il existe $N$ tel que $\mathrm{Tor}_{d+1}^{R[X]}(N , M) \neq 0$ , il existe $N$ tel que $\mathrm{Tor}_{d+1}^{R[X]}(N , A_1(R) \otimes_{R[X]} M) \neq 0$ , donc

$$\text{w. dim}\, A_1(R) \otimes_{R[X]} M = d + 1 ;$$

et par le corollaire 5.7 (a), on a

$$\text{w.gl.dim}\, A_1(R) \geq \text{w. dim}_{A_1(R)}\, A_1(R) \otimes_{R[X]} M \geq \text{w. dim}_{R[X]}\, A_1(R) \otimes_{R[X]} M = d + 1 ,$$

d'où le lemme.

Notons que dans le cas $w.gl.\dim R < \infty$ , ce résultat est une conséquence immédiate de la proposition 3 de [10] (p. 316) puisqu'elle nous donne

$$w.gl.\dim R[X] \leq w.gl.\dim A_1(R) \leq 1 + w.gl.\dim R[X]$$

et que l'on a

$$w.gl.\dim R[X] = 1 + w.gl.\dim R .$$

THÉORÈME 6.2. - <u>Soit</u> $R$ <u>un anneau noethérien à droite et à gauche, de dimension globale finie</u> $d$ . <u>Alors</u> $gl.\dim A_1(R) = d + 2$ <u>si, et seulement si, il existe un</u> $A_1(R)$<u>-module à gauche</u> $M$ <u>qui soit de type fini sur</u> $R$ <u>avec</u> $l.\dim_R M = d$ .

<u>Démonstration</u>. - Le lemme 6.1 nous donne déjà $gl.\dim A_1(R) \leq d + 2$ . Si un tel $M$ existe, alors $A_1(R) = R[X , 0][t , d/dX]$ , et en appliquant le corollaire 5.7 (b) deux fois, on obtient

$$l.\dim_{R[X]} M = l.\dim_R M + 1 < \infty$$

d'où

$$l.\dim_{A_1(R)} M = l.\dim_{R[X]} M + 1 = l.\dim_R M + 2 = d + 2 .$$

Pour prouver que la condition est également nécessaire, supposons que $gl.\dim A_1(R) = d + 2$ . L'anneau $R$ est noethérien à gauche, donc $A_1(R)$ aussi, il existe donc un $A_1(R)$-module à gauche de type fini, $M$ , tel que

$$l.\dim_{A_1(R)} M = d + 2$$

(cf. [15], p. 147, proposition 10). Soit $F$ la famille des $A_1(R)$-sous-modules $M'$ de $M$ tels que $l.\dim_{A_1(R)} M/M' = d + 2$ . Puisque $F$ contient $0$ , donc n'est pas vide, et que $M$ est noethérien, car de type fini sur $A_1(R)$ noethérien, $F$ contient un élément maximal $M'_0$ . On en déduit que si $M' \supsetneq M'_0$ , alors $l.\dim_{A_1(R)}(M/M') < d + 2$ . La longue suite exacte pour le foncteur Ext provenant de

$$0 \longrightarrow M'/M'_0 \longrightarrow M/M'_0 \longrightarrow M/M' \longrightarrow 0$$

donne, pour tout $A_1(R)$-module à gauche $N$ ,

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^{d+2}_{A_1(R)}(M/M' , N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{d+2}_{A_1(R)}(M/M'_0 , N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{d+2}_{A_1(R)}(M'/M'_0 , N) \longrightarrow \cdots$$

Or $\mathrm{Ext}^{d+2}_{A_1(R)}(M/M' , N) = 0$ , et il existe $N$ tel que $\mathrm{Ext}^{d+2}_{A_1(R)}(M/M'_0 , N) \neq 0$ , ce qui donne

$$\mathrm{Ext}^{d+2}_{A_1(R)}(M'/M'_0 , N) \neq 0 .$$

On avait déjà $l.\dim_{A_1(R)} M'/M'_0 \leq d + 2$ , donc $l.\dim_{A_1(R)} M'/M'_0 = d + 2$ . Quitte à remplacer $M$ par $M/M'_0$ , on peut donc supposer que tout $A_1(R)$-sous-module à gauche de $M$ , non nul, a $d + 2$ comme dimension projective, car tout $A_1(R)$-sous-module non nul de $M/M'_0$ est de la forme $M'/M'_0$ avec $M' \supset M'_0$ .

On peut appliquer le théorème 3.8 à $M$ , car gl. dim $R[X] = d + 1$ : $M$ contient un $A_1(R)$-sous-module $M_0$ de type fini sur $R[X]$ avec l. $\dim_{R[X]} M_0 = d + 1$ , donc l. $\dim_{A_1(R)} M_0 = d + 2$ par le corollaire 5.7 (b). Quitte à remplacer $M$ par $M_0$ , on peut donc supposer encore que $M$ est de type fini sur $R[X]$ et que l. $\dim_{R[X]} M = d + 1$ , car tout $A_1(R)$-sous-module de $M_0$ est aussi un $A_1(R)$-sous-module de $M$ , donc de dimension projective $d + 2$ . En appliquant le théorème 3.8 une nouvelle fois, on sait qu'il existe $\bar{M}$ , $R[X]$-sous-module de $M$ , de type fini sur $R$ , avec l. $\dim_R \bar{M} = d$ . Soit maintenant

$$\bar{\bar{M}} = A_1(R)\bar{M} = \textstyle\sum_0^\infty t^i \bar{M} .$$

Comme $Xt^i = t^i X - t^{i-1} i$ , on obtient une chaîne ascendante $\sum_0^k t^i \bar{M}$ de $R[X]$-sous-modules de $\bar{\bar{M}}$ , car le degré en $t$ reste inférieur ou égal à $k$ quand on multiplie par $x$ . Mais $R[X]$ est noethérien à gauche, $M$ est de type fini sur $R[X]$ , donc noethérien, et $\bar{\bar{M}}$ est un $R[X]$-sous-module de $M$ , donc il doit exister $k \in \underset{\sim}{N}$, tel que $\bar{\bar{M}} = \sum_0^k t^i \bar{M}$ . Mais alors le $A_1(R)$-module $\bar{\bar{M}}$ convient, car chaque $t^i \bar{M}$ , $0 \leqslant i \leqslant k$ , est de type fini sur $R$ puisque $\bar{M}$ l'est, donc $\bar{\bar{M}}$ est de type fini sur $R$ . De plus, $\bar{\bar{M}}$ est un $A_1(R)$-sous-module à gauche non nul de $M$ , donc l. $\dim_{A_1(R)} \bar{\bar{M}} = d + 2$ , et en appliquant le corollaire 5.7 (a) deux fois, on obtient

$$\text{w. } \dim_{A_1(R)} \bar{\bar{M}} \leqslant \text{w. } \dim_{R[X]} \bar{\bar{M}} + 1 \leqslant \text{w. } \dim_R \bar{\bar{M}} + 2 ,$$

donc l. $\dim_R \bar{\bar{M}} \geqslant d$ avec gl. dim $R = d$ , ce qui donne l. $\dim_R \bar{\bar{M}} = d$ , d'où le théorème.

En général, si $R$ est un anneau noethérien à droite et à gauche arbitraire, il semble difficile d'appliquer ce théorème pour calculer gl. dim $A_n(R)$ . Cependant il est possible d'obtenir des réponses assez précises quand $R$ est commutatif. Nous commençons par quelques résultats préliminaires : si $R$ est un anneau quelconque, soit $m = m(R)$ le maximum des dimensions faibles des $R$-modules à gauche cycliques qui sont des groupes de torsion abéliens.

LEMME 6.3. - Soit $R$ un anneau noethérien à droite et à gauche qui ne contient pas les nombres rationnels

(a) Il y a des $R$-modules cycliques qui sont des groupes de torsion abéliens et, pour tout $R$-module à gauche $M$ qui soit un groupe de torsion abélien, on a w. $\dim_R M \leqslant m(R)$ .

(b) $m(A_1(R)) = m(R) + 2$ .

Démonstration. - Puisque $R$ ne contient pas les nombres rationnels on peut trouver un entier $k$ dont l'image dans $R$ ne soit pas une unité. Alors $Rk \subset R$ et $R/Rk$ est un $R$-module cyclique engendré par la classe de $1$ . On a aussi $k \cdot \bar{r} = 0$ pour tout élément $\bar{r}$ de $R/Rk$ , donc $R/Rk$ est également un groupe de torsion abélien.

Considérons maintenant l'inégalité $m(R) \geqslant w.\ \dim_R M$ , où $M$ est un R-module à gauche et un groupe de torsion abélien. Si $m(R) = \infty$ , il n'y a rien à montrer, nous allons supposer $m(R) = d < \infty$ , et démontrer d'abord cette inégalité dans le cas où $M$ est de type fini, cela par induction sur le nombre de générateurs minimum de $M$ . En effet, si ce nombre est $1$ , $M$ est cyclique, donc c'est vrai par définition. Si ce nombre est strictement supérieur à $1$ , on introduit une suite exacte $0 \longrightarrow C \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ où $C$ est un R-module cyclique, où $Q$ a moins de générateurs que $M$ , et où $C$ et $Q$ sont deux groupes de torsion abéliens. Par exemple, si $M = Re_1 + \ldots + Re_n$ , on prend $C = Re_1$ et $Q = M/C$ , engendré par les classes de $e_2 , \ldots , e_n$ . Par l'hypothèse de récurrence, on a $w.\ \dim_R Q \leqslant d$ , et si $N$ est un R-module à droite quelconque, on a la suite exacte

$$\ldots \longrightarrow \operatorname{Tor}^R_{d+1}(N , C) \longrightarrow \operatorname{Tor}^R_{d+1}(N , M) \longrightarrow \operatorname{Tor}^R_{d+1}(N , Q) \longrightarrow \ldots$$

avec $\operatorname{Tor}^R_{d+1}(N , C) = \operatorname{Tor}^R_{d+1}(N , Q) = 0$ , donc $\operatorname{Tor}^R_{d+1}(N , M) = 0$ , ce qui donne $w.\ \dim_R M \leqslant d$ . L'inégalité est donc vérifiée pour $M$ de type fini. Mais étant donné que tout module est la limite directe de ses sous-modules de type fini, que tout sous-module de $M$ est aussi un groupe de torsion abélien si $M$ l'est, et que le foncteur Tor commute avec les limites directes (cf. [6], p. 107, proposition 1.3.), on a le résultat pour tout R-module à gauche $M$ qui est un groupe de torsion abélien.

Pour prouver (b), introduisons $M$ , un $A_1(R)$-module à gauche qui soit un groupe de torsion abélien. Par le corollaire 5.7 (a), on a

$$w.\ \dim_{A_1(R)} M \leqslant w.\ \dim_{R[X]} M + 1 \leqslant w.\ \dim_R M + 2 \leqslant m(R) + 2$$

par (a), d'où

$$m(A_1(R)) \leqslant m(R) + 2 .$$

Maintenant soit $M_0$ R-module à gauche cyclique et groupe de torsion abélien, et soit $L = A_1(R)t + A_1(R)X^2$ . Alors $A_1(R)/L$ est isomorphe en tant que R-bimodule au R-module libre engendré par les images de $1$ , $X$ dans $A_1(R)/L$ . D'où $M = A_1(R)/L \otimes_R M_0$ est un $A_1(R)$-module à gauche qui, en tant que R-module, est isomorphe à la somme directe de 2 copies de $M_0$ . En particulier, $M$ est de type fini sur $R$ , et $l.\ \dim_R M = l.\ \dim_R M_0$ puisque le foncteur $\operatorname{Ext}_R$ commute avec les sommes directes finies (cf. [6], p. 107, proposition 1.2). De plus, $M$ est aussi un groupe de torsion abélien. Par (a) et le corollaire 5.7 (a),

$$m(A_1(R)) \geqslant w.\ \dim_{A_1(R)} M \geqslant w.\ \dim_R M$$

donc $m(A_1(R)) \geqslant w.\ \dim_R M_0$ pour tout $M_0$ , R-module à gauche cyclique et groupe de torsion abélien. Donc $m(A_1(R)) \geqslant m(R)$ . En particulier, si $m(R) = \infty$ , on a le résultat.

Supposons alors $m(R) = d < \infty$ . Puisque $l.\ \dim_R M \leqslant d$ , on peut appliquer le corollaire 5.7 (b) pour obtenir

$$\text{l. dim}_{A_1(R)} M = \text{l. dim}_R M + 2 = \text{l. dim}_R M_0 + 2 .$$

On a

$$m(A_1(R)) \geqslant \text{w. dim}_{A_1(R)} M = \text{w. dim}_R M_0 + 2$$

et par conséquent $m(A_1(R)) \geqslant m(R) + 2$ , d'où le lemme.

LEMME 6.4. - Soit $R$ un anneau commutatif noethérien, et soit $M \neq 0$ un $A_1(R)$-module à gauche de type fini sur $R$ , alors $M$ est un groupe de torsion abélien.

Démonstration. - Soit $I$ l'annulation de $M$ dans $A_1(R)$ . Alors $I$ est un idéal bilatère de $A_1(R)$ , et c'est le noyau de l'homomorphisme d'anneaux

$$\varphi : A_1(R) \longrightarrow \text{End}_R(M)$$

donné par la structure de $A_1(R)$-module à gauche de $M$ . Puisque $R$ est commutatif, et $M$ de type fini sur $R$ , $\text{End}_R(M)$ est aussi un $R$-module de type fini (cf. [15], p. 148), par conséquent tous ses éléments sont entiers sur $R$ . En particulier, l'image de $X$ dans $\text{End}_R(M)$ est donc un entier sur $R$ ; il existe un polynôme unitaire $f$ à coefficients dans $R$ tel que $f(\varphi.x) = 0$ ; mais alors $\varphi(f(x)) = 0$ , donc $f(x) \in I$ . Or $tf.ft = df/dx$ dans $A_1(R)$ , d'où $df/dx \in I$ . Toutes les dérivées de $f$ sont alors dans $I$ et, en particulier, si $f$ est de degré $k$ , on a $k!$ dans $I$ , donc $k!M = 0$ , d'où le lemme.

Remarque. - Le théorème 6.2 et le lemme 6.4 montrent que si $R$ est un anneau noethérien commutatif de dimension globale $d$ , contenant les nombres rationnels, alors $\text{gl. dim } A_1(R) = d + 1$ . En effet, nous avions déjà $d + 1 \leqslant \text{gl. dim } A_1(R) \leqslant d + 2$ par le lemme 6.1, et par le théorème 6.2, nous savons que si $\text{gl. dim } A_1(R) = d + 2$ , alors il existe $M$ , $A_1(R)$-module à gauche, qui soit de type fini sur $R$ avec $\text{l. dim}_R M = d$ , donc $M \neq 0$ . Mais alors, par le lemme 6.4, $M$ serait un groupe de torsion abélien : $m \in M$ , il existe un entier $p$ tel que $pm = 0$ . Or $\underset{\sim}{Q} \subset R$ , donc $1/p \in R$ , on a alors $(1/p)pm = 0$ , d'où $m = 0$ , et donc $M = 0$ , ce qui est impossible. Notons que ce résultat, dans le cas $R$ local, est exactement le théorème 2.3 de [2].

LEMME 6.5. - Soit $R$ un anneau noethérien commutatif, et $X$ une indéterminée sur $R$ . Notons $R(x)$ l'anneau des fractions de $R[X]$ par rapport à l'ensemble multiplicatif des polynomes unitaires. Alors

$$\text{gl. dim } R(x) = \text{gl. dim } R .$$

Démonstration. - L'ensemble multiplicatif des polynômes unitaires ne contient pas de diviseurs de zéro. De plus, l'algorithme de la division euclidienne peut être utilisé dans $R[X]$ si le diviseur est unitaire. Par conséquent, tout élément de $R(x)$ peut être écrit sous la forme $q + (r/m)$ où $q$ , $r$ et $m$ sont dans $R[X]$ , $m$ est unitaire, et $\text{degré}(r) < \text{degré}(m)$ si $r$ est non nul. De plus, $q$ est unique, car si $q + (r/m) = q' + (r'/m')$ on a

$$mm'(q - q') = r'm - rm' .$$

Si $q - q' \neq 0$ ,

$$\deg mm'(q - q') \geqslant \deg m + \deg m' ,$$

car $m$ et $m'$ sont unitaires et

$$\deg(mr' - rm') \leqslant \max(\deg m + \deg r , \deg m' + \deg r)$$

si $r , r' \neq 0$ , donc

$$\deg r < \deg m , \quad \deg r' < \deg m' .$$

On doit donc avoir $r = r' = 0$ , ce qui donne $q = q'$ en contradiction avec $q - q' \neq 0$ : dans tous les cas, $q + (r/m) = q' + (r'/m')$ donne $q = q'$ , $r'm = rm'$.

Maintenant soit $T$ l'ensemble des éléments de $R(x)$ tels que $q(0) = 0$ . Il est clair que $T$ est un $R$-sous-module de $R(x)$ , et que $R(x) = R \oplus T$ . Le $R$-module $R(x)$ étant plat (cf. [15], p. 169, théorème 5, et p. 170, théorème 6), le même raisonnement que dans la preuve du lemme 6.1 montre que $\text{w.gl.dim}\, R \leqslant \text{w.gl.dim}\, R(x)$ . Puisque $R$ , et par conséquent $R(x)$ , sont des anneaux noethériens (cf. [15], p. 185, proposition 1), on obtient

$$\text{gl. dim}\, R \leqslant \text{gl. dim}\, R(x) \quad \text{(cf. [15], p. 153, théorème 20).}$$

Alors le lemme est prouvé si gl. dim $R$ est infinie.

Supposons donc $\text{gl. dim}\, R = d < \infty$ . Puisque

$$\text{gl. dim}\, R[X] = \text{w.gl.dim}\, R[X] = d + 1 , \text{ et } \text{gl. dim}\, R(x) \leqslant \text{gl. dim}\, R[X]$$

(cf. [15] p. 185, théorème 8), on a

$$\text{gl. dim}\, R(x) \leqslant d + 1 .$$

Si $\text{gl. dim}\, R(x) = d + 1$ , soit $M$ un $R(x)$-module à gauche tel que $\text{w.dim}_{R(x)} M = d+1$. Alors $\text{w. dim}_{R(x)} M \leqslant \text{w. dim}_{R[X]} M$ (cf. [15], p. 186, theoreme 9), donc

$$\text{w. dim}_{R[X]} M = d + 1 = \text{gl. dim}\, R[X] .$$

D'où, par le théorème 3.8, $M$ contient un $R[X]$-sous-module non nul de type fini sur $R$ . De même que dans la preuve du lemme 6.4, cela veut dire que ce sous-module est annulé par un polynôme unitaire en $X$ . Mais cela est impossible puisque $M$ est un $R(x)$-module, donc on a $\text{gl. dim}\, R(x) \leqslant d$ , d'où le lemme.

THÉORÈME 6.6. - Soit $R$ un anneau commutatif noethérien.

(a) Si $R$ contient les nombres rationnels, alors $\text{gl. dim}\, A_n(R) = \text{gl. dim}\, R + n$ .

(b) Si $R$ ne contient pas les nombres rationnels, soit $m = m(R)$ le maximum des dimensions projectives des $R$-modules cycliques qui sont des groupes de torsion abéliens. Alors

$$\text{gl. dim}\, A_n(R) = \text{gl. dim}\, R + n \quad \text{si} \quad n \leqslant \text{gl. dim}\, R - m(R)$$

et

$$\text{gl. dim}\, A_n(R) = m(R) + 2n \quad \text{si} \quad n \geqslant \text{gl. dim}\, R - m(R) .$$

Démonstration. - Notons d'abord que, grâce au lemme 6.1, il n'y a rien à prouver si gl. dim $R = \infty$ . Nous allons donc supposer gl. dim $R = d < \infty$ . Il est alors suffisant de prouver que

(6.7) $\quad m = m(R) \leqslant d - n$ entraine gl. dim $A_n(R) \leqslant d + n$ .

En effet, si on suppose cela démontré, dans le cas (a), on a $m(R) = -\infty$ , donc gl. dim $A_n(R) \leqslant d + n$ , ce qui, avec le lemme 6.1, donne

$$\text{gl. dim } A_n(R) = d + n .$$

De même, dans le cas (b), lorsque $n \leqslant d - m$ . Supposons donc $n \geqslant d - m$ . On a toujours

$$\text{gl. dim } A_{d-m}(R) = 2d - m ,$$

et des applications répétées du lemme 6.3 (b) montrent que

$$m(A_{d-m}(R)) = m + 2(d - m) = \text{gl. dim } A_{d-m}(R) .$$

De plus, si $R'$ est un anneau noethérien à droite et à gauche avec $m(R') = \text{gl.dim } R'$ on a

$$\text{gl. dim } A_k(R') = \text{gl. dim } R' + 2k .$$

En effet, par le lemme 6.1 gl. dim $A_k(R') \leqslant$ gl. dim $R' + 2k$ , et par le lemme 6.3(b), $m(A_k(R') = m(R') + 2k =$ gl. dim $R' + 2k$ ; comme

$$m(A_k(R')) \leqslant \text{w.gl.dim } A_k(R') = \text{gl. dim } A_k(R') ,$$

on a l'égalité. Donc si $n = d - m + k$ ,

$$\begin{aligned}\text{gl. dim } A_n(R) &= \text{gl. dim } A_k(A_{d-m}(R)) \\ &= \text{gl. dim } A_{d-m}(R) + 2k = 2d - m + 2k = m + 2n\end{aligned}$$

d'où le théorème.

Prouvons alors (6.7) par induction sur $n$ . Si $n = 0$ , $A_0(R) = R$ et gl. dim $A_0(R) \leqslant d + 0$ , c'est donc vérifié. Si $n > 0$ , introduisons

$$T(x_n) = A_{n-1}(R(x_n))[t_n , d/dx_n] ,$$

et soit $M$ un $R(x_n)$-module à gauche qui soit un groupe de torsion abélien. On obtient

$$\text{w. dim}_{R(x_n)} M \leqslant \text{w. dim}_{R[X_n]} M \leqslant \text{w. dim}_R M + 1 \leqslant m(R) + 1 \leqslant d - n + 1 = d - (n - 1)$$

par le corollaire 5.7 (a) et le lemme 6.3 (a). D'où

$$m(R(x_n)) \leqslant d - (n - 1) = \text{gl. dim } R(x_n) - (n - 1)$$

par le lemme 6.5. Par induction, on a donc

$$\text{gl. dim } A_{n-1}(R(x_n)) \leqslant \text{gl. dim } R(x_n) + (n - 1) = d + (n - 1) .$$

Or $T(x_n)$ est l'anneau des polynômes différentiels de $A_{n-1}(R(x_n))$ par rapport à la dérivation $d/dx_n$ . Par conséquent, le corollaire 5.7 (a) donne

$$\text{w.gl.dim } T(x_n) = \text{gl. dim } T(x_n) \leqslant \text{w.gl.dim } A_{n-1}(R(x_n)) + 1 = \text{gl. dim } A_{n-1}(R(x_n)) + 1 \leqslant d + n .$$

Supposons que $d' = \text{gl. dim } A_n(R) > d + n$ . L'anneau $A_n(R)$ est noethérien à gauche, on peut donc trouver $N$ , un $A_n(R)$-module à gauche de type fini tel que

$$\text{l. dim}_{A_n(R)} N = d' \quad \text{(cf. [15], p. 147, proposition 10).}$$

Comme dans la preuve du théorème 6.2, on peut supposer que tous les $A_n(R)$-sous-modules de $N$ sont également de dimension projective $d'$ . Mais il est clair que $T(X_n) \simeq R(X_n) \otimes_{R[X_n]} A_n(R)$ en tant que $A_n(R)$-module à droite, et similairement à gauche. En effet, soit $f$ appartenant à $T(X_n)$ , on a

$$f = \textstyle\sum_{\text{finie},i,j} m_{i,j}\, f_{i,j}\, t_n^i , \quad f_{i,j} \in A_{n-1}(R) , \quad m_{i,j} \in R(x_n) ,$$

donc il existe $m \in R[X_n]$ tel que $mf \in A_n(R)$ . Et si $mf = m'f$ dans $A_n(R)$ , par exemple $\deg m > \deg m'$ donc $m/m' \in R[X_n]$ , et alors

$$1/m' \otimes m'f = (1/m')(m'/m)(m/m') \otimes m'f = (1/m')(m'/m) \otimes (m/m')m'f = 1/m \otimes mf .$$

L'application $f \longmapsto 1/m \otimes mf$ est alors une bijection. De plus, $g$ appartenant à $A_n(R)$ ,

$$fg = (1/m)(mfg) \longmapsto 1/m \otimes mfg = (1/m \otimes mf)g ,$$

d'où l'isomorphisme de $A_n(R)$-modules à droite.

Puisque $R(X_n)$ est plat en tant que $R[X_n]$-module, on voit que $T(X_n)$ est plat à droite et à gauche en tant que $A_n(R)$-module. Par conséquent, toute $R(X_n)$-résolution plate d'un $T(X_n)$-module à gauche est aussi une $A_n(R)$-résolution plate, et on obtient

$$\text{w. dim}_{A_n(R)} T(X_n) \otimes_{A_n(R)} N \leqslant \text{w. dim}_{T(X_n)} T(X_n) \otimes_{A_n(R)} N \leqslant \text{gl. dim } T(X_n) \leqslant d + n .$$

Maintenant soit

$$\bar{N} = T(X_1) \otimes_{A_n(R)} N \oplus T(X_2) \otimes_{A_n(R)} N \oplus \ldots \oplus T(X_n) \otimes_{A_n(R)} N \oplus T(t_1) \otimes_{A_n(R)} N \oplus \ldots \oplus T(t_n) \otimes_{A_n(R)} N .$$

Comme les $T(X_i)$ et les $T(t_j)$ se comportent comme $T(X_n)$ , on déduit que

$$\text{w. dim}_{A_n(R)} \bar{N} \leqslant d + n < d' .$$

Mais

$$T(X_n) \otimes_{A_n(R)} N \simeq R(X_n) \otimes_{R[X_n]} A_n(R) \otimes_{A_n(R)} N \simeq R(X_n) \otimes_{R[X_n]} N .$$

Donc le noyau de l'application canonique $N \longrightarrow T(X_n) \otimes_{A_n(R)} N$ est constitué des éléments de $N$ annulés par des polynômes unitaires en $X_n$ . En effet, le noyau de $N \longrightarrow R(X_n) \otimes_{R[X_n]} N$ est constitué des éléments de $N$ , $n$ , tels que $1/(1 + n) = 0$ dans $N_S$ , où $S$ est l'ensemble multiplicatif des polynômes unitaires en $X_n$ , donc tels que $mn = 0$ , $m \in S$ . C'est pourquoi si $z$ appartient à $\text{Ker}(N \longrightarrow \bar{N})$ , alors

$z$ doit être annulé par des polynômes unitaires en chacun des $X_1,\dots,X_n,t,\dots,t_n$ . Donc il existe $i_1$ , ... , $i_n$ , $j_1$ , ... , $j_n$ , tels que

$$X_k^{i_k+1} z = f_k(X_k)z \ , \quad f_k \in R[X] \ , \quad \deg f_k \leqslant i_k \ , \quad 1 \leqslant k \leqslant n \ ,$$
$$t_\ell^{j_\ell+1} z = g_\ell(t_\ell)z \ , \quad g_\ell \in R[X] \ , \quad \deg g_\ell \leqslant j_\ell \ , \quad 1 \leqslant \ell \leqslant n \ ,$$

donc l'ensemble des $X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n} t_1^{\ell_1} \dots t_n^{\ell_n}$ pour $k_\ell \leqslant i_\ell$ , $1 \leqslant \ell \leqslant n$ , et $\ell_k \leqslant j_k$ , $1 \leqslant k \leqslant n$ , forme un ensemble générateur sur $R$ . Par conséquent, il est évident que $\bar{\bar{N}} = A_n(R)z$ est de type fini sur $R$ , et c'est un groupe de torsion abélien par le lemme 6.4. Si $\bar{\bar{N}} \neq 0$ , alors $\bar{\bar{N}}$ étant un sous-$A_n(R)$-module de $N$ , $\text{l. dim}_{A_n(R)} \bar{\bar{N}} = d' > d + n$ . Or des applications répétées du corollaire 5.7 (b) montrent que

$$\text{l. dim}_{A_n(R)} \bar{\bar{N}} = \text{l. dim}_R \bar{\bar{N}} + 2n \leqslant m(R) + 2n$$

par le lemme 6.3 (a). On obtient $m(R) + 2n > d + n$ , d'où $m(R) > d - n$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent, $\bar{\bar{N}} = 0$ , et $N \longrightarrow \bar{N}$ est une injection, d'où la suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow \bar{N} \longrightarrow \bar{N}/N \longrightarrow 0 \ ,$$

et la longue suite exacte pour le foncteur $\mathrm{Tor}^{A_n(R)}$ avec $C$ , $A_n(R)$-module à droite quelconque :

$$\dots \longrightarrow \mathrm{Tor}_{d'+1}^{A_n(R)}(C\ ,\ \bar{N}/N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{d'}^{A_n(R)}(C\ ,\ N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{d'}^{A_n(R)}(C\ ,\ \bar{N}) \longrightarrow \dots$$

Puisque $\text{w. dim}_{A_n(R)} N = d'$ , il existe $C$ tel que $\mathrm{Tor}_{d'}^{A_n(R)}(C\ ,\ N) \neq 0$ , et comme $\text{w. dim}_{A_n(R)} \bar{N} < d'$ , $\mathrm{Tor}_{d'}^{A_n(R)}(C\ ,\ \bar{N}) = 0$ , donc il faut

$$\mathrm{Tor}_{d'+1}^{A_n(R)}(C\ ,\ \bar{N}/N) \neq 0 \ .$$

Mais alors $\text{w. dim}_{A_n(R)} \bar{N}/N > d'$ , ce qui est impossible, car $\text{gl. dim}\ A_n(R) = d'$ . Ainsi (6.7) et le théorème 6.6 sont prouvés.

COROLLAIRE 6.8. - $R$ <u>étant un anneau noethérien commutatif de dimension globale finie</u> $d$ , $\text{gl. dim}\ A_1(R) = d + 2$ <u>si, et seulement si,</u> $R$ <u>possède un corps quotient</u> $F$ <u>de caractéristique finie avec</u> $\text{l. dim}_R F = d$ .

<u>Démonstration</u>. - Le théorème 6.6 montre que $\text{gl. dim}\ A_1(R) = d + 2$ si, et seulement si, $m(R) = d$ . Donc si un tel $F$ existe, c'est un $R$-module cyclique et un groupe de torsion abélien, d'où on a bien $m(R) = d$ .

Réciproquement, si $m(R) = d$ , il existe un $R$-module cyclique, donc un idéal $I$ de $R$ , tel que $R/I$ soit un groupe de torsion abélien avec

$$\text{w. dim}_R R/I = \text{l. dim}_R R/I = d \ .$$

L'idéal $I$ doit être propre. Supposons que, pour tous les idéaux maximaux de $R$ ,

$m \supset I$ , l'on ait $l.\dim_{R_m} R_m/IR_m \leq d-1$ . Alors pour $U$ , R-module à droite quelconque, et pour tout idéal maximal $m$ ,

$$[\mathrm{Tor}_i^R(U\ ,\ (R/I))]_m \simeq \mathrm{Tor}_i^{R_m}(U_m\ ,\ (R_m/IR_m)) = 0$$

pour $i \geq d$ (cf. [15], p. 171, théorème 7). Mais alors $\mathrm{Tor}_i^R(U\ ,\ (R/I)) = 0$ pour $i \geq d$ (cf. [15], p. 187, lemme 2) et par conséquent, $w.\dim_R R/I \leq d-1$ , ce qui est impossible. Il existe donc $m \supset I$ , maximal, tel que $l.\dim_{R_m} R_m/IR_m = d$ . Or

$$gl.\dim R_m = l.\dim_R R/m \leq d \quad \text{(cf. [15],p. 195, théorème 19).}$$

On a donc $l.\dim_R F = d$ , où $F = R/m$ . De plus, $F$ est de caractéristique finie, car $R/I$ étant un groupe de torsion abélien, il existe un entier $k$ tel que $k(1+I) = 0$ , donc tel que $k \in I$ . Mais alors $k \in m$ , donc $k(1+m) = 0$, d'où car $F > 0$ .

Remarques. – Dans le cas où $R$ est un corps commutatif de caractéristique $0$ , le théorème 6.6(a) est démontré par ROOS (cf. [16], p. 23, théorème 1). Il a aussi été prouvé par BHATWADEKAR dans le cas général (cf. [2], p. 224, corollaire 2.6) par des méthodes similaires. Enfin, les deux parties de ce théorème ont été démontrées par GOODEARL utilisant des méthodes différentes (cf. [11], p. 82, théorème 24). En effet, GOODEARL démontre que si $R$ est un anneau commutatif noethérien de dimension globale finie $d$ , et $k = \sup\{rg(m)\ ,\ m$ idéal maximal de $R/\mathrm{car}(R/m) > 0\}$ (Si $R$ n'a pas de tels idéaux maximaux, $k = -\infty$ ), alors pour tout entier positif $n$ ,

$$r.gl.\dim A_n(R) = \max\{d+n\ ,\ k+2n\} .$$

Or si $Q \subset R$ , $k = -\infty$ , et on a $gl.\dim A_n(R) = d+n$ . Sinon il suffit de montrer que $k = m(R)$ . Or, pour $m$ maximal, $rg(m) = \dim_R(R/m)$ (cf. [11], p. 71, proposition 9 (b)), on a donc certainement $k \leq m(R)$ , car chaque $R/m$ est un R-module cyclique et un groupe de torsion abélien, puisque de caractéristique non nulle. Maintenant, soit $I$ idéal propre de $R$ tel que $\dim_R R/I = m(R)$ , $R/I$ groupe de torsion abélien ; de la même manière que dans le corollaire 6.8, il doit exister $m \supset I$ tel que $\dim_R R/m \geq m(R)$ , d'où $m(R) \leq k$ .

Notons que l'anneau $T(X_1) \oplus T(X_2) \oplus \ldots \oplus T(X_n) \oplus T(t_1) \oplus \ldots \oplus T(t_n)$ n'est pas nécessairement fidèlement plat sur $A_n(R)$ , d'où l'impossibilité d'utiliser le lemme 2.b.4 de [3] pour montrer (6.7). En effet, ce lemme affirme que, si $A \subset B$ sont deux anneaux noethériens de dimensions globales finies avec $B$ fidèlement plat à gauche et à droite sur $A$ , alors $gl.\dim A \leq gl.\dim B$ . Si donc

$$B = T(X_1) \oplus \ldots \oplus T(X_n) \oplus T(t_1) \oplus \ldots \oplus T(t_n)$$

était fidèlement plat sur $A_n(R)$ , on aurait

$$gl.\dim A_n(R) \leq gl.\dim B \leq \sup gl.\dim_{1\leq i\leq n} T(t_i)\ ,\ T(X_i) \leq d+m\ ,$$

d'où (6.7). En effet, si ce maximum est d' fini, car inférieur ou égal à $d+n$ , soit $M$ un B-module quelconque, pour chaque $T(X_i)(T(t_i))$ , on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow P_{d'}^{X_i} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0^{X_i} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

avec des $T(X_i)$- (ou $T(t_i)$)-modules projectifs, alors on a

$$0 \longrightarrow \oplus^{2n} P_{d'}^{X_i} \longrightarrow \dots \longrightarrow \oplus P_0^{X_i} \oplus P_0^{t_i} \longrightarrow \oplus^{2n} M \longrightarrow 0 ,$$

donc

$$\text{l. dim}_B \oplus^{2n} M = \dim_B M \leqslant d' .$$

Nous pouvons effectivement produire l'exemple suivant : soit $R$ un corps commutatif de caractéristique $2$ et $n = 1$. Alors $X_1^2$ et $t_1^2$ sont des éléments centraux de $A_1(R)$ qui engendrent un idéal propre $I$. En fait, $A_1(R)/I \simeq R_2$, l'anneau des matrices $2 \times 2$ sur $R$. Cependant, puisque $X_1^2$ est une unité dans $T(X_1)$, et $t_1^2$ une unité dans $T(t_1)$, il est clair que $I(T(X_1) \oplus T(t_1)) = T(X_1) \oplus T(t_1)$, donc $T(X_1) \oplus T(t_1)$ n'est pas fidèlement plat sur $A_1(R)$.

## 7. Exemples.

Soit $R$ un anneau de dimension globale à gauche finie. Posons

$$\Delta_n(R) = \text{l.gl.dim } A_n(R) - \text{l.gl.dim } A_{n-1}(R) .$$

Alors on a $\Delta_n(R) = 1$ ou $2$. En effet, par le lemme 6.1, on a

$$\text{l.gl.dim } A_n(R) \geqslant \text{w.gl.dim } A_n(R) \geqslant \text{w.gl.dim } R + n$$

et

$$\text{l.gl.dim } A_{n-1}(R) \geqslant \text{w.gl.dim } A_{n-1}(R) \geqslant \text{w.gl.dim } R + n - 1 ,$$

donc $\Delta_n(R) \geqslant 1$. De plus,

$$A_n(R) = A_1(A_{n-1}(R)) = A_{n-1}(R)[X_n][t_n , d/dX_n] ,$$

donc

$$\text{l.gl.dim } A_n(R) \leqslant \text{l.gl.dim } A_{n-1}(R)[X_n] + 1 = \text{l.gl.dim } A_{n-1}(R) + 2$$

(cf. [8], p. 528), donc $\Delta_n(R) \leqslant 2$.

Le théorème 6.6 montre qu'il n'y a que deux cas possibles si $R$ est un anneau commutatif noethérien : si $R$ contient le corps des nombres rationnels, alors $\Delta_n(R) = 1$ pour tout $n$, et sinon, on a $\Delta_n(R) = 1$ pour $n \leqslant k$, et $\Delta_n(R) = 2$ pour $n > k$. Un exemple de ce second cas est le suivant. Prenons

$$R = \mathbb{Q}[w_1 , \dots , w_k] \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} ,$$

où $w_1 , \dots , w_k$ sont des indéterminées sur $\mathbb{Q}$. Ici,

$$\text{gl. dim } R = \max \{\text{gl. dim } \mathbb{Q}[w_1 , \dots , w_k] , \text{ gl. dim } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\} = \max \{k + 0 , 0\} = k ,$$

et $m(R) = 0$, car si $I$ est un idéal propre de $R$ contenant un nombre entier $n$, alors $n \in I \cap \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{Q}[X]$, ce qui entraîne $I \cap \mathbb{Q}[X] = \mathbb{Q}[X]$ $(X = w_1 , \dots , w_k)$, d'où $\mathbb{Q}[w_1 , \dots , w_k] \subseteq I$, d'où

$$I = \mathbb{Q}[w_1 , \dots , w_k] \oplus I \cap (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

ce qui donne $I = \mathbb{Q}[w_1 , \ldots , w_k]$ ou $I = R$ et, dans les deux cas, on a $\dim_R R/I = 0$ .Puisque

$$A_n(R) = A_n(\mathbb{Q}[w_1 , \ldots , w_k]) \oplus A_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

le théorème 6.6 montre que

$$\text{gl. dim } A_n(R) = \max \{\text{gl. dim } A_n(\mathbb{Q}[w_1 , \ldots , w_k]) , \text{ gl. dim } A_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\}$$
$$= \max \{k + n , 2n\} .$$

Donc $\Delta_n(R) = 1$ pour $n \leq k$ , et $\Delta_n(R) = 2$ pour $n > k$ .

Dans le cas non commutatif, la situation peut être plus complexe, ce qui est illustré dans les exemples suivants.

Exemple 7.1 - Par [9] (p. 513), nous savons que $A_S(\mathbb{Q})$ possède un corps de fractions que nous noterons $R$ . Notons encore $u_i$ et $v_i$ les $X_i$ et les $t_i$ dans $R$ . Si $n \leq s$ , le groupe additif de $R$ a une structure de $A_n(R)$-module à gauche donnée par la $R$-structure à gauche usuelle et par $X_i\, r = rv_i$ , $t_j r = ru_j$ . On a alors $R$ noethérien à gauche et $R$ , $A_n(R)$-module à gauche de type fini sur $R$ , donc

$$\text{l. dim}_{A_n(R)} R = \text{l. dim}_R R + 2n = 2n \quad \text{par le corollaire 5.1 (b).}$$

De plus, par le lemme 6.1,

$$\text{gl. dim } A_n(R) \leq \text{gl. dim } R + 2n ,$$

donc gl. dim $A_n(R) = 2n$ pour $n \leq s$ , ce qui donne $\Delta_n(R) = 2$ pour $n < s$ .
D'autre part, il est clair que, pour tout $n$ , $A_n(R)$ peut être obtenu à partir de $A_{n+s}(\mathbb{Q})$ en tant qu'anneau de fractions. Ainsi $A_n(R)$ est plat à la fois en tant que $A_{n+s}(\mathbb{Q})$-module à gauche et $A_{n+s}(\mathbb{Q})$-module à droite (cf. [15], p. 170, théorème 6) et

$$A_n(R) \otimes_{A_{n+s}(\mathbb{Q})} A_n(R) \simeq A_n(R) \quad \text{(cf. [15], p. 169, théorème 5)}$$

Par conséquent, par le lemme 2.b.2 de [3] )p. 69), on a

$$\text{gl. dim } A_n(R) \leq \text{gl. dim } A_{n+s}(\mathbb{Q}) = n + s .$$

Mais alors si $n > s$ , $n + s < 2n$ , donc $\Delta_n(R) = 1$ .

Exemple 7.2. - Soit $R$ le corps gauche défini dans l'exemple 7.1. Alors

$$A_n(R [w_1 , \ldots , w_k]) = A_n(R)[w_1 , \ldots , w_k] ,$$

d'où

$$\text{gl. dim } A_n(R[w_1 , \ldots , w_k]) = \text{gl. dim } A_n(R) + k .$$

et si $S = R[w_1 , \ldots , ww_k] \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , on aura $\Delta_n(S) = 2$ pour $n \leq s$ ou $n > s + k$ , et $\Delta_n(S) = 1$ sinon. En effet,

$$\text{gl. dim } A_n(S) = \max \{\text{gl. dim } A_n(R[w_1 , \ldots , w_k]) , \text{ gl. dim } A_n(R/2R)\} .$$
$$= \max \{\text{gl. dim } A_n(R) + k , 2n\} .$$

Si $n \leq s$ , le maximum est $2n + k$ , donc $\Delta_n(S) = 2$ . Si $n > s$ ,

$$\text{gl. dim } A_n(R) = n + s ,$$

car gl. dim $A_s(R) = 2s$ , et $\Delta_n(R) = 1$ pour $n > s$ . Pour $n > s + k$ , $n+s+k < 2n$, donc $\Delta_n(S) = 2$ et, pour $n \leqslant s + k$ et $n \leqslant s$ , $n + s + k > 2n$ , donc $\Delta_n(S) = 1$ .

Exemple 7.3. - Soit de nouveau R le corps gauche de l'exemple 7.1 avec $s > 1$ , et $R' = R \oplus \underset{\sim}{Q}[w_1 , \ldots , w_k]$ avec $k < s$ . Alors on a gl. dim $A_n(R') = n + k$ pour $0 \leqslant n \leqslant k$ , $2n$ pour $k \leqslant n \leqslant s$ , et $n + s$ pour $s \leqslant n$ . En effet,

$$\text{gl. dim } A_n(R') = \max \{\text{gl. dim } A_n(R) , k + n\} .$$

Si $n \leqslant s$ , gl. dim $A_n(R) = 2n$ , donc gl. dim $A_n(R') = 2n$ si $n \geqslant k$ , $k + n$ si $n \leqslant k$ ; et si $n \geqslant s$ , gl. dim $A_n(R') = \max \{n + s , n + k\}$ avec $k < s$ , donc gl. dim $A_n(R') = n + s$ . D'où $\Delta_n(R') = 1$ pour $0 \leqslant n \leqslant k$ , 2 pour $k < n \leqslant s$ , et 1 pour $s < n$ . Cet exemple est dû à K. R. GOODEARL et à J. T. STAFFORD, indépendamment. Nous avons donc exhibé les suites possibles suivantes pour $\Delta_n(R)$ :

1 , 1 , 1 , ...

1 , 1 , 1 , ... , 1 , 2 , 2 , ...

2 , 2 , ... , 1 , 1 , ...

2 , 2 , 2 , ... , 2 , 1 , 1 , ... , 1 , 2 , 2 , ...

1 , 1 , 1 , ... , 1 , 2 , 2 , ... , 2 , 1 , 1 , ...

En effet, GOODEARL et STAFFORD ont remarqué indépendamment que l'on pouvait construire un anneau R tel que $\Delta_n(R)$ soit n'importe quelle suite de 1 et de 2 , à condition qu'elle soit constante à partir d'un certain rang.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] AUSLANDER (M.) and BUCHSBAUM (D.). - Homological dimension in local rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 85, 1957, p. 390-405.

[2] BHATWADEKAR (S. M.). - On the global dimension of Ore-extensions, Nagoya math. J., t. 50, 1973, p. 217-225.

[3] BJÖRK (J. E.). - The global homological dimension of some algebras of differential operators, Invent. Math., t. 17, 1972, p. 67-78.

[4] BOURBAKI (N.). - Algèbre. Chap. 2. - Paris, Hermann, 1962 (Act. scient. et ind., 1236 ; Bourbaki, 6).

[5] BOURBAKI (N.). - Algèbre. Chap. 8. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1261 ; Bourbaki, 23).

[6] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algèbra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[7] FAITH (C.). - Algebra : Rings, modules and categories, I. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 190).

[8] FIELDS (K.). - On the global dimension of skew polynomial rings. An addendum, J. of Algebra, t. 14, 1970, p. 528-530.

[9] GEL'FAND (I. M.) et KIRILLOV (A. A.). - Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie. - Paris, Presses universitaires de France, 1966 (Institut des Hautes Etudes scientifiques. Publications mathématiques, 31, p. 5-20).

[10] GOODEARL (K. R.). - Global dimension of differential operator rings, Proc. Amer. math. Soc., t. 45, 1974, p. 315-322.

[11] GOODEARL (K. R.). - Global dimension of differential operator rings, II, Trans. Amer. math. Soc., t. 209, 1975, p. 65-85.

[12] GOPALAKRISHNAN (N. S.) and SRIDHARAN (R.). - Homological dimension of Ore-extensions, Pacific J. Math., t. 19, 1966, p. 67-75.

[13] KAPLANSKY (I.). - Commutative rings. - London, Queen Mary College, Dept of Math., 1966 (Queen Mary College. Mathematics Notes).

[14] KAPLANSKY (I.). - Commutative rings. - Boston, Allyn and Bacon, 1970.

[15] NORTHCOTT (D. G.). - An introduction to homological algebra. - Cambridge, at the University Press, 1966.

[16] ROOS (J. E.). - Détermination de la dimension homologique globale des algèbres de Weyl, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, 1972, Série A, p. 23-26.

[17] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). - Commutative algebra. - Princeton, D. Van Nostrand - Reinhold, 1958.

(Texte reçu le 6 juin 1977)

Maryse DESROCHERS
Cascadilla Hall, Room 431
Cornell University
ITHACA, N. Y. 14853 (Etats-Unis)