ALAIN ROBERT

Représentations p-adiques de dimension infinie de sous-groupes ouverts de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 12, nº 2 (1984-1985), exp. nº 23, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1984-1985__12_2_A4_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
12e année, 1984/85, n° 23, 14 p.
20 mai 1985

REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES DE DIMENSION INFINIE DE SOUS-GROUPES OUVERTS DE $SL_2(\mathbb{Q}_p)$

par Alain ROBERT (*)

On étudie des représentations de $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ et de ses sous-groupes de congruence dans des espaces de Banach p-adiques. En particulier, on s'intéresse à l'irréductibilité topologique de telles représentations. De plus, on examine les cas où les représentations considérées se prolongent à $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ voire à $SL_2(\mathbb{Q}_p)$. Les groupes en question ne supportent pas de mesure de Haar p-adique (ils ont des sous-groupes ouverts dont l'indice est une puissance arbitrairement grande de p). On ne s'étonnera donc pas que de tels groupes "compacts" admettent des représentations topologiquement irréductibles de dimension infinie.

1. Représentations p-adiques des sous-groupes de congruence principaux.

Nous dénoterons par $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques, $\mathbb{C}_p$ représentant un complété d'une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$. Ainsi, le corps $\mathbb{C}_p$ est à la fois algébriquement clos et complet pour une valeur absolue, simplement dénotée par $|\ldots|$, qui prolonge la valeur absolue usuelle de $\mathbb{Q}_p$. Ce corps $\mathbb{C}_p$ joue le rôle de corps universel (il est isomorphe non canoniquement au corps des nombres complexes $\mathbb{C}$).

Lorsque $p \neq 2$, les sous-groupes de congruence principaux K_n sont définis par

$$K_n = \{ g \in SL_2(\mathbb{Z}_p) \ : \ g \equiv 1 \bmod p^n \} \ .$$

Ainsi, K_n est un sous-groupe distingué ouvert de $K_o = SL(\mathbb{Z}_p)$. Pour pouvoir traiter uniformément tous les nombres premiers simultanément, nous poserons encore pour $p = 2$

$$K_n = \{ g \in SL_2(\mathbb{Z}_2) \ : \ g \equiv 1 \bmod 2^{n+1} \} \ .$$

(*) Alain ROBERT, Institut de Mathématiques, 20 chemin de Chantemerle, CH-2000 NEUCHÂTEL (Suisse).

Nous définirons une première famille de représentations de K_1 dans l'espace de Banach p-adique

$$H = \{ \varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_i x^i \; : \; a_i \in \mathbb{C}_p \, , \; |a_i| \to 0 \} .$$

La norme d'un élément $\varphi \in H$ est définie par

$$\|\varphi\| = \sup_{\mathbb{Z}} |a_i| = \max_{\mathbb{Z}} |a_i| .$$

Comme toute série p-adique converge dès que le module de son terme général tend vers 0, on voit que la série définissant une $\varphi \in H$ converge pour tout $x \in \mathbb{C}_p$ satisfaisant $|x| = 1$. Il est bien connu que

$$\|\varphi\| = \sup |\varphi(x)| \quad \text{(borne sup calculée sur les } |x| = 1 \text{ de } \mathbb{C}_p).$$

Lorsque $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K_1$, on pose

$$^t g(x) = {}^t g \cdot x = \frac{ax + c}{bx + d}$$

Lorsque $x \in \mathbb{C}_p$ satisfait $|x| = 1$, on a donc aussi $|^t g \cdot x| = 1$ $(g \in K_1)$. Les entiers p-adiques k et $\ell \in \mathbb{Z}_p$ étant fixés, on définit la représentation $\pi_{k,\ell}$ de K_1 dans H par la formule

$$[\pi_{k,\ell}(g)\varphi](x) = (bx + d)^k \left(a + \frac{c}{x}\right)^{\ell} \varphi\left(\frac{ax + c}{bx + d}\right) .$$

Ces expressions ont un sens car par exemple

$$(bx + d)^k = d^k \left(1 + b\frac{x}{d}\right)^k = d^k \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k}{j} b^j x^j / d^j$$

est bien défini: $d \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ (resp. $d \in 1 + 4\mathbb{Z}_2$ si $p = 2$), et la série du binôme est convergente puisque

$$|bx/d| = |b| < 1 \quad \text{(en fait } \leqslant 1/p \text{)}$$

pour les éléments considérés. On vérifie sans peine que $\pi_{k,\ell}$ est bien une représentation grâce aux propriétés de cocycle des expressions $bx + d$ et $a + c/x$. De plus, ces représentations sont continues dans le sens que les applications

$$G \times H \longrightarrow H \; : \; (g, \varphi) \longrightarrow \pi_{k,\ell}(g)\varphi$$

sont continues. En fait, les homographies $x \longmapsto {}^t g \cdot x$ produites par des matrices $g \in K_1$ normalisent l'ensemble $|x| = 1$ de $\mathbb{C}_p$ de sorte que

$$\|\pi_{k,\ell}(g)\varphi\| = \|\varphi\| \qquad (g \in K_1 \, , \quad \varphi \in H) .$$

Tous les opérateurs $\pi_{k,\ell}(g)$ $(g \in K_1)$ sont isométriques et inversibles et nous dirons simplement que ces représentations $\pi_{k,\ell}$ sont <u>unitaires</u>. Pour de telles représentations, la continuité évoquée ci-dessus résulte de la continuité des applications

$$g \longrightarrow \pi_{k,\ell}(g)\,\varphi$$

à l'origine de K_1 .

Voici le premier résultat.

<u>Théorème 1</u>. <u>Les représentations</u> $\pi_{k,\ell}$ <u>de</u> K_1 <u>sont continues</u>, <u>unitaires et topologiquement irréductibles lorsque</u> $k \notin \mathbb{Z}$ <u>et</u> $\ell \notin \mathbb{Z}$.

La démonstration d'irréductibilité topologique est similaire à celle donnée dans [R] . Contentons-nous de rappeler son principe. Tous les vecteurs $\varphi \in H$ sont des vecteurs lisses de $\pi_{k,\ell}$. La dérivée $\pi'_{k,\ell}$ de $\pi_{k,\ell}$ agit donc dans H tout entier par endomorphismes continus

$$\pi'_{k,\ell} \; : \; sl_2(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{End}(H) \quad .$$

Il est facile de déterminer l'action de ces représentations sur une base de l'algèbre de Lie $sl_2(\mathbb{Q}_p)$. Prenons donc la base

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de $sl_2(\mathbb{Q}_p)$. L'action du premier générateur s'obtient en dérivant l'action du groupe diagonal donnée par

$$\pi_{k,\ell}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \varphi\,(x) = a^{\ell-k}\varphi(a^2x) \quad .$$

Dans la base "orthonormée" $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de H formée des puissances $\varphi_j(x) = x^j$, on a simplement

$$\pi_{k,\ell}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \varphi_j = a^{\ell-k+2j}\,\varphi_j$$

d'où

$$\pi'_{k,\ell}(h)\,\varphi_j = \pi'_{k,\ell}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \varphi_j = (\ell-k+2j)\,\varphi_j \quad .$$

En utilisant l'opérateur degré $D = x(d/dx) : \varphi_j \longmapsto j\,\varphi_j$, nous avons trouvé

$$\pi'_{k,\ell}(h) = \ell - k + 2D \; .$$

En dérivant de même l'action du sous-groupe à un paramètre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = \exp\ c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \exp\ cf\ ,$$

donnée par

$$\pi_{k,\ell}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}\varphi\ (x) = (1 + \frac{c}{x})^{\ell}\ \varphi(x + c)\ ,$$

on trouve

$$\pi'_{k,\ell}(f)\,\varphi = \frac{\varphi}{x} + \varphi' \quad .$$

L'opérateur $\pi'_{k,\ell}(f)$ agit donc sur la base par $\varphi_j \longmapsto (\ell + j)\ \varphi_{j-1}$ d'où

$$\pi'_{k,\ell}(f) = \frac{1}{x}(\ell + D) = x^{-\ell}\frac{d}{dx}\ x^{\ell} \quad .$$

Finalement, la dérivation le long du sous-groupe à un paramètre

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp\ b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \exp\ be$$

conduit à

$$\pi'_{k,\ell}(e)\,\varphi_j = (k - j)\,\varphi_{j+1}$$

puis à

$$\pi'_{k,\ell}(e) = x(k - D)\ .$$

Il en résulte comme dans [R] que le projecteur $H \longrightarrow \mathbb{C}_p\,\varphi_o : \varphi \longmapsto \varphi(0)\varphi_o$ peut être approché par un produit infini convergent ne faisant intervenir que des opérateurs images de ceux de l'algèbre enveloppante de sl_2. Lorsque k et ℓ ne sont pas des entiers, tout sous-espace invariant $\neq 0$ fermé doit donc contenir les constantes, puis tous les monômes φ_j et donc coïncider avec l'espace entier.

Remarques. La démonstration précédente montre que la restriction de toute représentation $\pi_{k,\ell}$ à un sous-groupe ouvert de K_1 est encore topologiquement irréductible. En effet, un tel sous-groupe a la même algèbre de Lie $sl_2(\mathbb{Q}_p)$ que K_1 . D'autre part, les formules données pour l'action des générateurs e, f et h par $\pi'_{k,\ell}$ permettent de donner l'action de l'opérateur de Casimir Q (générateur du centre de l'algèbre enveloppante de sl_2). On a en effet

$$Q = (\tfrac{1}{2}h)^2 + \tfrac{1}{2}h + fe$$

d'où

$$\pi'_{k,\ell}(Q) = \tfrac{1}{2}(\ell + k)(\ell + k + 1)$$

Les représentations que nous avons construites sont rationnelles sur $\mathbb{Q}_p$. Elles agissent en effet dans l'espace de Banach sur $\mathbb{Q}_p$ formé des $\varphi \in H$ ayant tous leurs coefficients $a_j \in \mathbb{Q}_p$. Elles sont h-diagonalisables sur $\mathbb{Q}_p$ et sont bien déterminées par les deux paramètres a) classe des valeurs propres de h (c'est un élément de $\mathbb{Z}_p \bmod 2\mathbb{Z}$) b) valeur propre de l'élément de Casimir Q. Finalement, observons encore que si k est entier, l'opérateur $\pi'_{k,\ell}(e)$ applique φ_j sur $(k-j)\varphi_{j+1}$ donc φ_k sur 0. Le sous-espace de H engendré par les φ_j d'indice $j \leqslant k$ est invariant. Similairement, si ℓ est entier, $\pi'_{k,\ell}(f)\varphi_{-\ell} = 0$ et le sous-espace engendré par les φ_j d'indices $j \geqslant -\ell$ est invariant. Lorsque $k \geqslant -\ell$ sont simultanément entiers, on trouve ainsi un sous-espace de dimension finie invariant dans H.

2. Représentations du sous-groupe d'Iwahori.

Examinons un cas réductible typique parmi les représentations $\pi_{k,\ell}$ définies précédemment. Nous choisissons le cas $\ell = 0$, cas dans lequel le sous-espace

$$H_+ = \{\varphi \in H : \varphi(x) = \sum_{j \geqslant 0} a_j x^j\}$$

est invariant. Introduisons aussi le sous-groupe d'Iwahori I de $K_o = SL_2(\mathbb{Z}_p)$ défini par

$$I = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K_o : \ b \equiv 0 \bmod p \right\}.$$

C'est un sous-groupe ouvert d'indice p+1 dans K_o (on en donnera un système de représentants des classes dans la section suivante). La restriction de la représentation $\pi_{k,o}$ à H_+ s'étend canoniquement en représentation π_k du sous-groupe d'Iwahori $I \supset K_1$. En effet, lorsque $\ell = 0$, seul le facteur d'automorphie $(bx+d)^k$ apparaît dans la définition de $\pi_{k,o}$, ce qui rend superflue l'hypothèse $c \equiv 0$. Comme dans [R], nous prendrons $k = (k_o, k_1) \in X$ avec

$$X = \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p \quad \text{si } p \neq 2 \quad \text{et } X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \text{ si } p = 2$$

et dénoterons simplement par π_k cette représentation de I dans H_+.

La notation est donc celle de la Note [R] à la différence près que puisque nous utilisons l'action $\varphi({}^t g\cdot x)$ au lieu de la translation à gauche $\varphi(g^{-1}\cdot x)$, nous devons travailler avec le sous-groupe d'Iwahori supérieur: une raison de ce choix apparaîtra dans la section 4.

Théorème 2. Les représentations π_k de I dans H_+ sont unitaires, continues, topologiquement irréductibles lorsque $k \notin \mathbb{N}$. Elles ne s'étendent pas en représentations de K_o.

Montrons simplement pourquoi ces représentations ne peuvent se prolonger au sous-groupe compact K_o. Tout prolongement fournirait un opérateur $\tilde{\pi}(w) = A$ avec $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in K_o$ et donc une équivalence entre les représentations

$$g \longmapsto \pi_k(g) \quad \text{et} \quad g \longmapsto \pi_k(w^{-1}gw) = A^{-1}\,\pi_k(g)\,A\,.$$

En prenant pour g les matrices diagonales $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, on voit cependant que les poids (ou valeurs propres de $\pi_k'(h)$) ne sont pas les mêmes : la première représentation conduit à la suite

$$a^{-k+2j} \quad (\text{ou } -k+2j) \quad \text{pour } j \in \mathbb{N}\,;$$

tandis que la deuxième fournit la suite

$$a^{k-2j} \quad (\text{ou } k-2j) \quad \text{pour } j \in \mathbb{N}\,.$$

Remarque. Les éléments $\varphi \in H_+$ sont donnés par des séries $\sum_{j\geqslant 0} a_j x^j$ convergeant dans le disque unité $|x| \leqslant 1$ de $\mathbb{C}_p$. Pour ces fonctions, on a

$$\|\varphi\| = \sup_{|x|=1} |\varphi(x)| = \sup_{|x|\leqslant 1} |\varphi(x)|$$

(principe du maximum p-adique!).

Indiquons encore comment on obtient une dualité entre H/H_+ et H_+ considérés comme K_1-modules à l'aide des représentations π_{-k-2} resp. π_k. La base $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de H_+ diagonalise $\pi_k(h)$ avec les valeurs propres respectives

$$-k,\ -k+2,\ -k+4,\ \ldots$$

dont la plus petite correspond au "vecteur minimal" $\varphi_o = 1 \in H_+$. Dans le quotient, on trouve les valeurs propres

$$-k-2,\ -k-4,\ -k-6,\ \ldots$$

dont la plus grande correspond au "vecteur maximal"

$$\varphi_{-1} \pmod{H_+} \in H/H_+ \ .$$

La représentation $(\pi_k|_{K_1}, H/H_+)$ correspond donc à un <u>module de Verma intégré</u> à K_1 que nous dénoterons par π^{-k-2} .

<u>Théorème 3</u>. <u>L'accouplement</u>

$$\begin{array}{ccc} (\varphi, \psi \bmod H_+) & \mapsto & \mathrm{Res}_0(\varphi \psi \, dx) \\ H_+ \times H / H_+ & \rightarrow & \mathbb{C}_p \end{array}$$

<u>est</u> π_k et π_{-k-2} <u>équivariant</u>: <u>il fournit une dualité entre</u>

$$(\pi_k , H_+) \ \underline{\text{et}} \ (\pi_{-k-2} \ , H/H_+) = (\pi^k, H/H_+) \ .$$

<u>D'autre part</u>, <u>la forme bilinéaire canonique de Jantzen du module de Verma</u> $(\pi^k , H/H_+)$ <u>est donnée par la formule</u>

$$B(\varphi \bmod H_+ , \psi \bmod H_+) = \mathrm{Res}_{(o,o)} \ (1 + tx)^k \ \varphi(x) \, \psi(t) \ dx \wedge dt.$$

L'équivariance indiquée provient simplement de l'invariance par changement de variable de l'intégrale de Cauchy p-adique (cf. [FP] p.19 ou [GP] p.93) . Quant à la forme bilinéaire de Jantzen, elle est complètement déterminée par sa normalisation

$$B(x^{-1} \bmod H_+ , x^{-1} \bmod H_+) = 1$$

et sa contravariance. Cette dernière permet de calculer par induction les valeurs de B sur les couples formés de deux éléments de base : en introduisant la base

$$e_{-j} = 1/x^{j+1} \bmod H_+ \qquad\qquad (j \geq 0)$$

de H/H_+ , on doit avoir $B(e_{-i},e_{-j}) = 0$ pour $i \neq j$ et par exemple

$$B(X_+e_{-1},e_o) = B(e_{-1},X_-e_o) \qquad (X_+ = \pi^k(e) \ , \ X_- = \pi^k(f) \ ),$$

d'où

$$\begin{aligned} B(-ke_o,e_o) &= B(e_{-1},-e_{-1}) \ , \\ B(e_{-1},e_{-1}) &= k. \end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$B(e_{-j},e_{-j}) = \binom{k}{j} = k(k-1)\ldots(k-j+1)/j! \ .$$

On utilise alors simplement l'observation

$$\mathrm{Res}_{x=0} \ (1 + tx)^k \ x^{-j} \ dx/x = \binom{k}{j} \ t^j$$

pour trouver la formule annoncée.

3. La série discrète p-adique de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Dans cette section, nous examinerons plus particulièrement les représentations π_k du sous-groupe d'Iwahori I lorsque k est un entier strictement négatif. Elles agissent dans l'espace de Banach H_+ et sont topologiquement irréductibles. Puisqu'elles ne peuvent être prolongées au sous-groupe compact maximal $K = K_o =$ $= SL_2(\mathbb{Z}_p)$ de $G = SL_2(\mathbb{Q}_p)$, nous construirons les représentations induites

$$\tilde{\pi}_k = \mathrm{Ind}_I^K(\pi_k) \quad \text{dans} \quad \tilde{H} \ .$$

Les classes à droite de I dans K peuvent se représenter par les éléments

$$s_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad (0 \leqslant i < p) \quad \text{et} \quad s_p = 1 \ .$$

On a en effet une décomposition en classes disjointes

$$K = \coprod_{0 \leqslant i \leqslant p} s_i I \ .$$

La représentation induite $\tilde{\pi}_k$ va agir dans un espace de Banach somme directe de p+1 copies isomorphes à H_+ :

$$\tilde{H} = \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant p} H_i \quad \text{avec} \quad H_i = \tilde{\pi}_k(s_i)\, H_+$$

(donc $H_p = H_+$). Comme on a (pour $i < p$)

$$(i-x)^k \varphi({}^t s_i \cdot x) = (i-x)^k \varphi(\tfrac{1}{i-x}) \ ,$$

on prendra pour H_i l'espaces de Banach formé par les développements

$$\varphi_i(x) = \sum_{j \geqslant 0} a_j \,(i-x)^{k-j} = \sum_{j \geqslant -k} a_j (i-x)^{-j}$$

qui convergent pour $|x - i| \geqslant 1$, i.e. à l'extérieur d'un disque ouvert de rayon unité centré en i . Or on sait qu'une fonction analytique sur le complémentaire d'une réunion finie de disques ouverts de $\mathbb{P}^1$ s'exprime univoquement comme somme de parties principales centrées en chacun de ces disques (cf. [G]). En d'autres termes, les éléments de

$$\tilde{H} = \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant p} H_i = \bigoplus_{0 \leqslant i < p} H_i \oplus H_+$$

s'identifient aux développements

$$f(x) = \sum_{0 \leqslant i < p} \sum_{j \geqslant -k} a_{ij} \frac{1}{(x-i)^j} + \sum_{j \geqslant 0} a_j x^j$$

ayant des suites de coefficients

$$|a_{ij}| \to 0 \quad \text{et} \quad |a_j| \to 0 \quad \text{lorsque } j \to \infty .$$

Rappelons que k est un entier strictement négatif et donc que $-k \geqslant 1$ est un entier strictement positif. Ces développements représentent des fonctions analytiques sur le fermé

$$\Omega_1 = \{ x \in \mathbb{C}_p : |x| \leqslant 1 \text{ et } |x - i| \geqslant 1 \text{ pour } 0 \leqslant i < p \}$$

de la droite projective. Il est clair qu'on a aussi

$$\Omega_1 = \{ x \in \mathbb{C}_p : |x| \leqslant 1 \text{ et } |x - a| \geqslant 1 \text{ pour tout } a \in \mathbb{Q}_p \} .$$

La norme de $\widetilde{H}$ peut se calculer de diverses façons

$$\| f \| = \operatorname*{Max}_{\Omega_1} |f(x)| = \operatorname*{Max}_{i,j} (|a_{ij}|, |a_j|) .$$

<u>Théorème 4</u>. <u>Les représentations</u> $(\widetilde{\pi}_k, \widetilde{H})$ <u>sont unitaires et continues pour</u> k <u>entier strictement négatif</u>. <u>De plus</u>, <u>il y a un sous-espace dense</u> H^ω <u>de</u> H <u>sur lequel la représentation</u> $\widetilde{\pi}_k$ <u>se prolonge canoniquement en représentation de</u> $G = SL_2(\mathbb{Q}_p)$ <u>tout entier</u>. <u>Il y a une topologie d'espace de Fréchet sur</u> H^ω <u>rendant continue l'injection canonique</u> $H^\omega \to \widetilde{H}$ <u>et pour laquelle la représentation</u> $\widetilde{\pi}_k$ <u>étendue à</u> G <u>est continue</u>.

Voici la construction de l'espace H^ω. Pour n entier $\geqslant 1$, on pose

$$\Omega_n = \{ x \in \mathbb{C}_p : |x| \leqslant p^{n-1} \text{ et } |x - a| \geqslant 1/p^{n-1} \ \forall a \in \mathbb{Q}_p \} .$$

Chaque partie Ω_n est le complémentaire dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ d'une réunion finie de disques ouverts

$$\Omega_1 \subset \ldots \subset \Omega_n \subset \ \ldots \ \subset \bigcup_{n \geqslant 1} \Omega_n = \mathbb{C}_p - \mathbb{Q}_p \ :$$

Les éléments $f \in H^\omega$ sont les fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_p - \mathbb{Q}_p$ dont la restriction à Ω_1 admet un développement de la forme requise pour appartenir à $\widetilde{H}$ (coefficients $a_{ij} = 0$ pour $0 \leqslant j < -k$ et $0 \leqslant i < p$). Si on dénote par H^n le sous espace de H^ω formé des fonctions analytiques sur Ω_n avec la norme Max (prise sur Ω_n) qui en fait un espace de Banach, on a

$$H^{\omega} = \bigcap_{n \geqslant 1} H^{n} \subset \widetilde{H} \quad .$$

La famille dénombrable de normes

$$\|f\|_{n} = \operatorname*{Max}_{\Omega_n} |f(x)|$$

munit H^{ω} d'une structure d'espace de Fréchet rendant l'injection canonique $H^{\omega} \to \widetilde{H}$ continue. Ces représentations

$$\widetilde{\pi}_{k} : G = SL_2(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^{\omega})$$

ont été étudiées par [MM] . On convient de dire qu'elles constituent la série discrète p-adique de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ ([MM] parlent aussi de représentations analytiques de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$).

Remarques. Les représentations π_k de K_1 sont lisses dans le sens qu'elles ont une dérivée permettant de représenter l'algèbre de Lie sl_2 par opérateurs bornés agissant dans l'espace de Banach H_+ tout entier. Néanmoins, pour pouvoir étendre les représentations $\widetilde{\pi}_k$ de $K = K_0$ à G tout entier, on doit se restreindre à un sous-espace dense formé de "vecteurs analytiques". Morita fournit une démonstration (apparemment incomplète?) de l'irréductibilité topologique de $(\widetilde{\pi}_k(G), H^{\omega})$. Je ne sais pas démontrer que $(\widetilde{\pi}_k(K), \widetilde{H})$ est irréductible. On se reportera au préprint [M2] pour ce qui concerne l'annonce de Morita.

.../...

4. Interprétation cohomologique.

Faisons agir le groupe $G = SL_2(\mathbb{Q}_p)$ à droite sur l'espace $\mathbb{P}^1$ par multiplication matricielle

$$(u:v) \longmapsto (u:v)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (au+cv : bu+dv) .$$

Lorsque $v \neq 0$, on identifie $(u:v) = (u/v:1)$ à $x = u/v$ et on retrouve l'action (à droite) $x \longmapsto {}^t g \cdot x$ donnée par homographies. L'image de l'origine $(0:1)$ de $\mathbb{P}^1$ par la matrice $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le point $(c:d)$ de $\mathbb{P}^1$ correspondant à c/d si $d \neq 0$. Le stabilisateur de l'origine est donc le sous-groupe de Borel

$$B = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \ : \ c = 0 \right\} .$$

On peut donc identifier la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ au quotient $B\backslash G$

$$\begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & B\backslash G & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \\ g & \longmapsto & Bg & \longmapsto & (0:1)\,g = c/d \ . \end{array}$$

Le relèvement de poids k de fonctions sur $\mathbb{P}^1$ à G est défini par la formule

$$F_\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = d^k \varphi((0:1)g) = d^k \varphi(c/d) .$$

Il est bien défini lorsque $k \in \mathbb{Z}$ est entier. Nous pourrons aussi l'utiliser pour relever des fonctions définies dans $|x| \leqslant 1$ et les relever au sous-groupe d'Iwahori I. Dans ce cas, d^k sera bien défini pour $k \in X = \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ et $d \in \mathbb{Z}_p^\times$ (pour $p = 2$, on prendra encore $k \in X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$). Le relèvement de poids k transforme donc fonctions sur $|x| \leqslant 1$ en fonctions sur I et fonctions sur $|x| = 1$ en fonctions sur K_1 (dans ce dernier cas, seule la composante dans $\mathbb{Z}_p$ de k importe). Il entrelace la représentation π_k et la représentation régulière droite sur l'espace de fonctions obtenues. Les fonctions F obtenues par relèvement satisfont toujours aux relations

$$F(pg) = \chi_k^{-1}(p)\ F(g) \qquad\qquad (p \in B)$$

où

$$\chi_k\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = a^k , \quad \chi_k^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = d^k$$

Limitons-nous au cas entier $k \in \mathbb{Z}$. Le faisceau L_k (sur K_1, I ou G) consistera précisément des relevées locales F_φ avec φ rationnelle sans pôle sur l'ouvert correspondant (de $|x| = 1$, $|x| \leq 1$ ou $\mathbb{P}^1$ resp.). Dans le modèle $B\backslash G$ de $\mathbb{P}^1$, la droite affine (complémentaire de $\infty \in \mathbb{P}^1$) est représentée par le sous-groupe

$$N^- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \in G : \ x \in \mathbb{Q}_p \right\} \hookrightarrow B\backslash G$$

et le disque unité $|x| \leq 1$ par

$$N^-_{\leq 1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \in N^- \ : \ |x| \leq 1 \right\} \ .$$

On a une suite d'inclusions d'espaces de sections globales

$H^0(B\backslash G\ ,\ L_k)$ dimension finie ($\neq 0 \iff k \in \mathbb{N}$) ,

$H^0(\ N^-,\ L_k)$ fonctions polynomiales ,

$H^0(\ N^-_{\leq 1},\ L_k)$ sections rat. avec pôles hors de $|x| \leq 1$.

L'algèbre de Tate utilisée systématiquement depuis la section 2 s'identifie à un complété convenable de ce dernier espace, formé de sections analytiques rigides de L_k

$$H_+ = H^0_{\text{rigide}}(\ N^-_{\leq 1}\ ,\ L_k) \ .$$

Le théorème de Borel-Weil indique que le G-module $H^0(B\backslash G\ , L_k)$ est le dual du G-module irréductible de poids dominant k. C'est donc le G-module irréductible de poids minimal -k (nul si $k \notin \mathbb{N}$). Ceci correspond bien au fait que dans $H^0(N^-_{\leq 1}\ ,\ L_k)$, nous trouvons tous les poids

$$-k,\ -k+2,\ \ldots\ ,\ -k+2j,\ \ldots$$

et lorsque $k \geq 0$, $(\pi_k\ , H_+)$ contient un sous-espace invariant de dimension finie ayant les poids

$$-k,\ -k+2,\ \ldots\ ,\ +k \qquad \text{(dimension } k+1) \ .$$

On a vu que le dual de $(\pi_k\ , H_+)$ est isomorphe au module de Verma ($\pi^k = \pi_{-k-2}$, H/H_+) ayant poids dominant k. Un modèle cohomologique de ce dernier est fourni par la cohomologie locale

$$H^1_{\{0\}}(B\backslash G\ ,\ L_{-k} \otimes \omega) \qquad (\omega \text{ faisceau des formes diff. p-ad.}).$$

Cet espace est en effet un module pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{Q}_p)$. La dualité fournie par le théorème 3 étend la dualité de Serre entre

$$H^o(B\backslash G\ ,\ L_k) \quad \text{et} \quad H^1(B\backslash G\ ,\ L_{-k} \otimes \omega\ )$$

et est compatible à la dualité locale. Dénotant par $Y = N^-_{\leqslant 1} \subset B\backslash G$, l'espace $H^1_Y(B\backslash G\ ,\ L_{-k} \otimes \omega)$ est un module pour K_1 et I puisque Y est invariant par translations à droite dans $B\backslash G$. Voici un diagramme résumant la situation.

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{l}\text{Anneau local analytique} \\ \text{de } L_k \text{ en } e \in B\backslash G\end{array} \arrow[r, dashed, leftrightarrow, "\text{dualité}", "\text{locale}"'] & H^1_{\{o\}}(B\backslash G\ ,\ L_{-k} \otimes \omega\ ) \arrow[d] \\
H^o_{\text{rigide}}(Y,\ L_k) \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed, leftrightarrow, "\text{Th.3}"] & H^1_Y(B\backslash G\ ,\ L_{-k} \otimes \omega\ ) \arrow[d] \\
H^o(B\backslash G\ ,\ L_k) \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed, leftrightarrow, "\text{dualité}", "\text{de Serre}"'] & H^1(B\backslash G\ ,\ L_{-k} \otimes \omega\ )
\end{tikzcd}$$

La première ligne est constituée de $\mathfrak{g}$-modules, la seconde de I-modules et la troisième de G-modules.

Remarques. Il serait intéressant d'établir un analogue du théorème 3 en dimension supérieure, i.e. pour un groupe de Chevalley G sur $\mathbb{Q}_p$ possédant un sous-groupe de Borel B déployé sur $\mathbb{Q}_p$. Avec

$$X = B\backslash G \supset Y = N^-_{\leqslant 1} \supset \{0\} \qquad \text{et } m = \dim(X)$$

(N^- étant engendré par les exponentielles des générateurs de Chevalley correspondant aux racines négatives, le polydisque $N^-_{\leqslant 1}$ est aussi bien défini), la suite exacte de cohomologie locale donne une suite exacte

$$H^m_{\{o\}}(X) \longrightarrow H^m(X) \longrightarrow H^m(X - \{0\}\ )$$

où tous les coefficients sont pris dans le faisceau $L_{-k} \otimes \omega$ (k est pris dans le réseau des poids et ω est la puissance extérieure de degré maximal $m = \dim(X)$ du faisceau des formes différentielles sur X). Puisque la variété $X - \{0\}$ n'est pas complète, le théorème de Lichtenbaum prouve que $H^m(X - \{0\}\ ) = 0$. Donc l'application

$$H^m_{\{o\}}(X) \longrightarrow H^m(X)$$

est surjective : elle représente le module de dimension finie $H^m(X)$ comme quotient du module de Verma $H^m_{\{o\}}(X)$ par son sous-module maximal. Ce dernier s'identifie donc à l'image de $H^{m-1}(X - \{0\}\ )$ dans $H^m_{\{o\}}(X)$. C'est une formule de Cauchy p-adique à plusieurs variables qui devrait fournir la dualité au niveau rigide.

Références

[FP] Fresnel J., van der Put M., Géométrie Analytique Rigide et Applications, Birkhäuser (Progr. in Math. vol.18) 1981.

[G] Grauert H., Affinoïde Uberdeckungen Eindimensionaler Affinoïder Räume, I.H.E.S. No.34, 1968, p.5-35.

[GP] Gerritzen L., van der Put M., Schottky Groups and Mumford Curves, Lect. N. 817, Springer-Verlag 1980.

[J] Jantzen J.C., Moduln mit einem höchsten Gewicht, Lect. N. 750,Springer-Verlag 1979.

[MM] Morita Y., Murase A., Analytic representations of SL_2 over a p-adic Field, J. Fac. Sc. Tokyo, vol.28, 1982, p.891-905.

[M2] Morita Y., Ibid. II, Automorphic Forms of Several variables, Taniguchi Symp. Katata 1983, Birkhäuser 1984, p.282-297.

[M3] Morita Y. Ibid.III, (preprint).

[R] Robert A., Représentations p-adiques irréductibles de sous-groupes ouverts de $SL_2(\mathbb{Z}_p)$, C.R.Acad.Sc.Paris t.298 N°11 (1984), p.237-240.