Jean-Pierre Wintenberger

Une généralisation du théorème de Tate-Sen-Ax

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 15 (1987-1988), p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1987-1988__15__1_0>

Groupe d'Etude d'Analyse Ultramétrique
(1987-1988)

UNE GENERALISATION DU THEOREME DE TATE-SEN-AX

par Jean-Pierre WINTENBERGER

RESUME. Soit R un anneau noethérien intègre normal de corps des fractions F de caractéristique 0. On suppose que le schéma Spec(R) peut être désingularisé. Soit $\overline{F}$ une clôture algébrique de F et $\overline{R}$ la clôture intégrale de R dans $\overline{F}$ soit x un élément de R. Nous prouvons que le sous-anneau de la complétion x-adique de $\overline{R}$ formé de ses éléments qui sont fixes par le groupe de Galois Gal($\overline{F}$/F) est la complétion x-adique de R[1].

Soient R, F, $\overline{F}$, $\overline{R}$ et x comme dans le résumé. Notons $\widehat{R}$ et $\widehat{\overline{R}}$ les complétions x-adiques de R et de $\overline{R}$ respectivement , $\widehat{R}=\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} R/x^nR$ et $\widehat{\overline{R}}=\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \overline{R}/x^n\overline{R}$. Soit G le groupe de Galois Gal($\overline{F}$/F); l'action de G sur $\overline{R}$ se prolonge à $\widehat{\overline{R}}$. Comme R est normal, l'homomorphisme naturel de $\widehat{R}$ dans $\widehat{\overline{R}}$ est une injection.

THEOREME. – *Notons* S *le schéma* Spec(R). *Supposons qu'il existe un schéma* S_{reg} *régulier et un morphisme propre birationnel* $\pi: S_{reg} \to S$. *Alors* $(\widehat{\overline{R}})^G \simeq \widehat{R}$.

PROPOSITION 1([1]) – *Pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *désignons par* $H^1(G,\overline{R})_{\{x^n\}}$ *le noyau de la multiplication par* x^n *dans* $H^1(G,\overline{R})$ *et soit* $T_x(H^1(G,\overline{R}))=\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^1(G,\overline{R})_{\{x^n\}}$, *l'homomorphisme de* $H^1(G,\overline{R})_{\{x^{n+1}\}}$ *dans* $H^1(G,\overline{R})_{\{x^n\}}$ *étant induit par la multiplication par* x. *Alors, on a un isomorphisme de* $\widehat{R}$-*modules de* $(\widehat{\overline{R}})^G/\widehat{R}$ *dans* $T_x(H^1(G,\overline{R}))$.

Démonstration. Les suites exactes de cohomologie galoisienne associées aux suites exactes:

$$0 \to \overline{R} \xrightarrow{x^n} \overline{R} \to \overline{R}/x^n\overline{R} \to 0\ ,$$

donnent des suites exactes :

$$0 \to R/x^nR \to (\overline{R}/x^n\overline{R})^G \to H^1(G,\overline{R})_{\{x^n\}} \to 0,$$

---

[1] Le texte qui suit est, à la remarque 4) près, le texte de la Note C.R. Acad. Sci. Paris, t. 307, Série 1, p.63-65, 1988.

qui donnent l'isomorphisme de la proposition. Le théorème résulte alors de la proposition suivante:

PROPOSITION 2.- *Si* F' *est une extension galoisienne finie de* F *contenue dans* $\overline{F}$, *on note* G' *son groupe de Galois,* R' *la fermeture intégrale de* R *dans* F' *et* $H^1(G',R')_{\{x^\infty\}}$ *le sous* R*-module de* $H^1(G',R')$ *formé de ses éléments qui sont tués par une puissance de* x. *Alors, sous les hypothèses du théorème, il existe un entier* a, *indépendant de* F', *tel que* $x^a\, H^1(G',R')_{\{x^\infty\}} = 0$.

On peut préciser a. Supposons $x \neq 0$. Notons $\mathrm{Supp}_R(x)$ l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de R contenant x ($\mathrm{Supp}_R(x)$ est donc un ensemble fini). Pour chaque $P \in \mathrm{Supp}_R(x)$, notons $\tilde{\ell}_P$ la caractéristique de R/PR et a_P un entier tel que $a_P=0$ si $\tilde{\ell}_P=0$, $x^{a_P} \in \tilde{\ell}_P R_P$ si $\tilde{\ell}_P>2$, $x^{a_P} \in 4.R_P$ si $\tilde{\ell}_P=2$. Soit a_0 un entier $\geq a_P$ pour tout $P \in \mathrm{Supp}_R(x)$. Soit d'autre part a_1 un entier tel que x^{a_1} annule le R-module noethérien formé des éléments de $H^1(S_{reg},O_{S_{reg}})$ qui sont tués par une puissance de x. Alors, on peut prendre $a = a_0 + a_1$.

Un argument classique utilisant une résolvante permet de prouver que si y est un élément de R', alors $\mathrm{tr}_{F'/F}(y)$ annule $H^1(G',R')$. En particulier, le degré [F': F] de l'extension F'/F annule $H^1(G',R')$.

COROLLAIRE.- *Supposons* R *régulier. Notons* r *le produit des nombres premiers divisant* [F': F]. *Alors* $H^1(G',R')$ *est tué par* r *si* 2 *ne divise pas* r, *et par* 2r *si* 2 *divise* r.

La démonstration de la proposition 2 utilise la propriété de pureté suivante :

PROPOSITION 3.-*Supposons* R *régulier. Alors, les idéaux premiers associés au* R*-module* $H^1(G',R')$ *sont de hauteur* 1.

Remarques:

1) Comme $H^1(G',R')$ est tué par [F': F], $H^1(G',R')=(0)$ si R est une $\mathbb{Q}$-algèbre et on a $(\hat{\overline{R}})^G \simeq \hat{R}$ dans ce cas.

2) On connaît l'existence de S_{reg} et π lorsque R est excellent de dimension ≤ 2, [2].

3) Le théorème est un théorème de J. T. Tate lorsque R est un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel parfait de caractéristique p, [3]. Sous les mêmes hypothèses que celles de J. T. Tate, c'est un théorème de S. Sen que $H^1(G,\overline{R})$ est tué par p, [1]. Si R est un anneau de valuation henselien à corps résiduel de caractéristique p, J. Ax a prouvé que $H^1(G,\overline{R})$ est tué par

p si $p\neq 2$ et par 4 si $p=2$, [4].

4) Soit O un anneau de valuation discrète complet de caractéristique mixte (0,p) à corps résiduel parfait ; on note K le corps des fractions de O. Soit R une O-algèbre plate, intègre, normale, essentiellement de type fini. Soit R' la fermeture intégrale de R dans une extension maximale non ramifiée de $R[1/p]$. Soit $\overline{F}$ la clôture algébrique de F dans $R'[1/p]$, $\overline{O}$ la fermeture intégrale de O dans $\overline{F}$, et $\Delta=\mathrm{Gal}(R'[1/p]/\overline{F}R[1/p])$. Alors, G. Faltings prouve [7] :

– $\widehat{R}'^{\Delta}=R\overline{O}$, si R est lisse sur O et R contient d unités dont les dérivées logarithmiques engendrent $\Omega^1_{R/O}$, ou d est la dimension relative de R sur O,

– $\widehat{R}'^{\Delta}[1/p]=\widehat{R\overline{O}}[1/p]$, si $R[1/p]$ est lisse sur le corps des fractions K de O, et R contient d unités dont les dérivées logarithmiques engendrent $\Omega^1_{R[1/p]/K}$.

Démonstration de la proposition 3. Supposons donc R régulier et soit P un idéal premier de R . Il s'agit de prouver que si la hauteur $ht(P)$ de P est $\neq 1$, P n'est pas associé au R-module $H^1(G',R')$. Comme $H^1(G',R')$ est de torsion, (0) n'est pas associé à R. Supposons donc $ht(P)\geq 2$; par localisation, on se ramène au cas ou R est local d'idéal maximal P. Soit δ annulé par P ; il s'agit de prouver que $\delta=0$.

Pour $y\in P$, notons $\mathrm{Supp}_R(y)$ l'ensemble des idéaux premier de hauteur 1 contenant y. On voit facilement que si y_1 et y_2 sont deux éléments non nuls de P, (y_1,y_2) est une suite régulière si et seulement si $\mathrm{Supp}_R(y_1)\cap\mathrm{Supp}_R(y_2)=\varnothing$.

Soit $x_1\in P$, $x_1\neq 0$. Comme P est de hauteur ≥ 2, P n'est pas contenu dans P^2 ni dans aucun des idéaux $P'\in\mathrm{Supp}_R(x_1)$, donc n'est pas contenu dans leur réunion ([5] (1.B)). Il existe donc $x_2\in P$, $x_2\notin P^2$ et $\mathrm{Supp}_R(x_2)\cap\mathrm{Supp}_R(x_1)=\varnothing$. On a la suite exacte :

$$0\to R/x_2R\to (R'/x_2R')^{G'}\to H^1(G',R')_{\{x_2\}}\to 0.$$

Soit $\hat{\delta}\in(R'/x_2R')^{G'}$ relevant δ . Soit i l'homomorphisme de R'/x_2R' dans le localisé $(R'/x_2R')_{x_1}$. Comme $\mathrm{Supp}_R(x_2)\cap\mathrm{Supp}_R(x_1)=\varnothing$, on a $\mathrm{Supp}_{R'}(x_2)\cap\mathrm{Supp}_{R'}(x_1)=\varnothing$. Par suite (x_1 , x_2) est une suite régulière dans R' et i est injectif. Comme $\hat{\delta}\in R'/x_2R'$, $i(\hat{\delta})$ est entier sur R/x_2R. Comme $x_1\delta=0$, $i(\hat{\delta})\in(R/x_2R)_{x_2}$. Comme $x_2\in P$ et $x_2\notin P^2$, R/x_2R est un anneau régulier ([5] (17.F)), donc normal. On voit donc que $\hat{\delta}\in R/x_2R$ et $\delta=0$ ce qui prouve la proposition.

Démonstration de la proposition 2. Supposons tout d'abord R régulier. Posons $M=H^1(G',R')_{\{x^\infty\}}$; il s'agit de prouver que M est tué par x^a. Comme M s'injecte dans le produit de ses localisés M_P pour P parcourant les idéaux premiers associés à $H^1(G',R')$, la proposition 3 permet de se ramener au cas ou R est un anneau de valuation discrète. Soit alors P l'idéal maximal de R. L'assertion est claire si $x \notin P$ ou si la caractéristique résiduelle de R est nulle, puisque R est alors une alors une $\mathbb{Q}$-algèbre (voir la remarque 1). Supposons donc que $x \in P$ et que la caractéristique résiduelle est $p \neq 0$; il s'agit de prouver que $H^1(G',R')$ est tué par p si $p \neq 2$ et par 4 si p=2. Lorsque R est complet, le théorème de J. Ax ([4]) permet de conclure. Pour R non nécessairement complet, comme $H^1(G',R')$ est un R-module de torsion et que $\hat{R}$ est plat sur R, on a :

$$H^1(G',R') = H^1(G',R') \otimes_R \hat{R} = H^1(G', R' \otimes_R \hat{R})$$

Soient P' un idéal de R' au dessus de P, $\hat{R}'$ le complété de R' pour la topologie P'-adique et D' le groupe de décomposition de P'. Le G'-module $R' \otimes_R \hat{R}$ s'identifie au module induit $\mathrm{Ind}_{D'}^{G'}(\widehat{R'})$ ([6] Chap.2, Prop.4) , d'où: $H^1(G',R') = H^1(D', \hat{R}')$, ce qui ramène au cas ou R est complet et achève de prouver la proposition lorsque R est régulier.

Pour achever de prouver la proposition 2, il suffit de voir que lorsqu'on a une désingularisation $\pi : S_{reg} \to S$, on a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ker}(H^1(S_{reg}, O_{S_{reg}}) \to H^1(S'', O_{S''})) \to H^1(G',R') \to H^0(S_{reg}, \tilde{H}^1(G', f_* O_{S''})),$$

où :

- S'' est la fermeture intégrale de S_{reg} relativement à Spec(F') et f le morphisme naturel de S'' dans S_{reg} ,
- $\tilde{H}^1(G',f_*O_{S''})$ est le faisceau cohérent sur S_{reg} dont la restriction à tout ouvert affine Spec(A) de S_{reg} est $H^1(G',A')$, où A' est la fermeture intégrale de A dans F'.
- si $\gamma \in \mathrm{Ker}(H^1(S_{reg}, O_{S_{reg}}) \to H^1(S'', O_{S''}))$ est représenté par un cocycle à la Cech $(f_{i_0,i_1}) \in \tilde{C}^1(\tilde{U}, O_{S_{reg}})$, il existe $(g_i) \in \tilde{C}^0(f^{-1}(\tilde{U}), O_{S''})$ avec $f_{i_0,i_1} = g_{i_1} - g_{i_0}$, alors, pour $\sigma \in G'$, $\sigma g_i - g_i$ ne dépend pas de i et appartient à R', et on associe à γ la classe de $(\sigma g_i - g_i)_{\sigma \in G'}$ dans $H^1(G',R')$,
- le morphisme de $H^1(G',R')$ dans $H^0(S_{reg}, \tilde{C}^1(G',f_*O_{S''}))$ est le morphisme défini par localisation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.Sen, *On automorphisms of local fields.*, Ann. of Math., 90 (1969), p.33-46 .

[2] H. Hironaka, *Desingularisation of Excellent Surfaces.*, 1967, publié dans Lect. Notes 1101, ou J. Lipman, *Desingularisation of two dimensonal schemes.*, Ann. of Math., 107 (1978), p.151-207.

[3] J. T. Tate, *p-divisible groups*, Proc. of a Conf. on Local Fields, Springer Verlag (1967), p.158-183 .

[4] J. Ax, *Zeros of polynomials over local fields-The Galois Action*, J. Algebra, 15 (1970), p.417-428.
[5] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, Second Edition , Mathematics lecture note series 56, The Benjamin/Cummings Publishing Company (1980).
[6] J.-P. Serre, *Corps Locaux*, Hermann (1968).
[7] G. Faltings, *P-Adic Hodge theory*, Journal of the A.M.S. 1 (1988), p.255-299.

J.-P. WINTENBERGER,
Université de Paris-Sud,
Mathématiques-U.A. 752, Bat. 425,
91405 Orsay Cedex-France.