JAK ALEV

Systèmes de générateurs normalisants

Groupe d'étude d'algèbre, tome 1 (1975-1976), exp. nº 4, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=GEA_1975-1976__1__A4_0>

Groupe d'étude d'ALGÈBRE
(Marie-Paule MALLIAVIN)
1re année, 1975/76, n° 4, 9 p.

5 avril 1976

SYSTÈMES DE GÉNÉRATEURS NORMALISANTS

par Jak ALEV

1. Introduction

Tous les anneaux sont unitaires. Toutes lesalgèbres de Lie sont de dimension finie sur un corps de **caractéristique** 0 .

Définition 1.1.- Soient A un anneau, et $Z(A)$ son centre. Une famille finie d'éléments de A , $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ est un système centralisant si

(i) $x_1 \in Z(A)$,

(ii) $x_i \in Z(A/(x_1 , x_2 , \ldots , x_{i-1}))$ avec $2 \leqslant i \leqslant n$.

Soit $N(A) = \{a \; ; \; aA = Aa\}$. Une famille finie d'éléments $x_1 , x_2 , \ldots, x_n$ de A , est un système normalisant si

(i) $x_1 \in N(A)$,

(ii) $x_i \in N(A/(x_1 , x_2 , \ldots , x_{i-1}))$ avec $2 \leqslant i \leqslant n$.

Un système centralisant est normalisant.

Remarque 1.2. - Si $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ est un système normalisant, on a

$$(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) = x_1 A + x_2 A + \ldots + x_n A = Ax_1 + Ax_2 + \ldots + Ax_n ,$$

comme on peut le voir par récurrence sur n .

Exemple 1.3 (Mc CONNELL). - Soit U l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ résoluble de dimension finie sur un corps algébriquement clos et de caractéristique zéro. Alors, tout idéal bilatère de U est engendré par un système normalisant.

2. Le théorème d'intersection de Krull.

LEMME 2.1 (GOLDIE). - Soient A un anneau commutatif noethérien, et I , J , K trois idéaux de A tels que :

Il existe une suite d'éléments $i_1 , i_2 , \ldots , i_n , \ldots \in I$; il existe $x \in A$ tels que

$$x - i_n x \in (J + K)^n , \quad n = 1 , 2 , 3 , \ldots ;$$

alors, il existe une suite d'éléments $p_1 , p_2 , \ldots , p_n , \ldots \in I + J$ tels que

$$x - p_n x \in K^n , \quad n = 1 , 2 , 3 , \ldots .$$

Ce lemme est équivalent au théorème d'intersection de Krull. En effet, prenons $I = K = 0$ et $x \in \bigcap_{n \geqslant 1} J^n$. Les conditions du lemme sont satisfaites. Il existe alors $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots \in J$, tels que $x = p_n x$, ce qui est le théorème d'intersection de Krull. Inversement, la condition $x - i_n x \in (J + K)^n$ implique par récurrence sur n, que $x \in (I + J + K)^n$, et alors $x \in \bigcap_{n\geqslant 1} (I + J + K)^n$. D'après le thèorème d'intersection de Krull, il existe un élément $a_n \in (I + J + K)^n$ tel que $x = a_n x$. On peut écrire

$$a_n = p_n + k_n \quad \text{avec} \quad p_n \in I + J \quad \text{et} \quad k_n \in K^n .$$

D'où $x - p_n x \in K^n$.

La démonstration de ce lemme n'utilise ni la décomposition primaire, ni le lemme d'Artin-Rees. C'est cette démonstration que Mc CONNELL généralise grâce aux systèmes centralisants et obtient alors comme corollaire :

THÉORÈME 2.2 [2]. - Soient A un anneau noethérien à droite, et I un idéal engendré par un système centralisant. Soit $x \in Z(A) \cap I^{\omega}$ $(I^{\omega} = \bigcap_{n\geqslant 1} I^n)$. Il existe alors un élément $t \in I$ tel que $x = xt$.

COROLLAIRE 2.3. - Soient A un anneau premier, noethérien à droite, et I un idéal, $I \neq A$, engendré par un système centralisant. Alors, $I^{\omega} \cap Z(A) = 0$.

Preuve. - En effet, si $x \in Z(A) \cap I^{\omega}$, il existe, d'après le théorème 2.2, $t \in I$ tel que $x = xt$, d'où

$$x(1 - t) = 0 \quad \text{et} \quad xA(1 - t) = 0 .$$

Donc $x = 0$.

3. - Anneaux pondérés.

Définition 3.1. - Soient A un anneau, et S une partie génératrice de A. On dit que A est pondéré s'il existe une application $h : A \dashrightarrow \underset{\sim}{N}$ telle que

(i) $h(a) = 0$ si, et seulement si, $a = 0$,

(ii) $h([s, a]) < h(a)$, $(\forall s \in S)$ et $(\forall a \in A)$, $a \neq 0$.

Lorsqu'il en est ainsi on dit que h est une fonction de hauteur sur A

Exemple 3.2 (Mc CONNELL). - Soit U l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$; U est un anneau pondéré.

LEMME 3.3. - Soit A un anneau pondéré par rapport à la partie génératrice S. Alors

(i) Tout anneau quotient A/I est pondéré,

(ii) Si I est un idéal bilatère non nul de A, $I \cap Z(A) \neq 0$.

Preuve.

(i) Définissons $\bar{h}(\xi) = \min\{h(a) ; \bar{a} = \xi\}$. $\bar{h}$ est une fonction de hauteur sur $\bar{A} = A/I$, par rapport à la partie génératrice $\bar{S}$, image de S dans $\bar{A}$.

(ii) Soit $0 \neq y \in I$ de hauteur minimum. Alors

$$\forall s \in S, \quad h(sy - ys) < h(y)$$

Mais comme $sy - ys \in I$, on obtient $sy - ys = 0$. Donc $y \in Z(A)$.

THÉORÈME 3.4. - Soit A un anneau pondéré, noethérien bilatère. Tout idéal bilatère I de A , est engendré par un système centralisant.

Preuve. - Soit $0 \neq a_1 \in I \cap Z(A)$. Par récurrence, on construit une suite d'éléments de I , $a_1 , a_2 , \ldots , a_k$, tels que

(i) $a_1 \in Z(A)$,

(ii) $a_i \in Z(A/(a_1 , \ldots , a_{i-1}))$ avec $2 \leqslant i \leqslant k$,

(iii) $(a_1) \subset (a_1 , a_2) \subset (a_1 , a_2 , a_3) \ldots$.

Mais l'anneau étant noethérien bilatère, il existe un entier n tel que $I = (a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$.

COROLLAIRE 3.5. - Soit A un anneau pondéré, premier et noethérien à droite. Si I est un idéal bilatère de A , $I \neq A$, $I^{\omega} = 0$.

Preuve. - En effet, si $I^{\omega} \neq 0$, on a $I^{\omega} \cap Z(A) \neq 0$, d'après le lemme 3.3 ; I^{ω} est engendré par un système centralisant, d'après le th. 3.4 ; et alors $I^{\omega} \cap Z(A) = 0$, d'après le corollaire 2.3. Donc $I^{\omega} = 0$.

En particulier, le théorème d'intersection est vrai dans l'algèbre enveloppante U d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ nilpotente.

4. Propriété d'Artin-Rees et localisation.

Définition 4.1. - Soient A un anneau noethérien à droite, et I un idéal bilatère de A . On dit que I vérifie la propriété d'Artin-Rees si, pour tout idéal à droite E , il existe un entier n tel que

$$E \cap I^n \subseteq EI .$$

THÉORÈME 4.2.

(i) Soient A un anneau noethérien à droite, et I un idéal de A engendré par un système centralisant. Alors I a la propriété d'Artin-Rees (cf [6]).

(ii) Soient A un anneau noethérien à droite, et I un idéal de A engendré par un système fini d'éléments normalisants (i. e. d'éléments de $N(A)$). Alors I a la propriété d'Artin-Rees [2].

La propriété d'Artin-Rees donne une caractérisation de l'algèbre enveloppante U d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ nilpotente.

THÉORÈME 4.3. - Soient $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension finie et U son algèbre enveloppante. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) $\mathcal{G}$ est nilpotente,

(ii) tout idéal de U a la propriété d'Artin-Rees.

Définition 4.4. - Soient A un anneau, P un idéal premier de A , et

$$\mathcal{C}(P) = \{c \ ; \ c + P \text{ est régulier dans } A/P\} .$$

On dit que P est <u>localisable</u> si, quels que soient $r \in R$ et $c \in \mathcal{C}(P)$, il existe $r_1 \in R$ et $c_1 \in \mathcal{C}(P)$ tels que

$$rc_1 = cr_1 .$$

THÉORÈME 4.5 [8]. - Soient A un anneau noethérien à droite, et P un idéal premier de A. Supposons qu'il existe un idéal bilatère I, tel que $I \subseteq P$, et que I soit engendré par un système centralisant. Alors P est localisable si, et seulement si, P/I est localisable.

COROLLAIRE 4.6. - Si A est un anneau noethérien à droite, et P un idéal premier de A engendré par un système centralisant, alors P est localisable.

Définition 4.7. - Un anneau A est dit <u>classique</u>, si tout idéal premier de A est localisable.

Exemple 4.8. - L'algèbre enveloppante U d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ nilpotente de dimension finie est un anneau classique.

5. Le Primidealsatz et le Hauptidealsatz de Krull.

Définition 5.1. - Soient A un anneau, et $J(A) = \{a \; ; \; aA \subset Aa\}$. Une famille finie d'éléments de A, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, forme un <u>système idéalisant</u> si

(i) $x_1 \in J(A)$,

(ii) $x_i \in J(A/(x_1, \ldots, x_{i-1}))$ avec $2 \leqslant i \leqslant n$.

Si P est un idéal premier d'un anneau A, on définit $ht(P)$ par le sup des longueurs des chaînes d'idéaux premiers

$$P = P_0 \supsetneq P_1 \supsetneq \ldots \supsetneq P_k .$$

On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 5.2 [8]. - Soit A un anneau classique noethérien à droite. Si I est un idéal de A engendré par un système idéalisant $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, et P un idéal premier minimal sur I, alors $ht(P) \leqslant n$

Le cas $n = 1$, est le Hauptidealsatz.

6. Anneaux locaux réguliers.

Définition 6.1. - Un anneau A est dit <u>local</u>, si les éléments non inversibles de A forment un idéal noté par $\mathfrak{M}$.

On va noter par $K(A)$ le sup des longueurs des chaînes d'idéaux premiers

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_k .$$

On va noter par $K\text{-dim}(A)$ la dimension de Krull de A, définie par GABRIEL et RENTSCHLER.

Enfin, un système normalisant (resp. centralisant), $x_1, x_2, \ldots, x_n$, est dit une <u>A-suite normalisante</u> (resp. centralisante), si

(i) x_1 est régulier dans A,

(ii) x_i est régulier dans $A/(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$ avec $2 \leq i \leq n$:

<u>Définition</u> 6.2. - Soit A un anneau local, noethérien à droite, et $\mathfrak{M}$ son idéal maximal. On dit que A est un anneau <u>local régulier de dimension</u> n, si $\mathfrak{M}$ peut être engendré par une A-suite normalisante de n éléments.

On désigne par $J(A)$ le radical de Jacobson de A.

LEMME 6.3. - <u>Soient</u> A <u>un anneau noethérien à droite, et</u> $x \in N(A) \cap J(A)$, x <u>régulier. Si</u> $I = xA = Ax$, <u>on a</u>

(i) <u>l'anneau</u> A <u>est premier, si</u> I <u>est premier,</u>

(ii) <u>l'anneau</u> A <u>est intègre, si</u> I <u>est complètement premier.</u>

<u>Preuve</u>. - D'après 4.2, I a la propriété d'Artin-Rees. Soit $x \in I^{\omega}$. Prenons $E = xA$. Il existe un entier n tel que

$$E = E \cap I^n \subseteq EI .$$

On a alors $xA \subseteq xI$.

Il existe $t \in I \subset J(A)$, tel que $x = xt$; d'où $x(1 - t) = 0$, et $x = 0$, car $1 - t$ est inversible dans A, puisque $t \in J(A)$. Donc $I^{\omega} = 0$.

(i) Supposons I premier, et $aAb = 0$ avec $a \neq 0$.
Alors si $aAb \subset I$, on a $b \in I$, ou bien $a \in I$.
Supposons $a \in I$, alors il existe n entier $\geqslant 0$, tel que $a \in I^n$ et $a \notin I^{n+1}$; on a alors $a = x^n c$ avec $c \notin I$, comme x^n est régulier, on a $cAb = 0$, d'où $cAb \subset I$ et $b \in I$.
Donc dans tous les cas, $b \in I$.

Montrons que $b = 0$. Sinon, $b \in I^m$ et $b \notin I^{m+1}$, $b = dx^m$, $d \in I$, d'où $cAd = 0$ et $cAd \subset I$, avec $c \notin I$ et $d \notin I$, ce qui contredit le fait que I est premier.

Donc $b = 0$, et A est premier.

(ii) La démonstration est parallèle à celle de (i).

THÉORÈME 6.4 [9]. - <u>Soit</u> A <u>un anneau noethérien à droite, et</u> $\mathfrak{M}$ <u>un idéal maximal tel que</u>

(i) $\mathfrak{M} = J(A)$,

(ii) $A/\mathfrak{M}$ <u>artinien,</u>

(iii) $\mathfrak{M}$ <u>est engendré par une</u> <u>A-suite normalisante contenant</u> n <u>éléments. Alors</u> $\text{gl dh } A = \text{dh}_A A/\mathfrak{M} = K(A) = \text{K-dim}(A) = n$ <u>et</u> A <u>est un anneau premier. Si</u> A <u>est local, alors</u> A <u>est intègre.</u>

La démonstration de ce théorème utilise le lemme suivant :

LEMME 6.5. - <u>Soit</u> A <u>un anneau noethérien à droite, et</u> $I \subset J(A)$. <u>Si</u> I <u>est engendré par une</u> <u>A-suite normalisante avec</u> n <u>éléments, on a</u>

(i) $\mathrm{gl\ dh}\ A = \mathrm{gl\ dh}\ A/I + n$,

(ii) $\mathrm{K\text{-}dim}\ A = \mathrm{K\text{-}dim}\ A/I + n$.

Preuve du théorème 6.4. - D'après le lemme, on a

$$\mathrm{gl\ dh}\ A = \mathrm{gl\ dh}\ A/\mathfrak{M} + n$$

$$\mathrm{K\text{-}dim}\ A = \mathrm{K\text{-}dim}\ A/\mathfrak{M} + n$$

d'où

$$\mathrm{gl\ dh}\ A = \mathrm{K\text{-}dim}\ A = n\ .$$

Nous allons démontrer que

$$K(A) = \mathrm{dh}_A\ A/\mathfrak{M} = n,$$

et A est un anneau premier par récurrence sur n .

Si $\underline{n = 1}$ on a $\mathfrak{M} = Ax = xA$, l'idéal $\mathfrak{M}$ est premier, et d'après le lemme 6.3 , l'anneau A est premier. $(0) \subset \mathfrak{M}$ est une chaîne d'idéaux premier, d'où $K(A) \geqslant 1$. Mais $K(A) \leqslant \mathrm{K\text{-}dim}\ A = A$. Donc $K(A) = 1$. Montrons maintenant que $\mathrm{dh}_A\ A/\mathfrak{M} = 1$. Si $A/\mathfrak{M}$ était projectif, il existerait un idéal à droite B de A tel que $A = \mathfrak{M} \oplus B$. Mais alors $B\mathfrak{M} = 0$ et alors $Bx = 0$. Comme x est un élément régulier on aurait $B = 0$, contradiction. Donc $\mathrm{dh}_A\ A/\mathfrak{M} \geqslant 1$. Mais comme $\mathrm{gl\ dh}\ A = 1$, on a $\mathrm{dh}_A\ A/\mathfrak{M} = 1$.

Supposons $\underline{n > 1}$. Soit, x_1 , x_2 , ... , x_n , une A-suite normalisante de $\mathfrak{M}$ et $I = x_1 A = Ax_1$. Considérons $\overline{A} = A/I$. $\overline{\mathfrak{M}}$ est l'unique idéal maximal de $\overline{A}$. $\overline{\mathfrak{M}} = J(\overline{A})$. $\overline{A}/\overline{\mathfrak{M}} \simeq A/\mathfrak{M}$ artinien, et $\overline{\mathfrak{M}}$ est engendré par la $\overline{A}$-suite normalisante $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$, ... , $\overline{x}_n$. Donc $K(A) = \mathrm{dh}_{\overline{A}}\ \overline{A}/\overline{\mathfrak{M}} = n - 1$, et $\overline{A}$ est un anneau premier. I est alors un idéal premier, et il s'ensuit que A est un anneau premier, d'après le lemme 6.3.

On a

$$K(A) \geqslant K(\overline{A}) + 1 = n \quad \text{et} \quad K(A) \leqslant n = \mathrm{K\text{-}dim}\ A\ . \ \text{D'où} \ K(A) = n\ .$$

D'autre part,

$$\mathrm{dh}_A\ \overline{A}/\overline{\mathfrak{M}} = \mathrm{dh}_{\overline{A}}\ \overline{A}/\overline{\mathfrak{M}} + 1 = n$$

et puisque $\overline{A}/\overline{\mathfrak{M}}$ et $A/\mathfrak{M}$ sont des A-modules isomorphes, il s'ensuit que,

$$\mathrm{dh}_A\ A/\mathfrak{M} = n\ .$$

Supposons maintenant que A soit local, et montrons que A est intègre par récurrence sur n .

Si $\underline{n = 1}$ $\mathfrak{M} = Ax = xA$. Comme $\mathfrak{M}$ est complètement premier, A est intègre, par le lemme 6.3.

Soit $\underline{n > 1}$. Posons $\overline{A} = A/Ax_1$. Par hypothèse de récurrence $\overline{A}$ est intègre, et I complètement premier ; A est alors intègre, toujours d'après le lemme 6.3.

Exemple 6.6 [9]. - Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie sur un corps k , U son algèbre enveloppante, et P un idéal complètement premier de U engendré par une A-suite centralisante. Alors, U_P est un anneau local régulier, et son idéal maximal est engendré par une U_P-suite centralisante. Quand on prend pour P l'idéal dans U engendré par un idéal $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$, on trouve la situation ci-dessus avec la précision supplémentaire que U_P est alors un anneau local régulier de dimension $\dim \mathfrak{H}$. On peut se demander si en prenant k algébriquement clos, pour tout idéal premier P de U , U_P est un anneau local régulier. WALKER montre que c'est le cas pour l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie nilpotente de dimension 3 .

Remarque 6.7.
(i) Si $V(A)$ désigne le cardinal d'un système de générateurs à droite minimal de l'idéal maximal $\mathfrak{M}$ d'un anneau local régulier de dimension n , on n'a pas nécessairement $V(A) = n$, comme dans le cas commutatif.

En effet, en prenant $A = k[x , y , z]$ avec $xy - yx = z$, et $\mathfrak{M}$ l'idéal complètement premier engendré par la A-suite centralisante z , x , y , $A_{\mathfrak{M}}$ donne lieu à un anneau local régulier de dimension 3 , mais $V(A_{\mathfrak{M}}) = 2$, car $\mathfrak{M} = xA + yA$.
(ii) K. L. FIELDS a donné un exemple [5] d'un anneau noethérien à droite local A tel que

$$\text{gl dh } A = 2 \quad \text{et} \quad \text{dh}_A\, A/\mathfrak{M} = 1 \ .$$

Aussi, il ne semble pas être connu si la finitude de la dimension globale implique, ou non, que l'anneau soit intègre, bien que cela soit le cas si l'idéal singulier à droite de l'anneau est nul.

7. Le théorème d'Eisenbud-Evans.

D. EISENBUD et G. EVANS ont obtenu le résultat suivant.

THÉORÈME 7.1. - *Soit A un anneau commutatif noethérien de dimension de Krull n, et supposons que $A = B[X]$. Soit I un idéal de A . Il existe alors n éléments, $g_1 , g_2 , \ldots , g_n \in I$, tels que*

$$\sqrt{I} = \sqrt{(g_1 , g_2 , \ldots , g_n)} \ ,$$

où la racine d'un idéal j , $(\sqrt{J})$, est l'idéal des éléments nilpotents modulo J .
La version non commutative que nous donnons de ce théorème fait apparaître $n + 1$ paramètres, $g_1 , g_2 , \ldots , g_{n+1}$. D'autre part, on utilise la notion de K-dim au lieu de la dimension de Krull classique. Enfin on utilise la notion de radical d'un idéal $\text{rad } I = \bigcap_{I \subset P} P$ au lieu de $\sqrt{I}$. On obtient alors le théorème suivant.

THÉORÈME 7.2. - *Soit A un anneau semi-premier tel que $\text{K-dim } A \leqslant n$, et I un idéal bilatère de A engendré par un système normalisant, $x_1 , x_2 , \ldots , x_m$. Il existe alors $n + 1$ éléments , $g_1 , g_2 , \ldots , g_{n+1}$, dans I tels que*

$$\text{rad } I = \text{rad } (g_1 , g_2 , \ldots , g_{n+1}) \ .$$

La démonstration du théorème utilise le lemme suivant

LEMME 7.3. - Soit I un idéal bilatère de A, engendré par un système normalisant $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Soient c_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, des éléments réguliers de A, et J un idéal bilatère de A tels que $c_i x_i \in J$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Alors, l'élément régulier $c = \prod c_i$ a la propriété $cI \subset J$.

Preuve. - On raisonne par récurrence sur m. Si $m = 1$, alors $I = x_1 A = Ax_1$. Comme $c_1 x_1 \in J$, on a $c_1 x_1 A = x_1 I \subset J$.

Supposons $m > 1$, alors $I = I' + x_m A$, où $I' = x_1 A + \ldots + x_{m-1} A$. D'après l'hypothèse de recurrence, on a $c_1 c_2 \ldots c_{m-1} I' \subset J$, d'où

$$c_1 c_2 \ldots c_{m-1} c_m I' \subset J .$$

Soit $i \in I$, alors $i = i' + x_n a$. Donc,

$$c_1 c_2 \ldots c_{m-1} c_m(i' + x_m a) = c_1 c_2 \ldots c_m i' + c_1 c_2 \ldots c_m x_m a \in J .$$

Preuve du théorème 7.2. - On procède par récurrence sur n. Si $n = 0$, l'anneau A est artinien semi-premier, donc semi-simple. Tout idéal bilatère de A est engendré par un idempotent central.

Supposons $n > 1$, l'anneau A est semi-premier de K-dimension fini. Alors A est un anneau de Goldie, et admet donc un anneau total de fractions Q semi-simple. QI est un idéal à gauche de Q, engendré par un idempotent. On a

$$QI = Q(c^{-1} g_1) = Qg_1 , \text{ où } g_1 \in I .$$

Il existe alors des éléments réguliers c_i tels que $x_i = c_i^{-1} a_i g_1$, $1 \leqslant i \leqslant m$, et alors

$$c_i x_i = a_i g_1 ,$$

d'où $c_i x_i \in (g_1)$, et d'après le lemme 7.3, $c = \prod c_i$ est, tel que $cI \subset (g_1)$.

Si $(c) = A$, on a $(g_1) = I$.

Si $(c) \neq A$, $\operatorname{rad}(c) \neq A$. Considérons $\overline{A} = A/\operatorname{rad}(c)$; K-dim $\overline{A} \leqslant n - 1$, car $\operatorname{rad}(c)$ contient l'élément régulier c. L'idéal $\overline{I}$ est engendré par le système normalisant, $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m$. Par hypothèse de recurrence, on a

$$\operatorname{rad} \overline{I} = \operatorname{rad} (\overline{g}_2, \ldots, \overline{g}_{n+1}) \text{ avec } g_k \in I , \quad 2 \leqslant k \leqslant n + 1 .$$

Pour finir la démonstration, il suffit de montrer que $\operatorname{rad} I = \operatorname{rad}(g_1, g_2, \ldots, g_{n+1})$.

Si P est un idéal premier qui contient $g_1, g_2, \ldots, g_{n+1}$, $(c)I \subset (g_1) \subset P$, ce qui implique $I \subset P$ ou $(c) \subset P$. Mais comme $\overline{P} \supset \overline{I}$, on a encore $P \supset I$.

Du théorème précédent, il résulte le théorème suivant.

THÉORÈME 7.4. - Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie résoluble de dimension n sur un corps algébriquement clos, et de caractéristique zéro, et si U désigne son algèbre enveloppante, alors pour tout idéal bilatère de U il existe $g_1, g_2, \ldots, g_{n+1}$ éléments de I tels que

$$\sqrt{I} = \sqrt{(g_1 , g_2 , \dots , g_{n+1})} .$$

Preuve. - On a K-dim $U \leqslant n$, et tout idéal bilatère de U est engendré par un système normalisant. D'autre part, dans U , tout idéal premier est complètement premier, et le théorème précédent donne alors

$$\sqrt{I} = \sqrt{(g_1 , \dots , g_{n+1})} .$$

Remarque 7.5. - Dans le cas où $\mathfrak{g}$ est nilpotent, on a le même résultat qu'en 7.4 sans l'hypothèse pour le corps d'être algébriquement clos.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALEV (J.). - Un théorème d'Eisenbud-Evans dans les algèbres enveloppantes (à paraître).

[2] Mc CONNELL (J. C.). - The intersection theorem for a class of non-commutative rings, Proc. London math. Soc., 3rd Series, t. 17, 1967, p. 487-498.

[3] Mc CONNELL (J. C.). - Localization in enveloping rings, J. London math. Soc., t. 43, 1968, p. 421-428.

[4] DIXMIER (J.). - Algèbres enveloppantes. - Paris, Gauthier-Villars, 1974 (Cahiers scientifiques, 37).

[5] FIELDS (K. L.). - On the global dimension of residue rings, Pacific J. Math., t. 32, 1970, p. 345-349.

[6] GABRIEL (P.) et NOUAZÉ (Y.). - Idéaux premier de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente, J. of Algebra, t. 6, 1967, p. 77-99.

[7] GOLDIE (A. W.). - A note on the intersection theorem, J. London math. Soc., t. 34, 1959, p. 47-48.

[8] SMITH (P. F.). - Localization in group rings, Proc. London math. Soc., 3rd Series, t. 22, 1971, p. 69-90.

[9] WALKER (R.). - Local rings and normalizing sets of elements, Proc. London math. Soc., 3rd Series, t. 24, 1972, p. 27-45.

Jak ALEV
24 rue Jean Colly
75013 PARIS