HELMUT JÜRGENSEN

Extensions par union

Groupe d'étude d'algèbre, tome 1 (1975-1976), exp. n° 10, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=GEA_1975-1976__1__A10_0>

Groupe d'étude d'ALGÈBRE
(Marie-Paule MALLIAVIN)
1re année, 1975/76, n° 10, 5 p.
27 mai 1976

EXTENSIONS PAR UNION

par Helmut JÜRGENSEN

Je vais présenter une généralisation des idéaux d'un demigroupe. Cette généralisation m'a été suggérée par une généralisation de la théorie des extensions d'idéaux due à L. VERBEEK [10], [11] ; le rapport entre les deux notions généralisées est direct, et je vais le préciser tout de suite.

Dans cette note je ne vais donner ni les preuves ni tous les détails. On les trouve avec beaucoup d'autres résultats dans les oeuvres citées [4]-[8], [10], [11], en particulier dans [8]. Je vais seulement introduire quelques notions et énoncer quelques théorèmes comme exemples caractéristiques de la théorie.

L'idée est la suivante. Soit E un demigroupe, et A une partie de E. A définit une relation d'équivalence sur E,

$$\varkappa_A = \{(x , y) \; ; \; x , y \in E , \; x = y \; \text{ ou } \; x , y \in A\} .$$

Si A est un idéal à droite, alors $\varkappa_A$ est une congruence à droite. Inversement, $\varkappa_A$ est une congruence à droite si, et seulement si,

(*) $$\forall s \in E : \; As \subseteq A \;\vee\; |As| = 1 .$$

Cette propriété est utilisée pour la définition suivante.

1. Définition ([8], [4]). - Un sous-ensemble non vide A d'un demigroupe E, qui satisfait à la condition (*), est appelé un noyau de Rees à droite. A est un presqu'idéal à droite s'il est un noyau de Rees à droite et un sous-demigroupe de E.

Evidemment chaque idéal à droite est aussi un presqu'idéal à droite. Mais il y a beaucoup d'exemples de demigroupes avec des presqu'idéaux à droite, qui ne sont pas des idéaux à droite, et aussi avec des noyaux de Rees à droite, qui ne sont pas des presqu'idéaux à droite ([8], [4]).

De la même manière, on obtient les notions de noyau de Rees à gauche et de presqu'idéal à gauche. De plus, on définit les notions bilatères correspondantes de la manière habituelle.

Exemple. - Soit $E = \{1, 2, 3\}$ le demigroupe de zéros à droite d'ordre 3. Chaque sous-ensemble non-vide est un presqu'idéal de E.

On obtient la simple propriété suivante

1° Si A est un noyau de Rees, alors A est un sous-demigroupe ou A^2 est un seul élément ([8], [4]).

Dans cette note, je considérerai surtout les presqu'idéaux. On trouve des théorèmes particuliers sur les noyaux de Rees et les extensions correspondantes dans [8].

La comparaison montre qu'il y a beaucoup de propriétés communes aux idéaux, aux presqu'idéaux et aux noyaux de Rees, par exemple,

2° On obtient certaines généralisations des théorèmes d'isomorphie pour la factorisation par les noyaux de Rees ou par des presqu'idéaux ([8],[4]).

3° L'ensemble des noyaux de Rees ou des presqu'idéaux d'un demigroupe donné est fermé par rapport aux opérations d'union et d'intersection (à quelques exceptions près), qui causent certaines difficultés dans le reste de la théorie ([8], [4]).

Par exemple, chaque élément d'un demigroupe E est un noyau de Rees, chaque élément idempotent est un presqu'idéal. Par conséquent, il y a des noyaux de Rees ou des presqu'idéaux d'un demigroupe dont l'intersection est vide. Dans ce cas, l'intersection n'est pas un noyau de Rees par définition, également dans ce cas, leur union peut ne pas être un noyau de Rees. On peut trouver un demigroupe E ayant deux presqu'idéaux maximaux A_1 , A_2 , qui sont disjoints et dont l'union n'est pas le demigroupe E . Par suite, en considérant des chaînes de presqu'idéaux on aura (peut-être) des chaînes totalement différentes, car en commençant par $E/\varkappa_{A_1}$ on n'obtiendra aucune contribution de A_2 , et vice versa. Dans le cas des idéaux, cette contribution serait l'intersection de A_1 et A_2 . Donc si on veut obtenir un théorème de Jordan-Hölder pour la factorisation par les presqu'idéaux, il n'est pas suffisant de considérer les presqu'idéaux maximaux seuls, mais il faut regarder des familles maximales de presqu'idéaux. Soit $\mathfrak{B}$ une famille de presqu'idéaux de E . Elle est une famille maximale dans A , si chaque élément de $\mathfrak{B}$ est une partie propre de A , et si cette condition est violée pour chaque augmentation de $\mathfrak{B}$ ou des éléments de $\mathfrak{B}$.

2. <u>Définition</u> [8]. - Soient E un demigroupe, A une partie de E , $\mathfrak{B}$ une famille de presqu'idéaux de E . $\mathfrak{B}$ est une <u>famille de presqu'idéaux maximale</u> dans A , si $\mathfrak{B}$ satisfait aux conditions suivantes

1° $B \in \mathfrak{B} \longrightarrow B \subset A$.

2° $B \in \mathfrak{B}$, C un presqu'idéal de E ,

$$B \subsetneq C \subsetneq A \longrightarrow C = B \ \vee\ C = A \ \vee\ \exists\, B' \in \mathfrak{B}\backslash\{B\} : \ C \cap B' \neq \emptyset .$$

3° $B , B' \in \mathfrak{B} \longrightarrow B \cap B' = \emptyset \ \vee\ B = B'$.

4° $C \subsetneq A$, C un presqu'idéal de $S \longrightarrow \exists\, B \in \mathfrak{B} : \ C \cap B \neq \emptyset$.

5° $B , B' \in \mathfrak{B}$, $B \neq B' \longrightarrow$ le presqu'idéal engendré par $B \cup B'$ contient A .

<u>Exemple</u>. - Dans l'exemple mentionné, les familles $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$ sont les familles maximales dans E .

Pour une famille $\mathfrak{B}$ de presqu'idéaux disjoints, la relation $\varkappa_{\mathfrak{B}} = \bigcup_{A\in\mathfrak{B}} \varkappa_A$ est une relation de congruence. Evidemment, si $\mathfrak{B}$ est une partition de E , alors $E/\varkappa_{\mathfrak{B}}$ est un demigroupe idempotent. Par analogie avec les séries principales, nous considérons l'ensemble de demigroupes quotients : $E/\varkappa_{\mathfrak{B}(E)}$, $A/\varkappa_{\mathfrak{B}(A)}$ pour chaque

$A \in \mathfrak{B}(E)$, etc., où $\mathfrak{B}(X)$ est une famille de presqu'idéaux de E maximale dans X. Au lieu d'une série d'idéaux, on obtient un graphe de familles de presqu'idéaux.

3. Définition [8]. - Soit E un demigroupe. Un graphe $D = (P , K)$, où P est l'ensemble des sommets, $K \subseteq P \times P$ l'ensemble des arcs, est un graphe principal de presqu'idéaux de E , si

1° $E \in P$, $\emptyset \in P$,

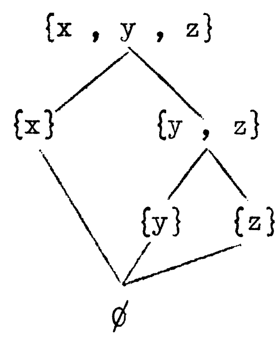
2° chaque $X \in P \setminus \{\emptyset\}$ est un presqu'idéal de E ,

3° P est fini,

4° pour $A \in P$ et $k(A) = \{B ; B \in P , (A , B) \in K\}$, soit $k(A)$ une famille de presqu'idéaux de E maximale dans A , soit $k(A) = \emptyset$, et A ne contient proprement aucun presqu'idéal de E .

On appelle quotient de D tout demigroupe $A/\varkappa_{k(A)}$ pour $A \in P$.

Dans le demigroupe de l'exemple, on a trois graphes principaux différents, qui sont tous isomorphes au graphe suivant :



4. THÉORÈME [8]. - Soient D_1 , D_2 deux graphes principaux de presqu'idéaux d'un demigroupe E , et soient N_1 , N_2 les familles de leurs quotients non-idempotents. Il y a une bijection $\gamma : N_1 \longrightarrow N_2$, telle que pour $X \in N_1$ $\gamma(X)$ soit isomorphe à X .

Pour obtenir ce résultat, on introduit des quotients principaux de presqu'idéaux comme généralisation des quotients principaux d'idéaux [8]. Je ne sais pas si on peut obtenir le même résultat pour les quotients idempotents. Mais même pour les quotients non-idempotents, ce théorème n'est pas une généralisation complète du cas des idéaux. Au contraire de la situation des séries principales d'idéaux, un demigroupe-quotient d'un graphe principal de presqu'idéaux peut lui-même contenir un presqu'idéal propre et non-trivial.

L'examen du problème inverse, celui de la construction d'un demigroupe à partir du graphe principal de presqu'idéaux nous conduit aux extensions de demigroupes par union.

5. Définition ([10], [11], [8]). - Soient A , S , E des demigroupes, i un élément idempotent de S . On dit que E est une extension par union de A par S relative à i s'il y a un isomorphisme φ de E sur S tel que $\varphi^{-1}(i) \simeq A$ et $|\varphi^{-1}(x)| = 1$ pour $x \neq i$.

Le théorème suivant est une simple conséquence de la définition

6. THÉORÈME [4]. - E <u>est une extension de</u> A <u>par union si, et seulement si,</u> E <u>possède un presqu'idéal isomorphe à</u> A .
A cause de ce theorème, on peut comparer les extensions d'idéaux et les extensions par union en utilisant les propriétés des presqu'idéaux. C'est également ce théorème qui m'a conduit à étudier les presqu'idéaux. Les extensions par union s'avèrent être un moyen assez utile pour le calcul de la structure d'un demigroupe fini sur ordinateur. On trouvera dans [1] la description d'un programme qui calcule des extensions par union.

Maintenant je vais formuler quelques théorèmes, qui caractérisent la situation relative des idéaux, des presqu'idéaux et des noyaux de Rees.

7. THÉORÈME [8]. - <u>Un noyau de Rees qui contient un sous-demigroupe est un presqu'idéal. Un presqu'idéal qui contient un idéal est lui même un idéal</u>.

Si par exemple, E est un demigroupe fini, aucun noyau de Rees, qui n'est pas un idéal, ne contient l'idéal minimal. Si l'intersection d'un tel noyau de Rees avec l'idéal minimal J est non vide, alors elle est un noyau de Rees de E contenu dans J , et donc un noyau de Rees propre de J . Ce cas est traité par le théorème suivant.

8. THÉORÈME [8], [5]. - <u>Soit</u> E <u>un demigroupe complètement</u> 0-<u>simple</u>, A <u>une partie non-vide de</u> E . A <u>est un noyau de Rees de</u> E , <u>si et seulement si</u>

1° $|A| = 1$, ou

2° $A = E$, ou

3° E n'a pas de diviseurs de 0, $A = E\backslash 0$, ou

4° $E\backslash 0$ est un demigroupe de zéros à droite, $A \subseteq E\backslash 0$, ou

5° $E\backslash 0$ est un demigroupe de zéros à gauche, $A \subseteq E\backslash 0$.

Dans les cas 2° et 5°, A est un presqu'idéal.
La preuve de ce théorème utilise les propriétés particulières des relations de Green dans un demigroupe complètement 0-simple. Je ne sais pas si on peut généraliser le théorème pour les demigroupes 0-simples. Certainement, on ne peut pas généraliser la preuve. Pour certaines classes de demigroupes 0-simples, mais non complètement 0-simples, ce problème est discuté dans [8].

Pour finir, voici quelques remarques, qui expliquent certains aspects de la situation générale.

(a) Les noyaux de Rees, les presqu'idéaux et les extensions par union peuvent être un moyen utile dans l'étude des demigroupes, en particulier des demigroupes finis. On peut s'attendre à des nouvelles ressources grâce au fait, que les graphes principaux de presqu'idéaux sont, en un certain sens, orthogonaux aux séries principales d'idéaux.

(b) Il y a une difficulté fondamentale pour la classification des extensions par union suivant la méthode appliquée par GRILLET et PETRICH (par exemple [2], [3], [9]) pour les extensions d'idéaux, et aussi pour la description des extensions par union. Il manque un objet, comme l'enveloppe des translations, qui peut tenir lieu de l'holomorphie. Néanmoins il est possible de donner une telle classification dans certains cas particuliers [8], [7].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRÜCK (R.) et JÜRGENSEN (H.). - On the computation of union-extensions of finite semigroups, Acta Cybernet., t. 2, 1973, p. 109-113.

[2] GRILLET (P. A.). - Sur les extensions idéales d'un demigroupe, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 18e année, 1964, n° 1, 27 p.

[3] GRILLET (P. A.). - Extensions idéales strictes et pures d'un demigroupe, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 18e année, 1964/65, n° 11, 21 p.

[4] JÜRGENSEN (H.). - Fastideal von Halbgruppen, Semigroup Forum, t. 9, 1974, p. 261-270.

[5] JÜRGENSEN (H.). - Fastideal in vollständig 0-einfachen Halbgruppen, Math. Slovaca, t. 26, 1976, p. 73-76.

[6] JÜRGENSEN (H.). - Vereinigungserweiterungen durch vollständig 0-einfache Halbgruppen, Semigroup Forum, t. 11, 1975, p. 185-188.

[7] JÜRGENSEN (H.). - Zur Charakterisierung von Vereinigungserweiterungen von Halbgruppen durch partielle Morphismen, Acta Sc. Math., Szeged, t. 38, 1976, p. 73-78.

[8] JÜRGENSEN (H.). - Rees-Kerne und Vereinigungserweiterungen von Halbgruppen. - Kiel, 1975.

[9] PETRICH (M.). - Introduction to semigroups. - Colombus, Bell and Howell Company, 1973 (Merrill Research and Lecture Series).

[10] VERBEEK (L. A. M.). - Semigroup extensions, Thèse, Delft, 1968.

[11] VERBEEK (L. A. M). - Union extensions of semigroups, Trans. Amer. math. Soc., t. 150, 1970, p. 409-423.

Helmut JÜRGENSEN
Mathematisches Seminar
der Christian-Albrechts-Universität
40-60 Olshausenstrasse
D-2300 KIEL
(Allemagne fédérale)