GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

Q. LIU

Ouverts analytiques d'une courbe algébrique en géométrie rigide

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 13 (1985-1986), p. 67-72
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1985-1986__13__67_0>

OUVERTS ANALYTIQUES D'UNE COURBE ALGEBRIQUE EN GEOMETRIE RIGIDE

Q. Liu

Le but de cet exposé est de donner une généralisation d'un travail de Gerritzen et van der Put. Ils ont étudié dans "Schottky groups and Mumford curves" (LN 817) les espaces analytiques de genre zéro et donné une caractérisation des espaces analytiques qui sont le complémentaire dans $\mathbf{P}^1$ d'une partie compacte. Ici nous donnerons des résultats analogues pour les espaces analytiques de genre fini (cf définition 3). Lorsque le corps de base est maximalement complet, tout espace analytique de dimension 1, connexe, régulier, séparé et de genre fini est ouvert analytique d'une courbe algébrique (Théorème 3). On caractérisera les espaces analytiques qui sont le complémentaire d'une partie compacte dans une courbe algébrique (Théorème 4).

Dans toute la suite, $\mathbf{k}$ désigne un corps algébriquement clos complet pour une valeur absolue ultramétrique $|.|$. On désigne l'anneau de valuation de $\mathbf{k}$ par $\mathbf{k}^\circ = \{\lambda\in\mathbf{k} \mid |\lambda|\leq 1\}$, l'idéal de valuation par $\mathbf{k}^{\circ\circ} = \{\lambda\in\mathbf{k} \mid |\lambda|<1\}$ et le corps résiduel par $\overline{\mathbf{k}}=\mathbf{k}^\circ/\mathbf{k}^{\circ\circ}$.

Pour les résultats fondamentaux sur les espaces analytiques rigides, sur l'analytification des variétés algébriques, sur la réduction des espaces analytiques formels nous renvoyons à [F,P], [Fr], [B.G.R.].

Soit U une variété algébrique affine réduite de dimension 1 sur $\overline{k}$, on sait qu'il existe (à isomorphisme près) une unique variété projective Z appelée "complété projectif de U" telle que U soit un ouvert dense de Z et que tout point de Z-U soit régulier. Pour les espaces affinoïdes on a le théorème suivant:

THEOREME 1. ([P1]) *Soit* R *un espace affinoïde réduit de dimension* 1. *Alors il existe une variété algébrique projective* C *sur* k *telle que* R *soit ouvert affinoïde de* C. *En plus* C *admet une réduction analytique* $\hat{r}:C\to\overline{C}$ *telle que* $\overline{C}$ *soit le complété projectif de* $\overline{R}^c$ *(la réduction canonique de* R*) et que* $\hat{r}|_R=r$, *où* $\overline{X}_u$. $r:R\to\overline{R}^c$ *est la réduction canonique de* R.

REMARQUE. Malheureusement, C n'est pas unique. Dans ce qui suit, nous essaierons d'étendre ce théorème à des espaces analytiques plus généraux.

DEFINITION 1. Soient R un espace affinoïde réduit de dimension 1, Z le complété projectif de $\overline{R}^c$. On appelle ***genre*** de R et on le note $g(R)$ le genre arithmétique de Z (i.e $\dim_{\overline{k}} H^1(Z,\mathcal{O}_Z)$).

On sait que si R_1 est un ouvert affinoïde de R, alors

$g(R_1)\leq g(R)$ ([P2]).

DEFINITION 2. Soit X un espace analytique réduit de dimension 1, on appelle ***genre*** de X et on le note $g(X)$ le nombre $\mathrm{Sup}\{g(R)\mid R \text{ ouvert affinoïde de } X\}\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. On dit que X est de ***genre fini*** si $g(X)$ est fini.

Si C est une courbe algébrique projective sur k, munie de sa structure d'espace analytique, elle est de genre fini et on a $g(C)$ = genre arithmétique de C ([L]). Ceci entraine que tout ouvert analytique de C est de genre fini.

On considère dans la suite les espaces analytiques X qui vérifient la condition suivante :

(*) X est de dimension 1, connexe, séparé, régulier et de genre fini.

On dit que X (de dimension 1) est régulier si tout point $x \in X$ possède un voisinage isomorphe à $Spm(k\langle T\rangle)$, qu'il est connexe si l'algèbre des fonctions holomorphes sur X n'a pas d'autres éléments idempotents que 0 et 1. L'espace X est toujours isomorphe à la somme directe de ses composantes connexes. Enfin on dit que X est séparé si la diagonale de $X \times X$ est un fermé analytique. Tout espace affinoïde est séparé, toute variété algébrique séparée munie de sa structure d'espace analytique est séparée, tout sous-espace analytique (ouvert ou fermé) d'un espace analytique séparé est séparé.

Tout ouvert analytique connexe d'une courbe algébrique non-singulière sur k vérifie la condition *(*)*. On veut voir si inversement un espace analytique vérifiant *(*)* est ouvert analytique d'une courbe algébrique.

THEOREME 2. *Soit* X *un espace analytique vérifiant (*). Alors on a les propriétés suivantes :*

a) si X *n'est pas une courbe projective, alors il existe une suite d'ouverts affinoïdes connexes* X_n de X *tels que* $X_n \subset X_{n+1}$, *et que tout ouvert affinoïde de* X *soit contenu dans un* X_n. *Pour tout faisceau co-*

hérent $\mathcal{F}$ ***sur*** X, ***on a*** $H^i(X,\mathcal{F})=0$, ***pour tout*** $i\geq 1$ ***et*** $\mathcal{F}$ ***est engendré par ses sections globales.***

b) L'espace X ***possède une réduction préstable (voir définition 3).***

c) Si X ***est ouvert analytique d'une courbe projective, alors il est ouvert analytique d'une courbe projective de genre égal à*** g(X).

DEFINITION 3.On dit qu'une réduction $X\to\overline{X}$ est ***préstable*** si $\overline{X}$ (qui est un schéma localement de type fini sur $\overline{k}$) a un nombre au plus dénombrable de composantes irréductibles, si ces composantes sont des courbes non-singulières et si les seules singularités de $\overline{X}$ sont des points doubles ordinaires.

L'existence d'une réduction préstable pour une courbe projective non-singulière a été d'abord démontrée par Deligne et Mumford ([D.M] 1969) sur un corps de valuation discrète et généralisée aux corps valués complets ultramétriques par van der Put ([P2] 1981) et Bosch, Lütkebohmert ([B.L] 1985). La démonstration de b) provient essentiellement de a) et de ce résultat.

THEOREME 3. *On suppose* k *maximalement complet. Alors tout* k*-espace analytique* X *vérifiant (*) est ouvert analytique d'une courbe projective non singulière de genre arithmétique* g(X).

THEOREME 4. *Soit* X *un espace analytique vérifiant (*) (*k *n'est pas nécessairement maximalement complet). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) L'espace X *est ouvert analytique d'une courbe projective non-singulière* C *et* C-X *est une partie compacte,*

ii) Les fonctions holomorphes bornées sur X sont constantes.

REMARQUE. Dans les théorèmes 2,3,4, l'hypothèse X régulier (contenue dans *(*)*) n'est pas essentielle ([L]). Par contre, l'hypothèse sur **k** dans le théorème 3 ne peut être supprimée, car pour tout corps **k** non maximalement complet, il y a un contre-exemple ([L]).

EXEMPLE ***d'un espace analytique de genre infini.***

Soit $f(S)=\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n S^n \in k[[S]]$ une série formelle de rayon de convergence infini et telle que $(|\alpha_n|)_{n\geqslant 1}$ soit strictement décroissante. On considère $X=\{(\lambda,\mu)\in k\times k \mid \lambda^2=f(\mu)\}$ et $X_n=\{(\lambda,\mu)\in X \mid |\mu|\leqslant|\alpha_n|^{-1}\}$. Les X_n sont des espaces affinoïdes et ils forment un recouvrement de X, cela définit une structure d'espace analytique sur X. En choisissant bien les coefficients de f(S), on a $\overline{X}_n^c \simeq \operatorname{Spm} \overline{k}[t,s]/(t^2-s^n)$. D'où par un calcul simple, $g(X_n)=\left[\frac{n-1}{2}\right]$, donc X est un espace analytique de genre infini.

BIBLIOGRAPHIE

[B,L] S. BOSCH, W. LUTKEBOHMERT Stable reduction and uniformization of abelian varieties I, Math. Ann. **270** (**1985**) **349-379**.

[B.G.R] S. BOSCH, U. GUNTZER, R. REMMERT Non-archimedean Analysis. Springer Verlag **1984**.

[D,M] P. DELIGNE, D. MUMFORD The irreductibility of the space of curves of given genus Publication I.H.E.S n°36 1969.

[F,P] J. FRESNEL, M.van der PUT Géométrie analytique rigide et applications Progress in Math. 18, Birkhaüser 1981.

[Fr] J. FRESNEL Géométrie analytique rigide Cours polycopié 1984 Université de BORDEAUX I.

[G,P] L. GERRITZEN, M. van der PUT Schottky groups and Mumford curves L.N 817, Springer Verlag, 1980.

[L] Q. LIU Ouverts analytiques d'une courbe algébrique en géométrie rigide Thèse BORDEAUX 1986.

[L] Q. LIU Ouverts analytiques d'une courbe algébrique en géométrie rigide. Ann. Inst. Fourier, t. 37, fasc. 3 (1987), 39-64.

[P1] M. van der PUT The class group of a one-dimensional affinoid space Ann. Inst. Fourier, t. 30, fasc. 4, (1980), 155-164.

[P2] M. van der PUT Stable reductions of algebraic curves Prog. Konik. Ned. Ak. Série A, vol 87 (1984), 461-478.

Qing LIU
Bordeaux I - U.A. C.N.R.S. 040226
Mathématiques Pures
351 Cours de la Libération
BORDEAUX