BERNADETTE DESHOMMES

Sur les zéros des fonctions symétriques complètes (cas cubique)

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 14 (1986-1987), exp. n° 18, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1986-1987__14__A10_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
14eme année, 1986/87, n° 18 , 15 p. 27 avril 1987

Exposé n° 18

SUR LES ZEROS DES FONCTIONS SYMETRIQUES COMPLETES (CAS CUBIQUE)

par Bernadette DESHOMMES

Introduction Un problème fascinant, non trivial et d'un énoncé simple est le suivant: "déterminer les zéros d'une suite récurrente linéaire (s.r.l) dans le 2^d cas de la conjecture de Ward."

Une s.r.l cubique (u_n), à valeurs entières, est la donnée de 3 entiers non tous nuls u_0, u_1, u_2 et, d'une relation de récurrence à coefficients dans $\mathbb{Z}$:

$$(R) \qquad u_{n+3} = Su_{n+2} + Qu_{n+1} + Nu_n \quad , \quad (n \in \mathbb{N},\ N\neq 0).$$

Les zéros d'une suite (u_n) sont les solutions, $n\in\mathbb{N}$, de l'équation $u_n = 0$. $f(z) = z^3 - Sz^2 - Qz - N$, est le polynôme caractéristique de la récurrence. L'exemple du polynôme $f(z) = (z \pm a)(z^2 + a^2)$, $a\in\mathbb{Z}$, extrait de[**50**], montre qu'une suite peut avoir une infinité de zéros. Pour pallier à cette situation, on dispose d'un théorème de Mahler [**25**]:

une suite (u_n) possède un nombre fini de zéros si le rapport de deux quelconques des racines de f n'est pas une racine de l'unité. (le polynôme f est non dégénéré).

Le 2^d cas de la conjecture de Ward est réalisé quand le polynôme f est non dégénéré, irréductible, de discriminant négatif et $N\neq\pm 1$.

Après un rappel (§.1) et l'étude d'un cas particulier (§.2), le paragraphe 3 de cet exposé est consacré à la détermination des zéros des suites (U_n) telles que: $U_0=U_1=0$, $U_2=1$ (ce sont des fonctions symétriques complètes), vérifiant la condition suivante, assez particulière:

le corps $K = \mathbb{Q}(\omega)$, $(\omega\in\mathbb{R},\ f(\omega)=0)$ *est défini par la relation* $\omega^3 = \varepsilon \mathrm{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(\omega)$.

Cette relation est motivée, ainsi que ce travail [**15**], par l'étude de la suite de Berstel et Mignotte (§.2), seul exemple connu de s.r.l cubique entière à 6 zéros. Delone et Fadeev [**14**, thms.5 p.351 et p.367], Nagell [**30**, thm.1 p.43], ont étudié ces corps lorsque l'unité ε est un cube ou l'entier ω de trace nulle (pour des travaux plus récents en relation avec ces corps cf.[**36**]).

Dans ces conditions, les zéros d'une suite (U_n), de la forme $n=3m$, resp. $n=3m+1$, sont déterminés par des unités binomiales de K (méthode initialisée par Ward [**46**] lorsque $N=\pm 1$ et indépendante du théorème de Thue). Le nombre de ces unités, solutions des équations (voir §.3),

$$\mathrm{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(x\rho + y) = 1, \qquad \text{pour } \rho = \omega, \quad \text{resp. } \rho = \alpha,$$

est limité par un théorème de Delaunay [**14**, p.402]. Ces équations fournissent, en général, plus de solutions que la suite (U_n) n'a de zéros comme l'indique la démonstration de la proposition 5 (§.3). La formule de Cayley [**29**, p.213] présente le même inconvénient, l'exemple suivant permet de s'en convaincre:

La fonction symétrique complète définie par $U_{n+3} = -6U_{n+1} + 6U_n$ est reliée à l'équation de Nagell [**29**, p.246][**19**], $y^2 - x^3 = 17$, mais 3 seulement des 8 solutions de cette équation donnent des zéros à la suite (U_n); ce qui n'incite guère à utiliser les résultats avancés de Silverman [**40**].

La réduction du nombre de zéros d'une suite (U_n) à 4 au plus (5 ou 6 dans 2 cas particuliers) s'effectue directement par l'algorithme de rehaussement de Delaunay (§.2), différents critères d'arrêt de cet algorithme, dus à Delaunay, Hemer [**19**], Gordon et Mohanty [**18**], s'appliquant à cette situation.

Que peut-on retenir de cette méthode, certainement le principe de l'algorithme de rehaussement: sa fonction est de déterminer un chemin vers une solution dans l'arbre des ordres cubiques, les "facteurs de montée" dans ces ordres étant reliés aux nombres de Schützenberger d'ordre 3 [**16**]; on peut étendre les critères d'arrêt de cet algorithme, en les considérant comme des applications du théorème de Strassmann [**12**, p.62]]; les relations (1.3) et (1.6) permettent alors le calcul des zéros dans de nombreux cas, mais ceci est une autre histoire (en préparation).

§.1 Rappel

Dans la suite, le polynôme f *est non dégénéré.* Les zéros d'une s.r.l solution de *(R)* vérifient, via la formule (1.2), l'équation:

$$(E) \qquad \lambda = v_n = \mu\alpha^n + \nu\beta^n, \quad n\in\mathbb{N}, \qquad ((v_n) \text{ s.r.l binaire});$$

et il s'agit maintenant d'estimer la multiplicité d'une récurrence binaire (i.e. le nombre maximum de termes de la suite prenant une valeur donnée).

En 1955, Ward [**47**] montre qu'une suite (u_n) solution de *(R)* admet au plus 3 zéros si le polynôme f est décomposé dans $\mathbb{Z}$ (cf. [**11**],[**32**]); Smiley (1956)[**42**] étend ce résultat au cas où toutes les racines de f sont réelles (cf. [**37**]).

Ward [**50**], lors d'une conférence à Boulder (1959), énonce une conjecture limitant à 5 le nombre de zéros d'une suite vérifiant *(R)*, lorsque le polynôme f a des racines complexes et $N\neq\pm1$; la suite de Berstel et Mignotte (1973) [**26**], avec 6 zéros, modifie cette conjecture; la limite passant ensuite de 5 à 6 zéros, Kubota [**20**, p.99].

Le cas où $f(z) = (z-a)(z^2-Lz+M)$ a été résolu par les travaux de Kubota (1977) [**20**], améliorés par Beukers (1980) [**5**]; Györy (1987, lettre) apporte la précision suivante: Pour chaque $\lambda\neq 0$ entier, l'équation $v_n = \lambda$ admet au plus 2 solutions, à l'exception d'un nombre fini de couples $(v_0, v_1) \in \mathbb{Z}^2$.

Dans le 2^d cas, f est irréductible. Des résultats partiels ont été obtenus par Picon (1974) [**31**]. L'équation *(E)*, définie dans le corps de décomposition de f, se met sous la forme:

$$1 = v_n = \mu\alpha^n + \bar{\mu}\bar{\alpha}^n \qquad (\bar{\mu},\ \bar{\alpha} \text{ conjugués complexes de } \mu,\alpha).$$

Les résultats généraux de Beukers et Tijdeman (1984) [**6,43**], de Lewis et Turk (1985) [**23**], (voir aussi [**17**, thm.2]), fournissent respectivement:

-une borne absolue dans le 2^d cas de la conjecture : **44** si la suite est à valeurs dans $\mathbb{Q}$ (Györy, 1985 lettre) et, Beukers obtient le nombre maximum de 7 zéros (non publié) [**39**, p.98];

-une borne effective (non calculée) pour la taille des solutions de l'équation $v_m = v_n$.

La multiplicité des récurrences cubiques est peu connue, Mignotte (1986) [**27**] met en oeuvre, sur une suite particulière, les méthodes élaborées dans un cadre plus général [**28**] (cf. [**44**]).

Une question reliée est l'existence d'un algorithme décrivant l'ensemble des zéros d'une récurrence linéaire d'ordre $k\geq 3$. Si la suite est de multiplicité infinie la question est résolue par le,

THEOREME (Lech-Mahler-Skolem, d'après [**4,12**]) *Soient* **K** *un corps de caractéristique* 0, $c\in$**K**, (u_n) *une suite dans* **K** *vérifiant une relation de récurrence;*

$u_n=c$ *pour un nombre fini de* n *ou bien,*

$u_n=c$ *pour tous les* n *de certaines progressions arithmétiques.*

et il existe un algorithme permettant de décider si une suite de nombres algébriques possède une infinité de termes nuls ([**4,35**]).

La question est ouverte si la suite a un nombre fini de zéros; les méthodes locales permettent d'estimer ce nombre pour une s.r.l à valeurs dans un corps de nombres, l'estimation la plus récente est due à Vereshchagin [**45**], le théorème de Barsky [**34,35**] donne cependant une formule plus générale et transparente. Le théorème de Strassmann permet de calculer les zéros d'une suite particulière (cf. [**12,13**]).

Les propriétés des récurrences linéaires, les méthodes utilisées et les problèmes ouverts sont exposés dans [**12,13,33**], (pour d'autres aspects voir [**7,22**]) et dans le livre spécialisé de Shorey et Tijdeman [**39**] où figurent une importante bibliographie et ...de nombreuses constantes.

Notations La série génératrice d'une suite (u_n) solution de *(R)* est une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$,

(1.1)
$$\sum_{0\leq n} u_n T^n = \frac{P(T)}{(1-\omega T)(1-\omega' T)(1-\omega'' T)}$$

$P(T)=(u_2-Su_1-Qu_0)T^2+(u_1-Su_0)T+u_0$; $\omega', \omega'', \omega$ sont les racines distinctes de f. La décomposition en éléments simples de cette fraction conduit à l'expression bien connue,

(1.2)
$$u_n = A\omega^n + B\omega'^n + C\omega''^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

où $A=g(\omega)/f'(\omega)$, $g(z)=P(1/z)z^2$ et, de même pour B et C.

Si $(U_n),(V_n),(W_n)$ désignent les solutions particulières de *(R)*, avec les conditions initiales respectives $(u_0,u_1,u_2) = (0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$ alors d'après [**3**,**46**],

(1.3)
$$u_{n+r} = u_{r+2}U_n + u_{r+1}V_n + u_r W_n \qquad (n,r \in \mathbb{N}).$$

Quand $u_n = U_n$, le produit des séries géométriques figurant au second membre de (1.1) donne l'expression suivante,

DEFINITION 1
$$U_{n+2} = \sum_{i+j+k=n} \omega^i(\omega')^j(\omega'')^k$$
est la fonctionsymétrique complète de poids $n\in\mathbb{N}$, *des racines du polynôme* f.

Ward [**48**] appelle cette fonction une somme de produits homogènes. U_{n+2} est à l'ordre 3 ce que la fonction de Lucas de la 1^{ere} sorte est à l'ordre 2, [**10**].

L'expression de U_{n+2} en termes de fonctions symétriques élémentaires est classique, soient $e_0=1$, $e_1=S$, $e_2=-Q$, $e_3=N$, $e_l=0$ sinon, la fonction U_{n+2} est égale au déterminant de $(e_{1-i+j})_{1\leq i,\, j\leq n}$ d'après [**21**,**24**]. Il s'en déduit une formule combinatoire,

(1.4)
$$U_{n+2} = \sum_{i+2j+3k=n} \frac{(i+j+k)!}{i!\,j!\,k!} S^i Q^j N^k \ ;$$

et l'expression suivante de ω^n (resp. ω'^n, ω''^n) vient de [**3**],

(1.5)
$$\omega^n = U_n\omega^2 + V_n\omega + W_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Si le polynôme f est irréductible, la norme des 2 membres de (1.5) détermine lorsque $U_n=0$, une équation de Thue:

$$N^n = \mathrm{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(x\omega+y) = Nx^3-Qyx^2+Sxy^2+y^3 \ ;$$

et plus généralement,

(1.6)
$$\text{si } u_r=u_{n+r}=0 \quad \text{alors} \quad \omega^n = x\rho_r + y \ ,$$

où ρ_r dépend de ω, u_{r+2} et u_{r+1} ; le couple (x,y) d'entiers rationnels vérifie l'équation:
$$N^n = \mathrm{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(x\rho_r + y),$$
qui peut être étudiée par les changements de variables de Lagrange [**14**, p.380] ou suivant la méthode locale de Bombieri et Schmidt [**8**, §6].

§.2 Un cas particulier - Algorithme de Delaunay et critères d'arrêt

(2.1) **La suite de Berstel et Mignotte [13,26]**

C'est une fonction symétrique complète définie par $U_0=U_1=0$, $U_2=1$ et le polynôme caractéristique: $f(z) = z^3 - 2z^2 + 4z - 4$.
Dans le corps $K = \mathbb{Q}(\omega)$ ($\omega\in\mathbb{R}$ et $f(\omega) = 0$), l'ordre maximum est $\mathbb{Z}[\varepsilon]$, $0<\varepsilon<1$ est l'unité fondamentale définie par $\varepsilon^3 = -\varepsilon^2 - \varepsilon + 1$, $\mathrm{Disc}(\varepsilon) = -44$, les relations suivantes ont lieu:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\varepsilon] = \mathbb{Z}[\alpha] & & \omega^3 = 4\varepsilon, \\ \Big| \text{ indice } 2 & & \omega = \varepsilon^2 + 1, \\ \mathbb{Z}[\varepsilon^2] = \mathbb{Z}[\omega] & & \alpha = \varepsilon - 1, \quad \alpha\omega = 2. \end{array}$$

La formule combinatoire (1.4) permet d'écrire pour $m\geq 0$:
$$2U_{3m} = 4^m X_m, \quad U_{3m+1} = 4^m Y_m, \quad U_{3m+2} = 4^m Z_m, \quad \text{où } \omega^m = U_m\omega^2 + V_m\omega + W_m,\ m\in\mathbb{N},$$
et de même pour α, avec U'_m, X'_m, etc...
Il s'en déduit, par $\omega^3 = 4\varepsilon$, pour $m\geq 0$,
$$\varepsilon^m = X_m\omega^2/2 + (Y_m - X_m)\omega + Z_m - 2Y_m + 2X_m,$$
$$\varepsilon^m = Y_m\alpha^2 + (X_m - 2Y_m)\alpha + Z_m,$$
et les formules analogues pour $m\leq 0$, en étendant la définition de U_n par,
$$U'_{n+2} = 2^{n+2}U_{-n-1}.$$
Les zéros de la suite (U_n) sont alors déterminés de la façon suivante:
$$U_{3m} = 0 \longleftrightarrow \varepsilon^m = x\omega + y \longleftrightarrow (\varepsilon^2)^{m/2} = u\varepsilon^2 + v;$$
$$U_{3m+1} = 0 \longleftrightarrow \varepsilon^m = x\alpha + y \longleftrightarrow \varepsilon^m = u\varepsilon + v.$$
La table des unités binomiales [**14**, p.417] donne le résultat:
$$m/2 \in \{0,1\} \longleftrightarrow U_0 = U_6 = 0;$$
$$m \in \{0,1,4,17\} \longleftrightarrow U_1 = U_4 = U_{13} = U_{52} = 0.$$
Une question légitime est alors, comment s'obtiennent ces unités binomiales?

(2.2) Soient ρ un entier d'un corps cubique de discriminant négatif et ε, $0<\varepsilon<1$, l'unité fondamentale de l'ordre $\mathbb{Z}[\rho]$. Toute solution de l'équation,

$f_\rho(x,y) = \mathrm{Norm}(x\rho+y) = 1$, est une unité binomiale en ρ, $\varepsilon^k = x\rho+y$, $k\in\mathbb{Z}$, et réciproquement. Les théorèmes de Delaunay, de Nagell [**14**, p.402 ; **30**, p.52] limitent le nombre de ces unités binomiales (table [**14**, pp.303 et 417]). Des tables plus étendues d'unités fondamentales figurent dans [**1**,**41**], voir [**38**] pour d'autres références et [**2**] pour une méthode de calcul plus récente.

Soient $\varepsilon^k = B\rho+D$ une unité binomiale en ρ, $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ une matrice de $GL(2,\mathbb{Z})$ avec $AD-BC=\pm1$, $\theta=(A\rho+C)/(B\rho+D)$, alors les ordres $\mathbb{Z}[\rho]$ et $\mathbb{Z}[\theta]$ sont égaux; en d'autres termes les formes cubiques binaires f_ρ et f_θ sont équivalentes:

$$f_\rho(x,y)\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = f_\theta(x',y') \quad ; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

(2.3) **L'algorithme de rehaussement de Delaunay** [**14**, p.386; **30**, p.48]

Les unités binomiales d'un ordre cubique $\mathbb{Z}[\rho]$ de discriminant négatif, sont déterminées par l'algorithme suivant:

Soit $\varepsilon = a\rho^2+b\rho+c$, une unité fondamentale de $\mathbb{Z}[\rho]$, il s'agit de trouver les exposants entiers n, tels que :

$$(*) \qquad \varepsilon^n = x\rho+y,$$

on peut supposer que $n\in\mathbb{N}$ d'après (2.2) et prendre l'unité ε directe, positive. Ces unités binomiales vérifient les égalités suivantes, où s désigne la trace de ρ:

$$\varepsilon'^n-\varepsilon''^n = x(\rho'-\rho''), \quad x = (-a\rho+b+as)(\varepsilon'^n-\varepsilon''^n)/(\varepsilon'-\varepsilon'').$$

Soit $K\delta^2=\mathrm{Norm}(-a\rho+b+as)$ où $\delta=(a,b)$, alors K divise x, et les solutions de l'équation (*) appartiennent à l'ordre $\mathbb{Z}[K\rho]$. Après avoir posé $x=Kx_1$, $\rho_1=K\rho$, et calculé l'unité $\varepsilon_1=\varepsilon^\nu$ pour le plus petit entier $\nu\geq1$ tel que $\varepsilon^\nu\in\mathbb{Z}[\rho_1]$, le processus se répète dans l'ordre $\mathbb{Z}[\rho_1]$, l'équation (*) s'écrivant:

$$\varepsilon_1^{n/\nu} = x_1\rho_1+y \quad \text{avec,} \quad \varepsilon_1 = a_1\rho_1^2+b_1\rho_1+c_1.$$

Si $K\neq\pm1$ et si l'équation (*) admet une solution non triviale ($x\neq0$), l'algorithme s'arrête après épuisement des diviseurs de x, il y a une seule solution non triviale par [**14**, thms. p.385 et 387].

Si $K=\pm1$, l'algorithme ne peut pas commencer, les ordres $\mathbb{Z}[\rho]$ et $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ sont égaux; les équations déduites de (*) selon la parité de n, sont traitées suivant le même principe, il y a au plus deux solutions avec $x\neq0$ sauf dans trois cas: si $\mathrm{Disc}(\rho)=-23,-31$ ou -44 (ε fondamentale), par [**14**, thm. p. 398].

Si l'équation (*) admet la seule solution triviale, l'algorithme se poursuit indéfiniment, et on ne peut l'utiliser sans disposer de critères d'arrêt. Hemer[**19**], Gordon et Mohanty [**18**], ont étendu le champ d'application d'un critère de Delaunay [**14**, p.410] :

Si, à une certaine étape de l'algorithme, l'unité $\varepsilon^{\mu} = a_i\rho_i^2 + b_i\rho_i + c_i$ admet un diviseur premier π de la 1^{ere} sorte : $\pi \mid b_i$ et $\pi \nmid a_i$, alors aucune puissance entière non nulle de ε^{μ} n'est binomiale en ρ.

(π est un diviseur de ε^{μ} de la 2^{de} sorte si $\pi \mid b_i$ et $\pi^2 \mid a_i$).

L'usage des déterminants "Δ", "∇", introduits par Delone et Fadeev [**14**, p.411] pour calculer ε^{μ} modulo π^2, rend ce critère très efficace, dès que ρ, ε, et π où $\pi \mid K$ sont donnés.

Il n'est pas difficile, vu la nature locale de ces critères, de les considérer comme des applications du théorème de Strassmann. Cette interprétation ne donne pas, semble-t-il, de réponse à la question essentielle: Peut-on mettre en oeuvre ces critères d'arrêt à une certaine étape de l'algorithme, lorsque l'équation (*) admet la seule solution triviale? Dans les conditions de la 3^{eme} étape (§.3), la réponse est positive.

§.3 Zéros d'une classe de fonctions symétriques complètes

Cette étude s'effectue en 3 étapes, les démonstrations figurent dans [**15**].

(3.1) Soient K un corps cubique réel de discriminant négatif, $\mathcal{O}_K$ l'ordre maximum et, $0<\varepsilon_0<1$ l'unité fondamentale directe de $\mathcal{O}_K$, chaque unité de K est de la forme $\pm\,\varepsilon_0^n$ ($n\in\mathbb{Z}$). On considère les entiers de K, ε et ω, définis respectivement par,

$$\varepsilon^3 = S_1\varepsilon^2 + Q_1\varepsilon + 1 \text{ et } \omega^3 = S\omega^2 + Q\omega + N, \qquad (N \neq 0, \pm 1);$$

et vérifiant la relation ($\mathrm{Norm}(\omega)$ désigne $\mathrm{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(\omega) = \omega'\omega''\omega$),

$$(A) \qquad \omega^3 = \varepsilon\ \mathrm{Norm}(\omega).$$

Sans perte de genéralité, on peut supposer que l'entier rationnel $N=\mathrm{Norm}(\omega)$ est positif et libre de cubes. On pose $N=a^2b$, $\bar{N}=ab^2$ où a et b sont positifs, libres de carrés et vérifient $(a,b)=1$ et $ab\geq 2$.

Le nombre α de K est défini par $\alpha\omega = ab$. Comme $\alpha^3 = \bar{N}\varepsilon^{-1}$ on peut choisir l'unité ε directe, il existe alors un entier rationnel $k\geq 1$ tel que $\varepsilon = \varepsilon_0^k$. Si l'unité ε n'est pas un cube et vérifie *(A)*, il est clair que l'unité ε_0 ou son carré est aussi de cette forme (cf.[**9**, pp. 100 et 244]).

La 1^e étape consiste à déterminer les entiers ω et ε tels que $\omega^3 = \varepsilon\mathrm{Norm}(\omega)$

Soient q et s des entiers rationnels non nuls simultanément, on pose:

$$\Delta = (s-aq^2)(q+bs^2) - qs, \quad D = 4ab\Delta + 3(3+abqs)^2.$$

PROPOSITION 1 *Si ε et ω vérifient les conditions* (3.1), *alors il existe des entiers rationnels* q *et* s *tels que:*

i) ω est défini par $\omega^3 = abs\omega^2 + a^2bq\omega + a^2b$.

ii) L'ordre $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[1,\omega,\alpha]$ *a pour discriminant* $-(ab)^2D$; a *(resp.* Δ*) est l'indice de* ω *(resp.* ε*) dans l'ordre* $\mathcal{O}$.

iii) L'expression de ε *comme fraction linéaire de* ω *est la suivante,*

$$\varepsilon = \frac{\omega(s-aq^2) - aq}{\omega s - a(q+bs^2)} .$$

L'indice de l'ordre $\mathcal{O}$ dans l'ordre maximum est premier avec ab ([9, p.257]).

LEMME 1 *Sous les hypothèses et avec les notations de la proposition* 1,

i) Si $q=0$ *alors* $s=-1$ *et,* $ab=2$ *ou* $b=1$ *et* $a=3,5,6$; *sinon* $q<0$.

ii) Si $s\neq0$ *et* $\Delta=\pm a$ *alors* $\gamma = (s/a)\varepsilon + (q^2-s/a)$ *est une unité inverse positive.*

iii) Si $q\neq0$, $q+bs^2\neq0$ *et* $\Delta=\pm b$ *alors* $\delta = (s^2+q/b)\varepsilon - q/b$ *est une unité inverse positive.*

L'assertion *(ii)* exprime que l'équation $f_\varepsilon(x,y) = 1$ possède au moins 3 solutions 1, ε, γ.

L'unité ε étant donnée par (S_1, Q_1), on peut déterminer les entiers ω dépendant des paramètres (a,b,s,q). Si K est un corps cubique pur, (-Disc(K) est un carré), il y a 0 ou 3 entiers ω solutions , sinon il y en a au plus 1 (voir table).

Dans la 2[e]étape le nombre maximum de zéros d'une telle fonction symétrique complète est limité à 5, 6 dans un cas particulier.

(3.2) *Hypothèse: La suite* (U_n) (définition 1) *correspond à un entier* ω *vérifiant les conditions* (3.1): $\omega^3 = N\varepsilon$, $N=a^2b$.

Pour décrire les zéros de la suite (U_n) on définit les suites,

$$aU_{3m} = X_m N^m,\quad U_{3m+1} = Y_m N^m,\quad U_{3m+2} = Z_m N^m,\quad (m \geq 0);$$

elles vérifient la formule (1.4) qui prend la forme:

$$(B) \qquad \sum_{i+2j+3k=3m+r-2} \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!} s^i q^j b^{i+j+k-m} a^{m-1-k+[r/2]} ,$$

où $r = 0,1,2$ et $[r/2]$ désigne la partie entière de $r/2$.

Soit (U'_n) la suite correspondant à α avec $\alpha^3=\bar{N}\varepsilon^{-1}$, $\bar{N}=ab^2$; pour $m\geq0$ on définit de même les suites X'_m, Y'_m, Z'_m, elles vérifient la formule déduite de *(B)*, en échangeant a et b, s et $-q$. U_{n+2} et U'_{n+2} sont les fonctions symétriques complètes, de poids n, correspondant à ω et α,

$$N \sqrt[3]{(N\bar{N})^n}\, U_{-n-1} = U'_{n+2} = \sqrt[3]{(N\bar{N})^n} \sum_{i+j+k=n} \omega^{-i}(\omega')^{-j}(\omega'')^{-k}.$$

On peut alors étendre la définition 1 aux entiers rationnels.

DEFINITION 2 *Pour* $n\geq 0$, $N\, U_{-n-1}$ *est la fonction symétrique complète de poids* $-n$, *correspondant à l'entier* ω *de norme* N.

PROPOSITION 2 *Sous l'hypothèse* (3.2), *les zéros de la suite* (U_n), $n\in\mathbb{Z}$, *sont déterminés par les unités binomiales:*

de l'ordre $\mathbb{Z}[\omega]$ *si* $n=3m$, *de l'ordre* $\mathbb{Z}[\alpha]$ *si* $n=3m+1$ *et,* $U_n\neq 0$ *si* $n=3m+2$.

THEOREME 1 *Soit* (U_n) *une suite vérifiant l'hypothèse* (3.2). *Le nombre de zéros de la suite* (U_n) *est compris entre* 2 *et* 4, *sauf dans* 2 *cas où ce nombre est égal à* 6 (resp.5). *Le nombre maximum de* 6 *zéros est obtenu par la suite de Berstel et Mignotte (voir table).*

Démonstration Un zéro de la suite (U_n) est un entier rationnel n tel que $U_n=0$. D'après la proposition 2, l'unité ε^k avec $k=(n-1)/3$, resp. $k=n/3$, est solution de l'équation $f_\alpha=1$, resp. $f_\omega=1$.

D'après les théorèmes de Delaunay et de Nagell, on distingue 3 cas:

Si Disc(ω) et Disc(α) sont strictement inférieurs à -44, chacune de ces équations possède au plus 3 solutions et au moins 1 ($U_0=0$, $U_1=0$) et, la proposition 5 limite dans ce cas le nombre de solutions à 5. En dehors du 1er cas de la proposition 4 *(ii)* où il y a 5 solutions, la réduction du nombre de solutions à 4 est réalisée dans la 3eme étape.

Si Disc(ω) ou Disc(α) est égal à -44 , le nombre de 6 solutions est atteint dans le 1er cas de la proposition 4 *(i)*.

Enfin, d'après la proposition 1, $(ab)^2$ divise Disc(ω) et Disc(α), $ab\geq 2$, ces discriminants ne prennent pas les valeurs -23 et -31. ∎

Le groupe des unités de K étant de la forme $\{\pm\varepsilon_0^n\ ,\ n\in\mathbb{Z}\}$, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $\varepsilon^k\in\mathbb{Z}[\omega]$. Les ordres de discriminants -44, -76 nécessitent un traitement particulier.

PROPOSITION 3 *Sous l'hypothèse* (3.2), *soit* $k\geq 1$ *le plus petit entier rationnel tel que* $\mathbb{Z}[\varepsilon^k] = \mathbb{Z}[\omega]$, *alors* $k=1$ *ou* 2. *Si* $k=2$, *il y a deux unités* ε *vérifiant cette condition:*

$$\varepsilon^3 = -\varepsilon^2-\varepsilon+1,\ \mathrm{Disc}(\varepsilon)=-44 \quad et \quad \varepsilon^3 = \varepsilon^2-3\varepsilon+1,\ \mathrm{Disc}(\varepsilon)=-76.$$

PROPOSITION 4 *Sous l'hypothèse* (3.2),

(i) il y a exactement 5 *entiers* ω *tels que* Disc(ω) *ou* Disc(α) *soit égal à* -44, *pour* $\varepsilon = \varepsilon_0,\ \varepsilon_0^2,\ \varepsilon_0^4,\ \varepsilon_0^5,\ \varepsilon_0^7$. *Les suites* (U_n) *correspondantes ont pour zéros respectivement:*

$n=0,1,4,6,13,52$; $n=-2,0,1,24$; $n=0,1,13$; $n=0,1$; $n=0,1$.

(ii) il y a exactement 3 *entiers* ω *tels que* $\mathrm{Disc}(\omega)$ *ou* $\mathrm{Disc}(\alpha)$ *soit égal à* -76, *pour* $\varepsilon = \varepsilon_0, \varepsilon_0^2, \varepsilon_0^5$. *Les suites* (U_n) *correspondantes ont* 5, 4 *et* 2 *zéros:*

$n=-2,0,1,6,22$; $n=0,1,4,12$; $n=0,1$.

PROPOSITION 5 *Sous l'hypothèse* (3.2), *si les discriminants des ordres* $\mathbb{Z}[\omega]$ *et* $\mathbb{Z}[\alpha]$ *sont différents de* -44 *alors, le nombre de zéros de la suite* (U_n) *correspondante est au plus égal à* 5.

Démonstration On suppose que la suite (U_n) possède 3 zéros du type $n=3m$, d'après la proposition 2, m est déterminé par l'unité binomiale: $\varepsilon^m = x\omega+y$. L'algorithme (2.3) ne peut donc pas commencer et $\mathbb{Z}[\varepsilon^k]=\mathbb{Z}[\omega]$; par la proposition 3 on peut supposer que $k=1$ et, d'après la proposition 1,

$$\mathbb{Z}[\varepsilon]=\mathbb{Z}[\omega] \text{ est équivalent à } \Delta=\pm a.$$

Si $s\neq 0$, d'après le lemme 1 *(ii)*, l'équation $f_\varepsilon=1$ possède 3 solutions 1, ε et γ qui se déduisent par (2.2) et [**14**, thm.(Nagell) p.398], des unités binomiales:

$$1, \quad \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_1^\lambda = u\varepsilon_1+v, \quad \lambda\geq 3,$$

où $0<\varepsilon_1<1$ est l'unité fondamentale de l'ordre $\mathbb{Z}[\varepsilon]$.
Puisque $0<\varepsilon<1$ et $\gamma>1$, il y a un seul choix:

$$\gamma = \varepsilon_1^{-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \varepsilon_1^{\lambda-1};$$

par identification, puis en remplaçant dans $\Delta=\pm a$, on obtient:

$$\varepsilon = u+v\gamma, \quad s=\pm a \quad \text{et}, \quad q^3\pm 1 = \pm a^2b(1\mp q^2).$$

D'après la proposition 1, l'entier ω est défini par: $s=1$, $q=-2$, $a=1$, $b=3$.
Il y a 3 unités binomiales en ε_1:

$$1, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1^3 = -3\varepsilon_1+1 \quad \text{avec} \quad \mathrm{Disc}(\varepsilon_1)=-135;$$

l'équation $f_\varepsilon=1$ admet 3 solutions mais, une seule unité binomiale triviale en $\varepsilon=\varepsilon_1^2$ est solution.
On vérifie aisément par (2.3) que la suite (U_n) possède 2 zéros: $U_0=U_1=0$.
Par définition de Δ,

$$\text{si } s=0 \text{ et } \Delta=\pm a \text{ alors } q=-1.$$

Si la suite (U_n) possède 3 zéros du type $n=3m+1$, le traitement est analogue.
Vu les conditions (3.1) portant sur a et b, les égalités suivantes, $\mathbb{Z}[\varepsilon]=\mathbb{Z}[\omega]$ et $\mathbb{Z}[\varepsilon]=\mathbb{Z}[\alpha]$, ne sont pas vérifiées simultanément.∎

COROLLAIRE 1 *Sous les hypothèses de la proposition* 5, *l'une des conditions suivantes est nécessaire pour que la suite* (U_n) *possède* 5 *zéros:*

$$(q=-1 \text{ et } s=0) \text{ ou } (q=0 \text{ et } s=-1) \text{ ou } (q=-b \text{ et } s=\pm1).$$

La réduction du nombre de zéros de 5 à 4 fait l'objet de la 3^e^ étape et une table de zéros illustre la méthode utilisée

Sous certaines hypothèses, les critères d'arrêt de Gordon et Mohanty (§.2) s'appliquent directement, avec un nombre fini d'exceptions, aux équations:

$$\varepsilon^m = x\omega+y \qquad \text{et} \qquad \varepsilon^m = x\alpha+y,$$

qui déterminent les zéros de la suite (U_n) correspondante (proposition 2).
La proposition 6, s'appuyant sur le lemme 2, est utilisée dans la démonstration du théorème 2.

PROPOSITION 6 *Sous l'hypothèse* (3.2), *soit* $\nu>1$ *le plus petit entier rationnel tel que* $\varepsilon^\nu\in\mathbb{Z}[\omega]$. *Si* $\nu\notin\{2,3,6\}$ *alors l'équation* $(\varepsilon^\nu)^k = x\omega+y$, $k\in\mathbb{Z}$, *est impossible pour* $k\neq0$.

Si $\pi\in\mathbb{N}$ est un nombre premier et si $v\in\mathbb{N}$ vérifie $\pi^v \parallel R$, on pose $\upsilon_\pi(R)=v$; la propriété $\upsilon_\pi(R!) < R/(\pi-1)$ sert à établir le résultat suivant:

LEMME 2 *Pour tous les entiers rationnels positifs* i,j,k,m *tels que:* $i+2j+3k=3m-1-r$, $k\le m-1-r$, $r=0$ *ou* 1, *pour* $\pi\ge5$ *un diviseur premier de* m,

$$\upsilon_\pi\left(\frac{(i+j+k)!}{i!\,j!\,k!}\,\pi^{m-1-k-r}\right) \ge \upsilon_\pi(m).$$

(3.3) *Hypothèse: Les entiers* α *et* ω, *soumis à* (3.2), *engendrent un corps* K *de discriminant différent de* -44, *et vérifient la relation* $q+bs^2=0$ $(qs\neq0)$.

THEOREME 2 *Sous l'hypothèse* (3.3), *une suite* (U_n) *possède* 3 *zéros:* $n=0,1,4$; *et dans* 2 *cas il y a un zéro supplémentaire:*

$$n=12 \quad \text{si} \quad \omega^3 = 2(\omega-1)^2; \qquad n=9 \quad \text{si} \quad \omega^3 = 3\omega^2-9\omega+9.$$

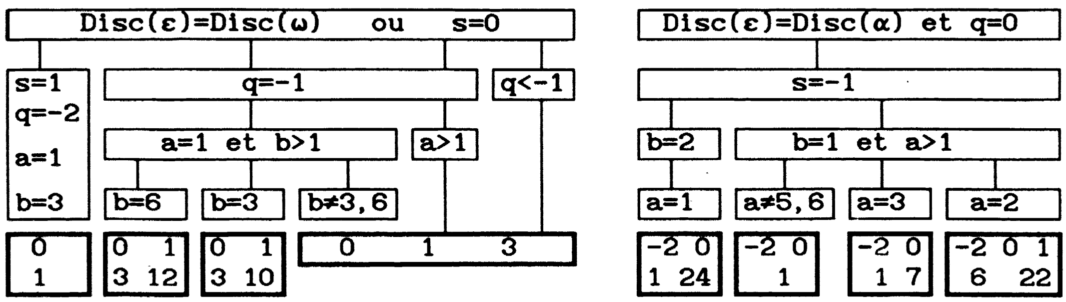
Le cas des entiers de trace nulle est traité de façon analogue :

THEOREME 3 *Sous l'hypothèse* (3.2), *si l'entier* ω *a une trace nulle alors la suite* (U_n) *correspondante possède* 3 *zéros:* $n=0,1,3$ *et dans* 2 *cas il y a un zéro supplémentaire:* $n=10$ si $\omega^3 = -3\omega+3$; $n=12$ si $\omega^3 = -6\omega+6$.

Il y a 5 *entiers* ω *tels que l'entier* α *ait une trace nulle: i)* $\omega^3 = -2\omega^2+2$ *ii)* $\omega^3 = -2\omega^2+4$ *iii)* $\omega^3 = -3\omega^2+9$ *iv)* $\omega^3 = -5\omega^2+25$ *v)* $\omega^3 = -6\omega^2+36$.
Les suites (U_n) *correspondantes ont pour zéros:* $n=-2,0,1$ *et les zéros supplémentaires: i)* $n=24$ *ii)* $n=6,22$ *iii)* $n=7$.

Les cas particuliers, au nombre de 26, apparus au cours des démonstrations des théorèmes 2 et 3, sont traités séparément au moyen des critères évoqués en (2.3),(cf. [**15**, §.4]).

Les résultats obtenus dans cette dernière étape sont résumés ci-dessous : (les zéros figurent dans les cadres en caractères gras).



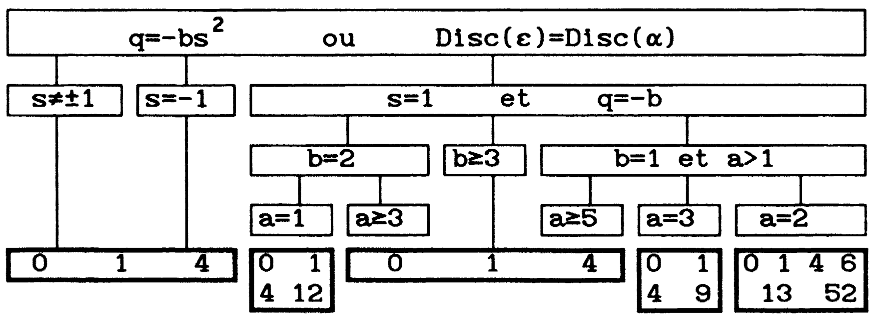


Table des zéros.

La table donne les zéros d'une suite (U_n) sous l'hypothèse (3.2):

$$U_{n+3} = absU_{n+2} + a^2bqU_{n+1} + a^2bU_n \quad \text{et} \quad U_2=1,\ U_1=U_0=0;$$

L'unité $\varepsilon^3 = S_1\varepsilon^2 + Q_1\varepsilon + 1$ est désignée par $(S_1, Q_1, 1)$. Pour chaque ordre maximum considéré dans la table, $\varepsilon=\varepsilon_0$ est l'unité fondamentale, les suites correspondant à $\varepsilon=\varepsilon_0^2$ et qui ont 2 zéros ne sont pas mentionnées, pour les ordres de discriminant -44 , resp. -76, -108 et -204, ε désigne ε_0, ε_0^2, ε_0^4, resp. ε_0, ε_0^2.

REMARQUE: Compte-tenu de [**23**, pp.30 et 32] on peut se demander s'il existe, sous l'hypothèse (3.2), d'autres suites (U_n) à 4 zéros, en dehors de celles figurant dans la table et de la suite correspondantà $\omega^3=-6\omega+6$.

	a	b	s	q	Δ	D	$\varepsilon=(S_1,Q_1,1)$	ZEROS	#
	2	1	1	-1	1	11	(-1,-1,1)	0,1,4,6,13,52	6
-44	1	2	-1	0	-2	11	(-1,-3,1)	-2,0,1,24	4
	2	1	2	-2	-8	11	(-5,-11,1)	0,1,13	3
-76	2	1	-1	0	-1	19	(1,-3,1)	-2,0,1,6,22	5
	1	2	1	-2	2	19	(-5,-7,1)	0,1,4,12	4
-108	3	1	1	-1	1	12		0,1,4,9	4
	3	2	1	-1	-1	3	(-3,-3,1)	0,1,4	3
	6	1	-1	0	-1	3		-2,0,1	3
	1	3	-1	-1	-5	48		0,1,4	3
	2	3	0	-1	2	75	(3,-15,1)	0,1,3	3
	1	6	1	-2	-10	3		0,1	2
-135	3	1	-1	0	-1	15	(0,-3,1)	-2,0,1,7	4
-140	1	2	0	-1	1	35	(3,-5,1)	0,1,3	3
-172	2	1	0	-1	2	43	(3,-7,1)	0,1,3	3
-175	5	1	-1	0	-1	7	(-2,-3,1)	-2,0,1	3
-200	5	1	1	-1	1	32	(-7,-13,1)	0,1,4	3
-204	1	2	-1	-1	-3	51	(5,-11,1)	0,1	2
	2	1	0	-3	54	204	(3,-111,1)	0,1,3	3
-216	3	1	-1	-1	-1	96	(9,-21,1)	0,1,4	3
-268	2	1	-1	-1	-1	67	(7,-13,1)	0,1,4	3
-324	1	3	1	-3	3	144	(-15,-57,1)	0,1,4	3
-351	1	3	0	-1	1	39	(3,-6,1)	0,1,3,10	4
-364	1	2	0	-2	8	91	(3,-19,1)	0,1,3	3

REFERENCES

[1] I.O.Angell, *A table of complex cubic fields*, Bull. London Math. Soc. 5 (1973), 37-38.

[2] T.Azuhata, *On the calculation of the units of algebraic number fields*, Nagoya Math. J. **101** (1986), 181-185.

[3] E.T.Bell, *Notes on recurring series of the third order*, Tôhoku Math. J. **24** (1924), 168-184.

[4] J.Berstel et M.Mignotte, *Deux propriétés décidables des suites récurrentes linéaires*, Bull. Soc. Math. France **104** (1976), 175-184.

[5] F.Beukers, *The multiplicity of binary recurrences*, Comp. Math. **40** (1980), 251-267.

[6] F.Beukers and R.Tijdeman, *On the multiplicities of binary complex recurrences*, Comp. Math. **51** (1984), 193-213.

[7] J.P.Bezivin, *Sur un théorème de Pólya*, J. Reine Angew. Math. **364** (1986), 60-68.

[8] E. Bombieri and W. M. Schmidt, *On Thue's equation*, Invent. Math. **88** (1) (1987), 69-82.

[9] Z. I. Borevitch et I. R. Chafarevitch, *Théorie des Nombres*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[10] R. D. Carmichael, *On sequences of integers defined by recurrence relations*, Quaterly J. Math. **48** (1920), 343-372.

[11] --------------, *On the numerical factors of the arithmetic forms* $\alpha^n \pm \beta^n$, Annals of Math. series 2, **15** (1913), 30-70.

[12] J. W. S. Cassels, *Local fields*, London Math. Soc. Stud. Texts 3, Cambridge Univ. Press, 1986.

[13] L. Cerlienco, M. Mignotte et F. Piras, *Suites récurrentes linéaires. Propriétés algébriques et arithmétiques*, L'Enseignement Mathématique **33** (1987), 67-108.

[14] B. N. Delone and D. K. Fadeev, *The theory of irrationalities of the third degree*, Transl. Math. Mono., vol. 10, A. M. S., 1964.

[15] B. Deshommes, *Sur les zéros des fonctions symétriques complètes (cas cubique)* (1987), preprint.

[16] M. Duboué, *Une suite récurrente remarquable*, Sémin. Delange-Pisot-Poitou 1977/78, Paris, Exp. 27, 12pp.

[17] J. H. Evertse, K. Györy, C. L. Stewart and R. Tijdeman, *On S-unit equations in two unknowns* (1987), preprint.

[18] B. Gordon and S. P. Mohanty, *On a theorem of Delaunay and some related results*, Pacific J. Math. **68** (2) (1977), 399-409.

[19] O. Hemer, *Notes on the Diophantine equation* $y^2 - k = x^3$, Arkiv för Mat. **3** (3) (1954), 67-77.

[20] K. K. Kubota, *On a conjecture of Morgan Ward* I, II, III, Acta Arith. **33** (1977), 11-28, 29-48, 99-109.

[21] A. Lascoux, *Suites récurrentes linéaires*, Advances in Applied Math. (1986), 1-8.

[22] M. Laurent, *Equations exponentielles polynômes et suites récurrentes linéaires*, Soc. Math. de France, Astérisque 147-148 (1987), 121-139.

[23] D. J. Lewis and J. Turk, *Repetitiveness in binary recurrences*, J. Reine Angew. Math. **356** (1985), 19-48.

[24] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Math. Mono., 1979.

[25] K. Mahler, *On the Taylor coefficients of rational functions*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **52** (1956), 39-48.

[26] M. Mignotte, *Suites récurrentes linéaires*, Sémin. Delange-Pisot-Poitou 1973/74, Paris, Exp. G 14, 9pp.

[27] ----------, *Détermination des répétitions d'une certaine suite récurrente linéaire*, Publicationes Mathematicae **33** (Debrecen, 1986), 297-306.

[28] M. Mignotte, T. N. Shorey and R. Tijdeman, *The distance between terms of an algebraic recurrence sequence*, J. Reine Angew Math. **349** (1984), 63-76.

[29] L. J. Mordell, *Diophantine equations*, Academic Press, London, 1969.

[30] T Nagell, *L'analyse indéterminée de degré supérieur*, Mémorial Sc. Math., vol. 39, Gauthier-Villars, Paris, 1929.

[31] P.A.Picon, *Sur les termes nuls d'une suite récurrente cubique*, Rairo R-3, (1974), 47-61.

[32] ---------, *Sur certaines suites récurrentes cubiques ayant deux ou trois termes nuls*, Discrete Math. **21** (1978), 285-296.

[33] A.J.Van der Poorten, *Some problems of recurrent interest*, Topics in classical number theory, vol. I, II (Budapest, 1981), 1265-1294, Coll. Math. Soc. János Bolyai, **34**, North. Holland, Amsterdam-New York, 1984.

[34] P.Robba, *Nombre de zéros des fonctions exponentielles-polynômes*, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 4^{e}année, 1976/77, n^o 9, 3p.

[35] -------, *Zéros des suites récurrentes linéaires*, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 5^{e}année, 1977/78, n^o 13, 5p.

[36] M.Scarowsky, *On units of certain cubic fields and the diophantine equation* $x^3+y^3+z^3 = 3$, Proc. Amer. Math. Soc. **91** (1984), 351-356.

[37] S.J.Scott, *On the number of zeros of a cubic recurrence*, Amer. Math. Monthly **67** (1960), 169-170.

[38] D.Shanks, *A survey of quadratic, cubic and quartic algebraic number fields*, Proc. 7th S-E Conf. Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Louisiana State Univ. Baton Rouge, (february 1976), 15-40.

[39] T.N.Shorey and R.Tijdeman, *Exponential diophantine equations*, Cambridge Tracts in Math. 87, Cambridge Univ. Press, 1986.

[40] J.H.Silverman, *Integer points and the rank of Thue elliptic curves*, Invent. Math. **66** (1982), 395-404.

[41] R.Smadja, *Calculs effectifs sur les idéaux des corps de nombres algébriques*, Marseille-Luminy (mars 1976).

[42] M.F.Smiley, *On the zeros of a cubic recurrence*, Amer. Math. Monthly **63** (1956), 171-172.

[43] R.Tijdeman, *Multiplicities of binary recurrences*, Sémin. Théor. Nombres, Univ. Bordeaux I, 1980/1981, Exp. 29, 11pp.

[44] N.K.Vereshchagin, *Occurrence of zero in a linear recursive sequence*, Mat. Zametki vol.**38** (2) (1985), 177-189.

[45] ----------------, *Effective upper bounds for the number of zeros of a linear recursive sequence*, Vestnik Moskov. Univ. Mat. vol.**41** (1) (1986), 33-38.

[46] M.Ward, *Notes on an arithmetical property of recurring series*, Math. Zeitschrift **39** (1934), 211-214.

[47] ------, *On the number of vanishing terms in an integral cubic recurrence*, Amer. Math. Monthly **62** (1955), 155-160.

[48] ------, *The vanishing of the homogeneous product sum of the roots of a cubic*, Duke Math. J. **26** (1959), 553-562.

[49] ------, *The vanishing of the homogeneous product sum on three letters*, Duke Math. J. **27** (1960), 619-624.

[50] ------, *Some Diophantine problems connected with linear recurrences*, Report Institute Th. Numbers, Univ. Colorado, Boulder (1959), 250-257.

DESHOMMES Bernadette,
15,rue de l'Ancienne Comédie
75006 PARIS

(11B37, 11R16)