Groupe de travail
d'analyse ultramétrique

Bruno Kahn

Sommes de Gauss attachées aux caractères quadratiques de petit conducteur

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 13 (1985-1986), p. 55-66

<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1985-1986__13__55_0>

SOMMES DE GAUSS ATTACHEES AUX CARACTERES QUADRATIQUES DE PETIT CONDUCTEUR

Bruno Kahn

Soit p un nombre premier et K une extension finie de $\underline{\mathbb{Q}}_p$. On s'intéresse aux constantes $W(\rho)$ associées aux caractères quadratiques du groupe multiplicatif K^*, définies par exemple dans [Ta]. On sait que $W(\rho)$ est une racine 4^e de l'unité; d'autre part, il existe $a \in K^*$, bien déterminé modulo K^{*2}, tel que $\rho(x) = (-1)^{(a,x)}$ pour tout $x \in K^*$, où $(a,x) \in \underline{\mathbb{Z}}/2$ est le symbole de Hilbert de a et x. Notons $\rho = \rho_a$; le problème que l'on considère est de trouver une formule "simple" exprimant $W(\rho_a)$ en fonction de a.

Considérons $a \in K^*/K^{*2}$ comme un élément de $H^1(K,\underline{\mathbb{Z}}/2)$, au moyen de la théorie de Kummer. On a la formule ([BK2], p.26-23):

$$(1) \qquad W_K(\rho_a) = W_{\underline{\mathbb{Q}}_p}(\rho_{Na})(-1)^{N_2(a)},$$

où $N = N_{K/\underline{\mathbb{Q}}_p}$ et $N_2 : H^1(K,\underline{\mathbb{Z}}/2) \longrightarrow H^2(\underline{\mathbb{Q}}_p,\underline{\mathbb{Z}}/2) \simeq \underline{\mathbb{Z}}/2$ est la composante en degré 2 du transfert multiplicatif ([BK1], I.2.4). Le problème peut donc se ramener à un calcul de $N_2(a)$ (cf infra).

Supposons d'abord $p \neq 2$. On a alors:

> Théorème 1. Supposons $p \neq 2$. Choisissons une uniformisante π de K ; notons K_o la sous-extension non-ramifiée maximale de K et P le polynôme caractéristique de π sur K_o. Soit $\delta = P'(\pi)$, e l'indice de ramification et f le degré résiduel de $K/\underline{\mathbb{Q}}_p$. Alors, pour tout $a \in K^*$, on a:

$$W(\rho_a) = i^{v(a)^2((q-1)/2)^2}(-1)^{(\delta,a)+v(a)\phi(a)} ,$$

où $q = p^f$ est le cardinal du corps résiduel, et

$$\phi(a) = (\pi,pa) + f-1 + (ef+\frac{f(f-1)}{2})\frac{p-1}{2} .$$

(Rappelons que si $x , y \in K^*$, on a $(-1)^{(x,y)} \equiv [(-1)^{v(x)v(y)}.\frac{x^{v(y)}}{y^{v(x)}}]^{\frac{q-1}{2}} \pmod{M_K}$,

où M_K est l'idéal de valuation de K.)

Cet énoncé n'avait pas été dégagé dans [BK2]. Pour le démontrer, commençons par noter plus précisément $(,)_K$ le symbole de Hilbert relatif à K (N.B.: j'adopterai ce procédé dans la suite quand nécéssaire pour la clarté des formules, sans autre commentaire). Si L est une extension finie de K, rappelons la formule:

$$(x,y)_L = (x,N_{L/K}y)_K \quad \text{si} \quad x \in K^* , \quad y \in L^* .$$

D'autre part, $\mathrm{Cor}_{L/K}: {}_2\mathrm{Br}(L) \longrightarrow {}_2\mathrm{Br}(K)$ n'est autre que l'identité quand on identifie ces groupes à $\underline{\mathbb{Z}}/2$. Dans loc. cit., th 3, remplaçons l'extension E/K par $K/\underline{\mathbb{Q}}_p$ et prenons $x = \langle\langle a \rangle\rangle$, $\pi_K = \pi$, $\pi_{\underline{\mathbb{Q}}_p} = p$, $\delta = P'(\pi)$. La formule du théorème 3 devient alors:

$$(2) \qquad \mathcal{N}_2(a) = (\delta,a)_K + v(a)[(p,cN_{K_o/\underline{\mathbb{Q}}_p}\mu)_{\underline{\mathbb{Q}}_p} + (\pi p^{-f},a)_K] ,$$

avec $c = c_1(K_o/\underline{\mathbb{Q}}_p)$.

(N.B. Il y a une faute d'impression dans la formule du théorème 3, où le premier π_E devrait être lu π_K).

On a $\mu = \mathrm{Tr}_{K/K_o}(p/\delta\pi)$. Mais:

Lemme 1. $\mathrm{Tr}_{K/K_o}(1/\delta\pi) = (-1)^{e+1}(N_{K/K_o}\pi)^{-1}$.

Démonstration. D'après [CL], ch.3, p.65, lemme 2, on a $Tr_{K/K_o}(\pi^i/\delta) =$

$$\begin{cases} 0 \text{ si } 0 \le i \le e-2 \\ 1 \text{ si } i = e-1 \ . \end{cases}$$

Ecrivons $P(X) = (-1)^e N\pi + XQ(X)$, où Q est unitaire de degré $e-1$. Alors $\pi^{-1} = (-1)^{e+1}(N\pi)^{-1}Q(\pi)$, d'où le lemme.

Par suite, $N_{K_o/\mathbb{Q}_p}\mu = (-1)^{(e+1)f_p f}(N_{K/\mathbb{Q}_p}\pi)^{-1}$ et la formule (2) devient:

$$(3) \qquad N_2(a) = (\delta,a)_K + v(a)[(p,(-1)^{(e+1)f_p f}N_{K/\mathbb{Q}_p}\pi.c)_{\mathbb{Q}_p} + (\pi p^f,a)_K]$$

$$= (\delta,a)_K + v(a)[(p,c(-1)^{ef}N_{K/\mathbb{Q}_p}\pi)_{\mathbb{Q}_p} + (\pi p^f,a)_K] \ ,$$

puisque $(p,p) = (p,-1)$.

Par ailleurs, pour $b \in \mathbb{Q}_p^*$, les formules pour $W(\rho_b)$ données en [BK2], p.26-23 peuvent se résumer en:

$$W(\rho_b) = i^{v(b)^2((p-1)/2)^2}(-1)^{v(b)(p,b)} \ .$$

En prenant $b = N_{K/\mathbb{Q}_p}a$, on trouve donc:

$$(4) \qquad W(\rho_{Na}) = i^{f^2v(a)^2((p-1)/2)^2}(-1)^{fv(a)(p,Na)_{\mathbb{Q}_p}}$$

$$= i^{v(a)^2((q-1)/2)^2}(-1)^{v(a)(p^f,a)_K} \ .$$

En combinant (3) et (4) au moyen de (1) , il vient:

$$W(\rho_a) = i^{v(a)^2((q-1)/2)^2}(-1)^{\psi(a)} \ , \text{ avec:}$$

$$\psi(a) = v(a)(p^f,a)_K + (\delta,a)_K + v(a)[(p,c(-1)^{ef}N\pi)_{\mathbb{Q}_p} + (\pi p^f,a)_K]$$

$$= (\delta,a)_K + v(a)[(\pi,pa)_K + (p,c(-1)^{ef})_{\mathbb{Q}_p}] \ .$$

Mais $(p,-1) \equiv \frac{p-1}{2} \pmod 2$; de plus on a $c = (-1)^{f(f-1)/2}d$, où d est le discriminant de $K_o/\underline{Q}_p$; comme cette extension est non-ramifiée, on a $(p,d) \equiv f-1 \pmod 2$. D'où le théorème 1.

Passons maintenant au cas $p = 2$. Vu l'identité:

$$W(\rho_{ab}) = W(\rho_a)W(\rho_b)(-1)^{(a,b)} , \tag{5}$$

([Ta], p.126, cor.2), toute formule pour $W(\rho_a)$ fournit immédiatement une formule pour (a,b) . Comme les symboles de Hilbert "sauvages" sont difficiles à calculer, on voit qu'une formule "simple" pour $W(\rho_a)$ est à peu près hors de portée en général pour $p = 2$. On peut cependant espérer:

-une formule dans l'esprit de [He] en général;
-des formules raisonnables dans certains cas particuliers.

C'est cette dernière question que je vais traiter ici. Soit $a , b \in O_K$, l'anneau des entiers de K ; on a la formule:

$$(1+2a,1+2b) \equiv \mathrm{Tr}_{K/\underline{Q}_2} ab \pmod 2 . \tag{6}$$

En effet, rappelons l'identité $(x,1-x) = 0$ pour $x \neq 0,1$ .En l'utilisant deux fois, on peut écrire:

$$\begin{aligned}(1+2a,1+2b) &= (-2b(1+2a),1+2b)\\ &=(-2b(1+2a),[1+2b(1+2a)](1+2b)^{-1})\\ &=(-2b(1+2a),1+4ab(1+2b)) .\end{aligned}$$

Mais pour tout $(x,y) \in K^* \times O_K$, on a ([CL], ch.15, prop.6):

$$(x,1+4y) = v(x)\mathrm{Tr}_{k/\underline{F}_2}\bar{y} , \tag{6bis}$$

où k est le corps résiduel de K et $\bar{y}$ est la projection de y sur k . Par suite:

$$(1+2a,1+2b) = v(2b)\mathrm{Tr}_{k/\underline{F}_2}\bar{a}\bar{b} \ .$$

Si $v(b) > 0$, on a $(1+2a,1+2b) = 0$ et $\mathrm{Tr}_{K/\underline{Q}_2} ab \equiv 0 \pmod 2$. Supposons $v(b) = 0$; alors $v(2b) = e$ (indice de ramification), donc

$$(1+2a,1+2b) = e\mathrm{Tr}_{k/\underline{F}_2}\bar{a}\bar{b} \equiv \mathrm{Tr}_{K/\underline{Q}_2} ab \pmod 2 \ .$$

Pour $u \in 1+2O_K$, posons $W'(\rho_u) = W(\rho_u)i^{-\mathrm{Tr}((u-1)/2)^2}$. D'après (5) et (6), on a:

$$W'(\rho_{uv}) = W'(\rho_u)W'(\rho_v) \quad \text{pour} \quad u \ , \ v \in 1+2O_K \ .$$

Faisant $u = v$, on trouve $W'(\rho_u)^2 = 1$; par non-dégénérescence du symbole de Hilbert, il existe donc $x_K \in K^*$ (déterminé modulo K^*U_{e+1} [1]) tel que, pour tout $u \in 1+2O_K$, on ait:

$$W(\rho_u) = i^{\mathrm{Tr}((u-1)/2)^2}(-1)^{(x_K,u)} \ . \tag{7}$$

Je me propose de donner une <u>méthode de calcul</u> de x_K ; elle consiste à se ramener par dévissage à une extension relative de degré 2, où l'on donnera une valeur explicite d'un x_K "relatif". En analysant de près le dévissage, on peut peut-être obtenir une formule pour x_K en général, mais je n'y suis pas parvenu. Voici toutefois une conséquence du calcul ci-dessous:

<u>Théorème 2</u>. Si $K/\underline{Q}_2$ est modérée, on a $x_K = 1$, i.e.:

$$W(\rho_{1+2a}) = i^{\mathrm{Tra}^2} \quad \text{pour} \quad a \in O_K \ .$$

Ceci améliore le cor. à la prop. 11 de [BK2], où l'on supposait seulement K non-ramifié sur $\underline{Q}_2$.

---

(1) Je note $U_i = \{x \in K \mid v(x-1) \geq i\}$.

Le transfert multiplicatif.

Soit F un corps de caractéristique $\neq 2$, et E une extension finie, séparable de F. Dans [BK1], I.2.4, on a défini une application $N_2 : H^1(E, \underline{Z}/2) \longrightarrow H^2(F, \underline{Z}/2)$; via la théorie de Kummer, on peut regarder N_2 comme une application de E^*/E^{*2} dans ${}_2\mathrm{Br}(F)$ (sous-groupe de 2-torsion du groupe de Brauer de F). Notons le premier groupe multiplicativement et le second additivement; alors N_2 a les propriétés formelles suivantes (loc. cit.):

$$N_2(xy) = N_2(x) + N_2(y) + \mathrm{Cor}_{E/F}(x,y)_E + (N_{E/F}x, N_{E/F}y)_F \tag{8}$$

pour $x, y \in E^*$;

si D/E est une autre extension finie et séparable, on a (avec des notations évidentes):

$$N_2^{D/F}(x) = \mathrm{Cor}_{E/F} N_2^{D/E}(x) + N_2^{E/F}(N_{D/E}x) \quad \text{pour} \quad x \in D^* . \tag{8 bis}$$

Notons $c(E/F) = (-1)^{n(n-1)/2} d$ le "discriminant à signe" de l'extension E/F, où $n = [E:F]$ et d est le discriminant ordinaire.

Lemme 2. Pour tout $x \in F^*$, on a:

$$N_2(x) = (x, c(E/F)) . \tag{8 ter}$$

Démonstration. C'est une application du principe de dévissage utilisé dans [BK1], et que l'on utilisera de nouveau plus loin. Si $[E:F] = 2$, la formule (8 ter) résulte de loc. cit., prop. I.2.5.d et du fait que $(x,x) = (x,-1)$. Si D/E et E/F sont des extensions successives, on a $c(D/F) = c(E/F)^{[D:E]} N_{E/F} c(D/E)$; on en déduit que le second membre de (8 ter) a une propriété de transitivité analogue à (8 bis), donc que (8 ter) est vrai pour une extension formée d'extensions quadratiques successives. Enfin, supposons E/F quelconque; soit E la clôture galoisienne de E/F, et $K \subset E$ une sous-extension correspondant à un 2-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{Gal}(E/F)$. Il suffit de prouver (8 ter) après extension des scalaires de F à K : en effet, $[K:F]$ est impair, donc $\mathrm{Res}_{K/F} : {}_2\mathrm{Br}(F) \longrightarrow {}_2\mathrm{Br}(K)$

est injective. Mais $E \otimes_F K$ est produit fini d'extensions K_i de K qui sont formées d'extensions quadratiques successives; comme $\mathrm{Res}_{K/F} \widetilde{N_2^{E/F}}(x) = \sum_i \widetilde{N_2^{K_i/K}}(x)$ et que $c(E/F) \equiv \prod_i c(K_i/K) \pmod{K^{*2}}$, cela termine la démonstration.

Cas d'un corps local.

Soit K un corps complet pour une valuation discrète v ; on suppose que K est de caractéristique zéro et que son corps résiduel k est de caractéristique 2 et parfait. Notons O_K l'anneau de valuation de v ; alors (6) et (6 bis) se généralisent en:

(6') $\qquad (1+2a, 1+2b) = e\tau(ab)$ pour $a, b \in O_K$;

(6' bis) $\qquad (x, 1+4y) = v(x)\tau(y)$ pour $(x,y) \in K^* \times O_K$,

où $e = e_K = v(2)$ est l'indice de ramification absolu et τ est le composé des projections $O_K \longrightarrow k$ et $k \longrightarrow k/P(k)$ (où $P(x) = x^2+x$), le groupe $k/P(k)$ étant canoniquement identifié à ${}_2\mathrm{Br}(K)$ au moyen de [CL], ch.12, p.194, th.2 et ch.10, p.163, §3a).

Soit L une extension quadratique de K , de discriminant d .

Proposition 1. Pour tout $a \in O_L$, on a:

$$N_2(1+2a) = \begin{cases} e_K \tau_K(N_{L/K} a) & \text{si } L/K \text{ est non-ramifiée;} \\ (1+\mathrm{Tr}a, d) + e_K \tau_K(Na) & \text{si } L/K \text{ est totalement ramifiée.} \end{cases}$$

Pour démontrer ceci, on a besoin du

Lemme 3. Supposons $\mathrm{Tr}\, a \equiv 1 \pmod{M_K}$. Alors L/K est non-ramifiée, et $(1+4Na)d \in K^{*2}$.

(On note M_K l'idéal de valuation de K .)

Démonstration. L'image résiduelle de a dans ℓ (corps résiduel de L) satisfait à une équation d'Artin-Schreier, donc ℓ/k est quadratique, ce qui prouve que L/K est non-ramifiée. De plus, l'extension L est engendrée par a ; la classe de carrés d est donc représentée par $(\mathrm{Tr}\, a)^2 - 4Na$. En utilisant le fait que $(\mathrm{Tr}\, a)^2 \equiv 1 \pmod 4$, on trouve:

$$((\mathrm{Tr}\, a)^2 - 4Na)(1 + 4Na) \equiv (\mathrm{Tr}\, a)^2 - 4Na + 4Na \pmod{16},$$

d'où $d(1 + 4Na) \in K^{*2}$, CQFD.

(N.B. Dans [BK2], on a besoin du même résultat pour démontrer la prop. 11, mais il y est prouvé incorrectement; on peut utiliser le lemme ci-dessus pour "réparer" cette preuve.)

Montrons maintenant la prop. 1. D'après [BK1], lemme II.2.1, on a:

$$N_2(1+2a) = (2,d) + (2+2\mathrm{Tr}\, a, -dN(1+2a)),$$

le deuxième terme étant interprété comme zéro si $\mathrm{Tr}(1+2a) = 0$.

Ecrivons $N(1+2a) = 1 + 2\mathrm{Tr}\, a + 4Na = (1+2\mathrm{Tr}a)(1+4Na/(1+2\mathrm{Tr}a))$
$\equiv (1+2\mathrm{Tr}a)(1+4Na) \pmod{K^{*2}}$. On en déduit:

$$N_2(1+2a) = (2,d) + (2+2\mathrm{Tr}a, -1-2\mathrm{Tr}a) + (2+2\mathrm{Tr}a, d(1+4Na)).$$

Dans le membre de droite, le deuxième terme est nul vu l'identité $(x,1-x) = 0$. Supposons $\mathrm{Tr}\, a \equiv 1 \pmod{M_K}$. D'après le lemme 3, L/K est non-ramifiée et $d(1+4Na) \in K^{*2}$; par suite:

$$N_2(1+2a) = (2,d) = (2,1+4Na) = e_K \tau_K(Na).$$

Supposons $\mathrm{Tr}\, a \not\equiv 1 \pmod{M_K}$. Alors on peut écrire:

$$\begin{aligned} N_2(1+2a) &= (2,d) + (2+2\mathrm{Tr}a, d) + (2+2\mathrm{Tr}a, 1+4Na) \\ &= (1+\mathrm{Tr}a, d) + v(2+2\mathrm{Tr}a)\tau_K(Na). \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Tr}\, a \not\equiv 1 \pmod{M_K}$, $v(2+2\mathrm{Tr}a) = e_K$. Si de plus L/K est non-ramifiée,

d possède un représentant dans $1+4O_K$; comme $1+Tra$ est une unité, la formule (6' bis) montre que $(1+Tra,d) = 0$; ceci termine la démonstration.

Corollaire. Soit L/K une extension modérée. Alors, pour tout $a \in O_L$, on a:

$$N_2(1+2a) = e_K \tau_K(T_2(a)) ,$$

où $T_2(a)$ est la "trace quadratique" de a, i.e. le $(n-2)^e$ coefficient de son polynôme caractéristique ($n = [L:K]$).

Ceci généralise la prop. 11 de [BK2], qui est le cas particulier où L et K sont absolument non-ramifiés. On procède exactement de la même manière qu'au lemme 2: si L/K est quadratique, elle est non-ramifiée, donc l'énoncé se réduit à la prop. 1 . En utilisant (8 bis) et son analogue pour T_2, on vérifie que l'égalité "passe" aux extensions composées d'extensions quadratiques successives et on termine en remarquant que la clôture galoisienne d'une extension modérée est modérée et que si M/K est modérée, $e_M \equiv e_K \pmod 2$.

Le théorème 2 se déduit alors du corollaire ci-dessus exactement comme dans [BK2] le corollaire à la prop. 11 se déduit de celle-ci.

Passons maintenant au cas où l'extension quadratique L/K est ramifiée. Notons D la différente de l'extension, et $t = v_L(D)$.

Lemme 4. t est égal soit à $2e_K+1$, soit à un entier pair $< 2e_K+1$.

Démonstration. Soit π une uniformisante de L, de polynôme caractéristique $P = X^2 - TX + N$. Comme $O_L = O_K[\pi]$, D est engendré par $P'(\pi) = 2\pi - T$. Mais $v_L(2\pi) = 2e_K+1$ et $v_L(T)$ est un entier pair, d'où le lemme.

Proposition 2. Il existe $\delta \in L^*$ tel que, pour tout $a \in O_L$, on ait:

$$N_2(1+2a) = Cor_{L/K}(\delta, 1+2a) + e_K \tau(Na) .$$

Si π est une uniformisante de L telle que $T = Tr\pi \neq 0$, on peut choisir $\delta = \pi/T - 1/2$. Si $t = 2e_K+1$, on peut choisir pour δ tout élément de L^* de trace 0 .

Remarque. Si $t < 2e_K+1$, on a $t = v_L(T)$, donc en particulier $T \neq 0$.

Démonstration. Supposons d'abord $T \neq 0$, et soit δ comme dans l'énoncé. Ecrivons $a = a_1 + \pi a_2$, où a_1 , $a_2 \in K$. Comme $v_L(a_1)$ est pair et $v_L(\pi a_2)$ impair, on a $v_L(a) = \inf(v_L(a_1), v_L(\pi a_2))$; par conséquent, a_1 et $a_2 \in O_K$. Posons $\lambda = (1+Tra)^{-1}$; alors on a l'égalité:

$$\lambda(1+2a) - 2a_2T\lambda\delta = 1 .$$

Par suite, $(\lambda(1+2a), -2a_2T\lambda\delta) = 0$, c'est-à-dire:

$$(1+2a,\delta) = (\lambda,-2a_2T\lambda)_L + (\lambda,\delta) + (\lambda,1+2a) + (-2a_2T,1+2a) .$$

On a $Cor_{L/K}(\lambda,-2a_2T\lambda)_L = 2(\lambda,-2a_2T\lambda)_K = 0$, et $Cor(\lambda,\delta) = (\lambda,N\delta) = (1+Tra,-d)$. De plus,

$$Cor(\lambda,1+2a) = (\lambda,N(1+2a)) = (1+Tra,(1+2Tra)(1+4Na) = (1+Tra,-1) ,$$

puisque $(1+Tra,-1-2Tra) = (1+Tra,1+4Na) = 0$.

Enfin, $Cor(-2a_2T,1+2a) = (-2a_2T,N(1+2a))$. Mais:

Lemme 5. On a $N(1+2a) \equiv 1+2a_2T \pmod{K^{*2}}$.

En effet, on a
$$\begin{aligned} N(1+2a) = 1+2Tra+4Na &= 1+4a_1+2a_2T+4N(a_1+\pi a_2) \\ &\equiv 1+4a_1+2a_2T+4a_1^2 \pmod{4M_K} \\ &\equiv (1+2a_1)^2(1+2a_2T/(1+2a_1)^2) \pmod{4M_K} \\ &\equiv (1+2a_1)^2(1+2a_2T) \pmod{4M_K} \\ &\equiv 1+a_2T \pmod{K^{*2}} . \end{aligned}$$

Par conséquent, $(-2a_2T,N(1+2a)) = (-2a_2T,1+2a_2T) = 0$. En définitive, on trouve:

$$Cor(1+2a,\delta) = (1+Tra,d) .$$

Supposons maintenant $t = 2e_K+1$. Si $\alpha \in K^*$, on a

$$\mathrm{Cor}(1+2a,\alpha) = (N(1+2a,\alpha) = (1+2\mathrm{Tr}a+4Na,\alpha) = v(\alpha)\tau(Na + \mathrm{Tr}a/2) ,$$

car $\mathrm{Tr}a \in 2O_K$. Mais $Na \equiv (\mathrm{Tr}a/2)^2 \pmod{M_K}$ (écrire $a = a_o+b$,avec $a_o \in O_K$, $b \in M_L$; on a $\mathrm{Tr}b \in 2M_K$); par conséquent $\tau(Na + \mathrm{Tr}a/2) = 0$ et $\mathrm{Cor}(1+2a,\alpha) = 0$.

Soit π une uniformisante de L ; quitte à remplacer π par $\pi + 2$, on peut supposer $\mathrm{Tr}\pi = T \neq 0$; alors on peut choisir $\delta = \pi/T - 1/2$ dans la prop.2. On a $\mathrm{Tr}\delta = 0$; si δ' est un autre élément de trace nulle, il existe $\alpha \in K^*$ tel que $\delta' = \alpha\delta$. Par conséquent, $\mathrm{Cor}(1+2a,\delta') = \mathrm{Cor}(1+2a,\delta)$, ce qui termine de démontrer la prop. 2 .

Corollaire. Soit L/K une extension finie quelconque. Il existe $\delta = \delta_{L/K}$ tel que, pour tout $a \in O_L$, on ait:

$$\mathcal{N}_2(1+2a) = \mathrm{Cor}_{L/K}(\delta,1+2a) + e_K\tau_K(T_2(a)) .$$

De plus, $\delta_{L/K}$ a les propriétés formelles suivantes:

i) Si M/L et L/K sont deux extensions successives, $\delta_{M/K} = \delta_{M/L}\delta_{L/K}$.
ii) Soit E/K une extension finie, et $E \otimes_K L = \prod L_i$. Alors $1\otimes\delta_{L/K} \equiv \prod \delta_{L_i/E} \pmod{(E\otimes L)^{*2}}$.

Démonstration. De nouveau, on déduit ceci du cas quadratique de la même manière que pour le lemme 2 et le corollaire à la prop.1; les détails sont laissés au lecteur.

Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Dans le cor. à la prop.2, remplaçons L par K et K par $\mathbb{Q}_p$; la formule (1) montre alors que dans (7), on peut prendre $x_K = \delta_{K/\mathbb{Q}_p}$. De plus, le principe de dévissage, accompagné des propriétés i) et ii) ci-dessus et des propositions 1 et 2 , donne un algorithme de calcul de x_K .

Références

[BK1] B.Kahn Classes de Stiefel-Whitney de formes quadratiques et de représentations galoisiennes réelles, Invent. Math. 78, 223-256 (1984).

[BK2] B.Kahn Le groupe des classes modulo 2, d'après Conner et Perlis, Sém. th. nombres Bordeaux,exp. n° 26 (1984-1985).

[He] G.Henniart Sur les lois de réciprocité explicites, I, J. de Crelle 329, 177-203 (1981).

[CL] J-P.Serre Corps locaux, Hermann, Paris, 1968.

[Ta] J.Tate Local constants, in Algebraic number fields (A.Fröhlich, éd.) 89-131, Academic Press, New-York, 1977.

Bruno Kahn
UNIVERSITE PARIS VII
U.A. 212 - MATHEMATIQUES
2, Place Jussieu

75221 - PARIS CEDEX 05