Daniel Bertrand

Constructions effectives de vecteurs cycliques pour un D-module

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 12, nº 1 (1984-1985), exp. nº 11, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1984-1985__12_1_A7_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
12e année, 1984/85, n° 11, 7 p.
28 janvier 1985

CONSTRUCTIONS EFFECTIVES DE VECTEURS CYCLIQUES POUR UN D-MODULE

par Daniel BERTRAND (*)

1. Position du problème.

Soient $K = k(x)$ le corps des fonctions rationnelles sur un corps k de caractéristique 0, et ∂ la dérivation d/dx de K. Par D-module, on entendra ici la donnée d'un K-espace vectoriel V de dimension finie n, et d'un k-endomorphisme ψ de V vérifiant la formule de Leibniz

$$\psi(fe) = (\partial f)\, e + f\, \psi(e)$$

pour tout élément (f, e) de $K \times V$. Ainsi, ψ munit V d'une structure de module sur l'anneau $\mathcal{O} = K[\partial]$ des opérateurs différentiels à coefficients dans K. On dit que V est monogène s'il existe un élément ξ de V, alors appelé vecteur cyclique du D-module V, tel que V soit engendré par ξ en tant que $\mathcal{O}$-module. Dans ce cas, V admet

$$\mathcal{B}(\xi, \psi) = \{\xi, \psi(\xi), \ldots, \psi^{(n-1)}(\xi)\}$$

pour base sur K, il existe un opérateur différentiel unitaire unique

$$L_{\xi,\psi} = \partial^n + a_{n-1}\partial^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathcal{O},$$

d'ordre minimal égal à n, dont l'action sur V annule ξ, et les $\mathcal{O}$-modules V et $\mathcal{O}/(\mathcal{O} L_{\xi,\psi})$ sont isomorphes.

Au théorème de l'élément primitif de la théorie des extensions séparables finies répond dans la présente situation le résultat suivant.

THÉORÈME 1. - *Tout D-module V est monogène.*

Ce classique énoncé (voir [4], ou [5], II 1.3) ne précise pas comment construire un vecteur cyclique de V. Le but de cet exposé est de décrire deux solutions effectives de ce problème. La première, déjà donnée dans [2], n'est guère canonique, et n'a pour sa défense que sa simplicité d'écriture (voir § 2, théorème 2). La seconde, récemment obtenue par KATZ [7] (mais qu'on pourra rapprocher de la méthode décrite par RAMIS dans [10], p. 57-60), est à la fois plus performante d'un point de vue algorithmique, et plus intrinsèque : elle jouit en particulier d'une interessante propriété d'invariance (voir § 3, théorème 3 et remarque 2).

(*) Daniel BERTRAND, Université de Paris VI, Mathématiques, Tour 46, 4 place Jussieu 75230 PARIS CEDEX 05.

Avant de passer à ces constructions, indiquons quelques applications du théorème 1. Soient $\underset{\sim}{e} = (e_0 , \dots , e_{n-1})$ une base de V sur K , et $A_{\underset{\sim}{e}}$ la matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K représentant ψ dans la base $\underset{\sim}{e}$

$$\psi(\underset{\sim}{e}) = \underset{\sim}{e}\, A_{\underset{\sim}{e}} .$$

Les coordonnées dans la base $\underset{\sim}{e}$ des éléments v de V tels que $\psi(v) = 0$ (vecteurs "horizontaux" du D-module V) sont ainsi celles de solutions du système différentiel $\partial Y + A_{\underset{\sim}{e}} Y = 0$. Munissons alors le dual $\tilde{V}$ de V de sa structure naturelle de D-module, définie par

$$\tilde{\psi}(\ell)(e) = \partial(\ell(e)) - \ell(\psi(e))$$

pour tout élément (ℓ , e) de $\tilde{V} \times V$, et soit $\tilde{\xi}$ un vecteur cyclique de $\tilde{V}$. Si

$$L_{\tilde{\xi},\tilde{\psi}} = \partial^n + b_{n-1}\, \partial^{n-1} + \dots + b_0$$

désigne l'opérateur d'ordre n attaché à $\tilde{\xi}$, la matrice représentant ψ dans la base duale $\underset{\sim}{\tilde{e}}(\tilde{\xi})$ de la base $\mathcal{B}(\tilde{\xi} , \tilde{\psi})$ est donnée, d'après un simple calcul, par

$$A_{\underset{\sim}{\tilde{e}}(\tilde{\xi})} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} .$$

En d'autres termes, le théorème 1 permet d'associer à la matrice $A = A_{\underset{\sim}{e}}$ (qu'on aurait pu donner à priori) un élément Q de $GL_n(K)$ (la matrice de passage de $\underset{\sim}{e}$ à $\underset{\sim}{\tilde{e}}(\tilde{\xi})$) et un opérateur différentiel $L = L_{\tilde{\xi},\tilde{\psi}}$ tel que le "changement de fonctions inconnues" $Y \longmapsto Q^{-1} Y$ ramène l'étude du système différentiel $\partial Y + AY = 0$ à celle de l'équation différentielle $Ly = 0$.

On sait l'usage que font nos manuels d'enseignement de l'inverse de cette démarche. Quant à l'assertion elle-même, son principal intérêt réside dans la facilité avec laquelle on peut calculer sur les coefficients de L la plupart des invariants du système différentiel défini par A : rang de Katz, invariants de Gérard et Levelt, indices de Malgrange et de Ramis, calcul des facteurs déterminants dans la décomposition de Turrittin (on pourra ainsi comparer les techniques matricielles de [1] à celles de [6], [11], [12]). De ce fait, il importe, dans les versions effectives du théorème 1, de contrôler non seulement la complexité du vecteur cyclique obtenu, mais aussi celle de l'équation différentielle correspondante. C'est en ce sens que la construction donnée au § 3 est plus performante.

Signalons enfin que le théorème 1 simplifie plusieurs aspects de la théorie de Galois différentielle, tels que l'étude du compositum de deux extensions de Picard-Vessiot. Voir [9], lemme 1, pour une application de ce principe.

2. Une construction archimédienne.

Soit $\underset{\sim}{e} = (e_0 , \ldots , e_{n-1})$ une base du D-module V sur K. Désignons par $A_{\underset{\sim}{e}}$ la matrice représentant ψ dans $\underset{\sim}{e}$, et par $T(x)$ un élément unitaire de l'anneau $R = k[x]$ tel que l'application $x\,T(x)\,\psi$ laisse stable le R-module engendré par $\underset{\sim}{e}$ dans V, de sorte que la matrice

$$B = x\,T(x)\,A_{\underset{\sim}{e}}$$

est à coefficients dans R. Fixons par ailleurs un plongement dans $\underset{\sim}{C}$ du sous-corps k' de k engendré par les coefficients du polynôme T et de polynômes apparaissant dans B, et soit d (resp. H) le maximum des degrés (resp. des valeurs absolues des coefficients) de ces différents polynômes. Avec ces notations, on peut énoncer

THÉORÈME 2 ([2], § 3). - *Il existe deux constantes c et c' effectivement calculables en fonction de n telles que pour tout entier $s > c'(d + H)^c$, l'élément*

$$\gamma_s = \gamma_s(\underset{\sim}{e}) = \sum_{i=0}^{n-1} x^{is}\, e_i$$

soit un vecteur cyclique de V.

Démonstration. - Notons Ψ l'application $x\,T(x)\,\psi$ sur V. Puisque, pour tout entier $i \geq 0$ et tout élément α de K, l'opérateur différentiel $\alpha^i\,\partial^i - (\alpha\,\partial)^i$ est d'ordre $< i$, il suffit de montrer que les vecteurs γ_s, $\Psi(\gamma_s)$, ..., $\Psi^{(n-1)}(\gamma_s)$ sont linéairement indépendants sur K, c'est-à-dire que leur déterminant $\Delta_s(x)$ dans la base $e_0 \wedge \ldots \wedge e_{n-1}$ est non nul.

Par c_1, c_2, ..., on désignera des nombres réels > 0 effectivement calculables en fonction de n (et donc, en particulier, indépendants de l'entier s). Soient i et j deux entiers compris entre 0 et $n - 1$. De la relation

$$(x\,\partial)^j\,(x^{is}) = (is)^j\,x^{is} ,$$

on déduit par récurrence sur j que $\Psi^{(j)}(\gamma_s)$ admet pour i-ième coordonnée dans la base $\underset{\sim}{e}$ une expression de la forme

$$i^j\,T(x)^j\,x^{is}\,s^j + \sum_{\ell=0}^{j-1} b_{j,i,\ell}(x , x^s)\,s^{\ell} ,$$

où les $b_{j,i,\ell}$ sont des polynômes à deux variables à coefficients dans le sous-corps k' de k introduit plus haut, dont les degrés partiels sont majorés par $(d + 1)\,j$ et $n - 1$, et les valeurs absolues des coefficients par $c_1(d + H)^{c_2}$. Par conséquent, le déterminant $\Delta_s(x)$ s'exprime comme un polynôme en s, à coefficient dans $k'[x , x^s]$, dont le terme de plus haut degré possible en s est

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^s & T(x)\,x^s\, s & \dots & T(x)^{n-1}\, x^s\, s^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{(n-1)s} & (n-1)\,T(x)\,x^{(n-1)s}\,s & \dots & (n-1)^{n-1}\,T(x)^{n-1}\,x^{(n-1)s}\,s^{n-1} \end{pmatrix} = \mu_n\, T(x)^N\, x^{sN}\, s^N$$

où l'on a posé $N = n(n-1)/2$ et $\mu_n = \det(i^j)_{0 \leqslant i,\, j \leqslant n-1}$. En particulier, μ_n est un entier strictement positif (égal à $\prod_{0 \leqslant i \leqslant n-2} (i\,!)$), et on obtient en définitive

$$(1) \qquad \Delta_s(x) = \mu_n\, T(x)^N\, x^{sN}\, s^N + \sum_{\ell=0}^{N-1} B_\ell(x\,,\, x^s)\, s^\ell\,,$$

où les B_ℓ sont des éléments de $k'[x\,,\,y]$ indépendants de s, de degrés $\leqslant c_3(d + \frac{1}{c})$ et dont les coefficients sont majorés en valeurs absolues par $c_4(d+H)^{c_5}$.

Notons enfin M la somme des valeurs absolues des coefficients de tous les polynômes $B_0\,,\, \dots\,,\, B_{N-1}$: elle ne dépend pas de s, et est majorée par $c_6(d+H)^{c_7}$ (rappelons que H est, par définition, $\geqslant 1$). Pour toute valeur positive de l'entier s, le deuxième terme du membre de droite de la relation (1) s'écrit alors comme un élément de $k'[x]$, dont les coefficients sont majorés en valeurs absolues par $M\, s^{N-1}$, tandis que, $T(x)$ étant unitaire, son premier terme est un polynôme en x dont le coefficient du terme de plus haut degré vaut $\mu_n\, s^N$. Dès que s est strictement supérieur à M/μ_n, le déterminant $\Delta_s(x)$, vu comme un élément de $k[x]$, a donc au moins un coefficient non nul, et est non nul dans K.

Remarque 1. – L'opérateur différentiel $L_{\xi,\psi}$ associé à un vecteur cyclique ξ de V s'écrit (symboliquement)

$$\frac{1}{\det(\xi\,,\, \psi(\xi)\,,\, \dots\,,\, \psi^{(n-1)}(\xi))} \det\begin{pmatrix} \xi & \psi(\xi) & \dots & \psi^{(n)}(\xi) \\ 1 & & \dots & n \end{pmatrix}.$$

On a donc intérêt à minimiser le degré du déterminant de la base $\mathcal{B}(\xi\,,\, x\,T\,\psi)$. Il peut ici croître linéairement avec s, alors qu'il restera borné dans la méthode suivante.

3. Une construction algébrique.

Soit de nouveau $\underset{\sim}{e} = (e_0\,,\, \dots\,,\, e_{n-1})$ une base de V sur K, et soit a un élément de k. Dans [7], KATZ démontre (dans un cadre d'ailleurs beaucoup plus général – voir les remarques concluant ce §) le résultat suivant.

THÉORÈME 3 ([7], théorème 2). – En dehors d'au plus $n(n-1)$ valeurs de a dans k, l'élément

$$c_a = c_a(\underset{\sim}{e}) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j\,!} \left(\sum_{\ell=0}^{j} (-1)^\ell \binom{j}{\ell}\, \psi^{(\ell)}(e_{j-\ell})\right)$$

est un vecteur cyclique de V.

Démonstration. - Définissons, pour tout couple (i , j) d'entiers $\geqslant 0$ des éléments $e(i , j)$ de V par les relations

$$e(0 , j) = \sum_{\ell=0}^{j} (-1)^{\ell} \binom{j}{\ell} \psi^{(\ell)} (e_{j-\ell}) \quad \text{si} \quad j \leqslant n - 1 ,$$

$$e(0 , j) = 0 \quad \text{si} \quad j \geqslant n ,$$

$$e(i + 1 , j) = \psi(e(i , j)) + e(i , j + 1) ,$$

de sorte que $e(i , j)$ est nul pour $j \geqslant n$, et que

(2) $$\psi^{(i)}(c_a) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x - a)^j}{j !} e(i , j) ,$$

d'après la définition de c_a pour $i = 0$, et une récurrence facile pour $i > 0$. On vérifie de plus que

$$e(i , j) = \sum_{\ell=0}^{j} (-1)^{\ell} \binom{j}{\ell} \psi^{(\ell)}(e_{i+j-\ell})$$

si $i + j \leqslant n - 1$, de sorte que par tout entier i compris entre 0 et $n - 1$

(3) $$e(i , 0) = e_i .$$

A tout élément f de K, associons alors les vecteurs

$$e_i(f) = \sum_{j=0}^{h-1} \frac{f^j}{j!} e(i , j) \quad (i = 0 , \dots , n - 1) .$$

Leur déterminant dans la base $e_0 \wedge \dots \wedge e_{n-1}$ est de la forme $\Delta(f)$, où Δ est un polynôme de degré $\leqslant n(n - 1)$ à coefficients dans K, indépendant de f. Des relations (3), on déduit que Δ prend au point $f = 0$ la valeur 1. Ce n'est donc pas le polynôme nul, et il admet dans K au plus $n(n - 1)$ racines. En dehors d'au plus $n(n - 1)$ valeurs de a dans k, l'élément $\Delta(x - a)$ de K est donc non nul. Mais d'après les relations (2), $\Delta(x - a)$ est le déterminant des vecteurs c_a, $\psi(c_a)$, ..., $\psi^{(n-1)}(c_a)$, qui forment alors bien une base de V sur K.

Remarque 2 ([7] remarque 1). - Supposons que la base $\underset{\sim}{e}$ de départ soit elle-même de la forme $\mathcal{B}(e_0 , \psi)$, pour un vecteur cyclique e_0 de V. Alors, $e(0 , j)$ est nul pour $j > 0$, et la construction précédente ramène, pour toute valeur de a, au vecteur cyclique $c_a(\underset{\sim}{e}) = e_0$ d'origine !

Remarque 3. - La démonstration précédente n'a utilisé du corps k que les propriétés suivantes : d'une part $(n - 1)!$ y est inversible ; d'autre part, k admet au moins $n(n - 1)$ éléments. Pour la seconde, noter que le corps des constantes de $\underset{\sim}{F}_p(x)$ est infini. On sait que la première est nécessaire (voir par exemple [3], § 3.4.2), mais la construction de Katz, comme d'ailleurs celle de [3], permet d'étendre le théorème 1 aux corps différentiels de caractéristique p finie, pourvu que $p \geqslant n$.

Remarque 4 ([7], théorème 1). - Soit a un élément de k tel que la matrice $A_{\underset{\sim}{e}}$

représentant ψ dans la base $\underset{\sim}{e}$ aient ses coefficients dans l'anneau local R_a de K en a (autrement dit, tel que a soit un point ordinaire du système différentiel correspondant). En réduisant modulo $(x - a)$ les relations (2), et en appliquant (3), en déduit du lemme de Nakayama que $c_a(\underset{\sim}{e})$ est un vecteur cyclique de V (et même, plus précisément, un générateur du $R_a[\partial]$-modulo engendré par $\underset{\sim}{e}$). Dans la situation rationnelle choisie pour cet exposé, cela fournit la construction la plus rapide d'un vecteur cyclique de V (voir aussi [10], lemme 1.6.20).

Remarque 5 (voir [9]). - Soient E un corps, F/E une extension séparable finie, et $\underset{\sim}{\alpha} = (\alpha_0 , \ldots , \alpha_{n-1})$ une base de F sur E. A l'instar des méthodes des paragraphes 2 et 3, associons à tout élément x de E l'élément

$$\gamma_x(\underset{\sim}{\alpha}) = \alpha_0 + x \alpha_1 + \ldots + x^{n-1} \alpha_{n-1} ,$$

de F. Le raisonnement de [9] montre qu'en dehors d'au plus $n(n - 1)^2/2$ valeurs de x, l'élément $\gamma = \gamma_x(\underset{\sim}{\alpha})$ est un élément primitif de F/E (c'est-à-dire que les puissances $1 , \gamma , \ldots , \gamma^{n-1}$ forment une base $\mathcal{B}(\gamma)$ de F sur E). J'ignore s'il existe une construction d'éléments primitifs vérifiant la propriété d'invariance de la remarque 2 ci-dessus.

Remarque 6. - Comme me l'a signalé J. DELLA DORA, l'algorithme de [10], § 1.6 a été programmé en langage de calcul formel "Reduce" (voir [6], § 1.4). Il serait intéressant de faire de même pour les algorithmes des paragraphes 2 et 3, et d'en tester l'efficacité (par exemple sur le système d'ordre 4 traité dans [6], p. 30-31)

BIBLIOGRAPHIE

[1] BABBIT (D.) and VARADARAJAN (V.). - Formal reduction theory of meromorphic differential equations : A group theoretic view, Pacific J. of Math., t. 109, 1983, p. 1-80.

[2] BERTRAND (D.). - Systèmes différentiels et équations différentielles, "Séminaire d'arithmétique", Université de Saint-Etienne, 1982/83, exposé n° 5.

[3] CHRISTOL (G.). - Modules différentiels et équations différentielles p-adiques. - Kingston, Queen's University, 1983 (Queens's papers in pure and applied mathematics, 66).

[4] COPE (F.). - Formal solutions of irregular linear differential equations, II, Amer. J. of Math., t. 58, 1936, p. 130-140.

[5] DELIGNE (P.). - Equations différentielles à points singuliers réguliers. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 163).

[6] HILALI (A.). - Contribution à l'étude des points singuliers des systèmes differentiels linéaires, Thèse de 3e cycle, Université de Grenoble, 1982.

[7] KATZ (N.). - A simple algorithm for cyclic vectors, Amer. J. of Math. (à paraître).

[8] MIGNOTTE (M.). - Sur la résolution des systèmes linéaires en nombres entiers, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des Nombres, 15e année, 1973/74, n° G-16, 5 p.

[9] NESTERENKO (Y.). - Sur la dépendance algébrique des composantes des solutions d'un système d'équations différentielles linéaires [en russe], Izvest. Akad. Nauk SSSR, Serija mat., t. 38, 1974, p. 495-512.

[10] RAMIS (J.-P.). - Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires, Mem. of Amer. math. Soc., t. 48, 1984, n° 296.

[11] ROBBA (P.). - Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentiels : Application à la réduction formelle des équations différentielles, Enseignement math., Genève, t. 26, 1980, p. 279-311.

[12] YEBBOU (J.). - Calcul de facteurs déterminants, "Equations différentielles linéaires dans le champ complexe", 1984, CIRM-Luminy (à paraître).