MICHEL J. CARPENTIER

Cohomologie des fonctions ${}_0F_n$

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 12, nº 1 (1984-1985), exp. nº 9, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1984-1985__12_1_A6_0>

7 janvier 1985

COHOMOLOGIE DES FONCTIONS ${}_0F_n$

par Michel J. CARPENTIER (*)

Nous nous proposons d'exposer la construction, par les méthodes de Dwork, d'espaces de cohomologie associés de façon naturelle aux fonctions hypergéométriques généralisées ${}_0F_n(c_1, \ldots, c_n ; x)$. Cette construction généralise celles de [1], [3], [4], [5], et, tout comme dans [4], on peut prendre comme point de départ (au moins à titre heuristique) la formule intégrale classique d'Erdelyi

$$ {}_0F_n(c_1, \ldots, c_n ; x) = \frac{\Gamma(c_1) \ldots \Gamma(c_n)}{(2\pi i)^n} $$

$$ \times \int_{-\infty}^{(0+)} \int_{-\infty}^{(0+)} \exp\left(t_1 + \ldots + t_n + \frac{x}{t_1 \ldots t_n}\right) \frac{dt_1}{t_1^{c_1}} \ldots \frac{dt_n}{t_n^{c_n}} . $$

Les fonctions ${}_0F_n$ apparaissent alors comme solutions de l'équation de déformation des espaces de cohomologie liés à l'étude des sommes exponentielles du type

$$ S_m(x , \theta) = \sum \theta \circ \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q}\left(t_1^{d_1} + \ldots + t_n^{d_n} + \frac{x}{t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}}\right) , $$

où θ est un caractère additif non trivial de $\mathbb{F}_q$ (car $(\mathbb{F}_q) = p$), $d_1, \ldots, d_n$, $a_1, \ldots, a_n$ sont des entiers positifs premiers à p , et la somme porte sur tous les $(t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbb{F}_{q^m}^{\times})^n$.

Sauf dans le deuxième paragraphe, nous nous contenterons d'indiquer les résultats. Les démonstrations figurent dans [2] et seront publiées par ailleurs.

1. Définitions. Construction de la cohomologie.

Soit $p \neq 2$ un nombre premier, et soient $a_1, \ldots, a_n$, $d_1, \ldots, d_n$ des entiers positifs premiers à p , $M = \mathrm{ppcm}(a_1, \ldots, a_n)$, $D = \mathrm{ppcm}(d_1, \ldots, d_n)$. Soit $J : \mathbb{Z}^n \longrightarrow 1/D\, \mathbb{Z}$ l'application définie par $J(\alpha) = J(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{d_i}$; on pose $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $N = J(a) + 1$ et, pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$,

$$ \begin{cases} s(\alpha) = \max\{0 , \frac{-\alpha_1}{a_1}, \ldots, \frac{-\alpha_n}{a_n}\} \\ w(\alpha) = J(\alpha) + N\, s(\alpha) . \end{cases} $$

(*) Michel J. CARPENTIER, La Servantière, HERIC, 44390 NORT-SUR-ERDRE.

On notera par U_i l'élément de $\underset{\sim}{Z}^n$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la i-ième qui est égale à 1, et on dira que deux éléments $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ sont équivalents $(\alpha \sim \alpha')$ si $\alpha_i \equiv \alpha'_i$ modulo d_i pour tout i. On identifiera les classes d'équivalence pour cette relation aux éléments du groupe $G = \prod_{i=1}^n \underset{\sim}{Z}/d_i \underset{\sim}{Z}$.

Pour chaque classe d'équivalence $\bar{\alpha}$ et pour chaque $K \in \frac{1}{D} \underset{\sim}{Z}_{\leqslant 0}$ tel que

$$\bar{\alpha} \cap J^{-1}(K) \neq \emptyset ,$$

il existe un élément unique $\alpha = \sigma(\bar{\alpha}, K)$ satisfaisant les conditions suivantes

(i) $\alpha \in \bar{\alpha}$

(ii) $s(\alpha) = \min\{s(\beta) ; \beta \in \bar{\alpha} \text{ et } J(\beta) = K\}$

(iii) $(-\alpha_i + d_i)/a_i \geqslant s(\alpha)$, $\forall i$

(iv) α est le plus petit élément (pour l'ordre lexicographique) satisfaisant (i), (ii) et (iii).

On montre que $\sigma(\bar{\alpha}, K) - a = \sigma(\overline{\alpha - a}, K - N + 1)$ et que, pour tout $K \in \frac{1}{D} \underset{\sim}{Z}$, $K \leqslant -1$, il existe un unique indice $\lambda = \lambda(\bar{\alpha}, K)$ tel que

$$\sigma(\bar{\alpha}, K) = \sigma(\bar{\alpha}, K+1) - d_\lambda U_\lambda .$$

Pour tout $K \in \frac{1}{D} \underset{\sim}{Z}$, on écrit $K = \tilde{K} + (K - \tilde{K})$, $-1 < \tilde{K} \leqslant 0$. D'après ce qui précède, si $K \leqslant -1$ et $\bar{\alpha} \cap J^{-1}(K) \neq \emptyset$, alors

$$\sigma(\bar{\alpha}, K) = \sigma(\bar{\alpha}, \tilde{K}) - \sum_{\nu=-1}^{K-\tilde{K}} d_{\lambda(\bar{\alpha}, \tilde{K}+\nu)} U_{\lambda(\bar{\alpha}, \tilde{K}+\nu)} .$$

On prolonge les définitions de $\lambda(\bar{\alpha}, K)$ et de $\sigma(\bar{\alpha}, K)$ pour $K > 0$ en posant

$$\lambda(\bar{\alpha}, K) = \lambda(\overline{\alpha - \mu a}, K - \mu(N-1))$$

où μ est un entier quelconque tel que $K - \mu(N-1) \leqslant 0$, et

$$\sigma(\bar{\alpha}, K) = \sigma(\bar{\alpha}, \tilde{K}) + \sum_{\nu=0}^{K-\tilde{K}-1} d_{\lambda(\bar{\alpha}, \tilde{K}+\nu)} U_{\lambda(\bar{\alpha}, \tilde{K}+\nu)} .$$

Soient maintenant

$$\Delta = \{\sigma(\bar{\alpha}, K) ; \bar{\alpha} \in G, K \in \tfrac{1}{D} \underset{\sim}{Z}, \bar{\alpha} \cap J^{-1}(K) \neq \emptyset\}$$

$$\tilde{\Delta} = \{\alpha \in \Delta ; -a_i + 1 \leqslant \alpha_i \leqslant d_i , \forall i\} .$$

Nous indiquons quelques propriétés des ensembles Δ et $\tilde{\Delta}$ qui nous seront utiles.

(P_1) Soient $\alpha \in \Delta$, $K = J(\alpha)$, $\lambda = \lambda(\bar{\alpha}, K)$; si $s(\alpha) > 0$, alors $s(\alpha) = \frac{-\alpha_\lambda}{a_\lambda}$.

(P_2) Si $\alpha \in \tilde{\Delta}$, alors α satisfait l'une (et une seule) des deux propriétés suivantes :

(i) $\alpha - a \in \tilde{\Delta}$,

(ii) $\exists\, j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\alpha + d_j U_j \in \tilde{\Delta}$.

(P_3) Si $\alpha \in \tilde{\Delta}$, alors α satisfait l'une (et une seule) des deux propriétés suivantes :

(i) $\alpha + a \in \tilde{\Delta}$,

(ii) $\exists\, j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\alpha - d_j U_j \in \tilde{\Delta}$.

(P_4) $|\tilde{\Delta}| = N \prod_{i=1}^{n} d_i$.

Soit Ω un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{Q}_p$, et complet pour le prolongement de la valuation p-adique de $\mathbb{Q}$; on notera cette valuation par "ord", de sorte que $\operatorname{ord} p = 1$. Soient π une racine $(p-1)$-ième de $-p$ fixée, $b = \frac{p-1}{p}$. Si $c \in \mathbb{R}$ et $y \in \Omega^\times$, on définit

$$L(y, b, c) = \{\textstyle\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} A_\alpha t^\alpha \; ; \; A_\alpha \in \Omega, \; \operatorname{ord} A_\alpha \geq c + b\, w(\alpha) + Ms(\alpha) \operatorname{ord} y\}$$

$$L(y, b) = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} L(y, b, c).$$

Les éléments de $L(y, b)$ sont des séries de Laurent (infinies) convergentes dans le polydisque $\prod_{i=1}^{n} \{t_i \in \Omega \; ; \; \operatorname{ord} t_i > \frac{nM}{d_i N} \operatorname{ord} y\}$.

Soient

$$f(y, t) = t_1^{d_1} + \dots + t_n^{d_n} + \frac{y^M}{t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n}} \quad \text{et} \quad \hat{F}(y, t) = \exp \pi f(y, t).$$

Pour $i = 1, \dots, n$, on définit des opérateurs différentiels

$$D_{i,y} = t_i \frac{\partial}{\partial t_i} + \pi d_i t_i^{d_i} - \frac{\pi a_i y^M}{t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n}} = \frac{1}{\hat{F}(y, t)} \circ t_i \frac{\partial}{\partial t_i} \circ \hat{F}(y, t).$$

THÉORÈME 1.

(i) <u>Les opérateurs</u> $D_{i,y}$ $(1 \leq i \leq n)$ <u>agissant sur</u> $L(y, b)$ <u>forment une famille complètement sécante.</u>

(ii) <u>Soit</u> V_y <u>l'espace vectoriel engendré sur</u> Ω <u>par</u> $\{y^{Ms(\alpha)} t^\alpha \; ; \; \alpha \in \tilde{\Delta}\}$, <u>alors</u>

$$L(y, b) = V_y \oplus \textstyle\sum_{i=1}^{n} D_{i,y} L(y, b).$$

Il découle de ce théorème que le quotient

$$\mathcal{W}_y = L(y, b) / \textstyle\sum_{i=1}^{n} D_{i,y} L(y, b)$$

est de dimension finie égale à $N \prod_{i=1}^{n} d_i$.

2. Déformation.

Soient $y, z \in \Omega$ satisfaisant $\operatorname{ord} y > (-Nb)/M$ (resp. $\operatorname{ord} z > (-Nb)/M$).

Si y et z sont suffisamment proches,

$$\exp \pi\left(\frac{z^M - y^M}{t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}}\right) = \frac{\hat{F}(z^M , t)}{\hat{F}(y^M , t)}$$

est bien définie en tant que série entière dans les variables $1/t_1 , \ldots , 1/t_n$ et définit (par multiplication) une application

$$T_{z,y} : L(z , b) \longrightarrow L(y , b) .$$

On vérifie immédiatement que, pour tout i , $T_{z,y} \circ D_{i,z} = D_{i,y} \circ T_{z,y}$; par conséquent $T_{z,y}$ induit une application inversible $\bar{T}_{z,y} : \mathcal{W}_z \longrightarrow \mathcal{W}_y$. On va considérer z comme fixé et y variable. Soit $\mathcal{O}_z$ l'anneau des germes de fonctions analytiques dans un voisinage de $z \in \Omega$ et soit

$$\epsilon_y = y \frac{\partial}{\partial y} + \pi M \frac{y^M}{t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}} = \frac{1}{\hat{F}(y , t)} \circ y \frac{\partial}{\partial y} \circ \hat{F}(y , t) .$$

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}_z \otimes_\Omega \mathcal{O}_z & \xrightarrow{\bar{T}_{z,y}} & \mathcal{W}_y \otimes_\Omega \mathcal{O}_z \\ {\scriptstyle y\frac{\partial}{\partial y}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \epsilon_y} \\ \mathcal{W}_z \otimes_\Omega \mathcal{O}_z & \xrightarrow{\bar{T}_{z,y}} & \mathcal{W}_y \otimes_\Omega \mathcal{O}_z \end{array} .$$

LEMME. - *Soit* $\alpha \in \tilde{\Delta}$

(i) *si* $\alpha - a \in \tilde{\Delta}$, *alors* $s(\alpha) = 0$ *et* $\epsilon_y(t^\alpha) = \pi M y^M t^{\alpha - a}$;

(ii) *si* $\alpha + d_i U_i \in \tilde{\Delta}$, *alors*

$$\epsilon_y(y^{Ms(\alpha)} t^\alpha) \equiv \pi M \frac{d_i}{a_i} y^{Ms(\alpha)} t^{\alpha + d_i U_i} \quad \text{modulo} \quad D_{i,y} L(y , b) .$$

Démonstration. - (i) est évident. Pour (ii), soit $K = J(\alpha)$; alors $i = \lambda(\bar{\alpha} , K)$ et $s(\alpha) = (- \alpha_i)/d_i$. Donc si on pose $s = s(\alpha)$,

$$\epsilon_y(y^{Ms} t^\alpha) = - M \frac{\alpha_i}{a_i} y^{Ms} t^\alpha + \pi M y^{M(1+s)} t^{\alpha - a} .$$

D'autre part,

$$\pi M y^{M(1+s)} t^{\alpha - a} = M \frac{\alpha_i}{a_i} y^{Ms} t^\alpha + \pi M \frac{d_i}{a_i} y^{Ms} t^{\alpha + d_i U_i} - D_{i,y}\left(\frac{M}{a_i} y^{Ms} t^\alpha\right) .$$

Q. E. D.

Soit $H \subset G$ le sous-groupe cyclique engendré par l'image de $a = (a_1 , \ldots , a_n)$, et soient $\{G_\ell\}_{\ell=1}^{(G:H)}$ les orbites de G sous addition par les éléments de H . Pour chaque ℓ , $1 \leqslant \ell \leqslant (G : H)$, on définit

$$L^{(\ell)}(y\ ,\ b) = \{\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} A_\alpha t^\alpha \in L(y\ ,\ b)\ ;\quad A_\alpha = 0 \quad \text{si} \quad \bar{\alpha} \notin G_\ell\}\ .$$

Il est clair que $D_{i,y}\, L^{(\ell)}(y\ ,\ b) \subset L^{(\ell)}(y\ ,\ b)$ pour tout i , et on peut donc définir

$$\mathscr{W}_y^{(\ell)} = L^{(\ell)}(y\ ,\ b)/\sum_{i=1}^n D_{i,y}\, L^{(\ell)}(y\ ,\ b)\ ,$$

$$\tilde{\mathscr{W}}_y^{(\ell)} = \mathscr{W}_y^{(\ell)} \otimes_\Omega \mathcal{O}_z\ .$$

On munit $\mathscr{W}^{(\ell)}$ de la base dont les éléments sont les classes de

$$\{y^{Ms(\alpha)}\ t^\alpha\ ;\quad \alpha \in \tilde{\Delta}^{(\ell)}\}\ ,\ \text{où}\quad \tilde{\Delta}^{(\ell)} = \{\alpha \in \tilde{\Delta}\ ;\quad \bar{\alpha} \in G_\ell\}\ .$$

En tant qu'espaces vectoriels sur Ω , $\mathscr{W}_y = \oplus_{\ell=1}^{(G:H)} \mathscr{W}_y^{(\ell)}$.

THÉORÈME 2.

(i) <u>En tant que modules sur</u> $\mathcal{O}_z$, <u>munis de la connexion</u> ϵ_y ,

$$\mathscr{W}_y \otimes_\Omega \mathcal{O}_z \simeq \oplus_{\ell=1}^{(G:H)} \tilde{\mathscr{W}}_y^{(\ell)}\ ;$$

(ii) <u>soit</u> $g = (\prod_{i=1}^n d_i)/(G : H) = |G_\ell|$, <u>alors</u>

$$\text{rang}_{\mathcal{O}_z}(\tilde{\mathscr{W}}_y^{(\ell)}) = gN\ ;$$

(iii) <u>chacun des éléments</u> $y^{Ms(\alpha)}\ t^\alpha$ $(\alpha \in \tilde{\Delta}^{(\ell)})$ <u>de</u> $\tilde{\mathscr{W}}_y^{(\ell)}$ <u>est cyclique pour la connexion</u> ϵ_y .

<u>Démonstration</u>. - Soit $\rho : \tilde{\Delta}^{(\ell)} \longrightarrow \tilde{\Delta}^{(\ell)}$ l'application définie par

$$\rho(\alpha) = \begin{cases} \alpha + d_i U_i & \text{si} \quad \alpha + d_i U_i \in \tilde{\Delta} \\ \alpha - a & \text{si} \quad \alpha - a \in \tilde{\Delta}\ . \end{cases}$$

ρ est bien définie, grâce à la propriété (P_2).

Soient α et β deux éléments distincts de $\tilde{\Delta}^{(\ell)}$: il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $\rho^s(\alpha) \sim \beta$ et $\rho^s(\alpha) = \rho^{s-1}(\alpha) - a$.

Soit $\gamma = \rho^s(\alpha)$: la propriété (P_3) implique que $\gamma - d_i U_i \notin \tilde{\Delta}$, $\forall\, i$. Donc $J(\gamma) \leq J(\beta)$, et il existe $\mu_1\ ,\ \ldots\ ,\ \mu_n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\beta = \gamma + \sum_{i=1}^n \mu_i\, d_i\, U_i\ .$$

Soit $s' = \sum_{i=1}^n \mu_i$, alors $\beta = \rho^{s'}(\gamma) = \rho^{s+s'}(\beta)$, et donc ρ agit transitivement sur $\tilde{\Delta}^{(\ell)}$.

Soient $\lambda_1\ ,\ \ldots\ ,\ \lambda_n$ les entiers positifs définis de façon unique par

$$ga = \sum_{i=1}^n \lambda_i\, d_i\, U_i\ .$$

Soit $\alpha \in \tilde{\Delta}^{(\ell)}$ un élément tel que $\alpha + a \in \tilde{\Delta}^{(\ell)}$, et soit h le plus petit entier tel que $\rho^h(\alpha) = \rho^{h-1}(\alpha) - a$ et $\rho^h(\alpha) \sim \alpha - ga$: il existe $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n \in \underset{\sim}{N}$ tels que

$$\begin{cases} \rho^{h-1}(\alpha) = \alpha - (g-1)\,a + \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i\, d_i\, U_i \\ \rho^h(\alpha) = \alpha - ga + \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i\, d_i\, U_i \\ h = g + \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i \,. \end{cases}$$

Observons que $h \geqslant 2$ puisque $\rho(\alpha) = \alpha + d_i\, U_i$ pour un indice i. De plus, si $h' \in \underset{\sim}{N}$ $(1 \leqslant h' \leqslant h-1)$, alors $\rho^{h'}(\alpha) \neq \alpha$ puisque, soit $\rho^{h'}(\alpha) \not\sim \alpha$, soit $J(\rho^{h'}(\alpha)) > J(\alpha)$.

Maintenant $\rho^h(\alpha) \sim \alpha$ et, pour tout i, $\rho^h(\alpha) - d_i\, U_i \notin \tilde{\Delta}$. Par conséquent $\rho^h(\alpha) = \alpha$ et $ga = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i\, d_i\, U_i$. On en déduit que $\lambda_i = \lambda'_i$ pour tout i et que l'ordre de ρ est égal à $h = g + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = g + \sum_{i=1}^{n} g(a_i/d_i) = gN$. Ceci démontre (ii). Finalement, (iii) est une conséquence directe du lemme.

Q. E. D.

Pour un ℓ fixé $(1 \leqslant \ell \leqslant (G:H))$ on peut maintenant décrire de façon explicite l'action de la connexion sur $\tilde{\mathscr{W}}_y^{(\ell)}$; on choisit un élément $\alpha = \alpha^{(1)}$ de $\tilde{\Delta}^{(\ell)}$ satisfaisant $\alpha + a \in \tilde{\Delta}$, et pour tout $\nu \in \underset{\sim}{Z}$ on pose :

$$\begin{cases} \alpha^{(\nu+1)} = \rho^{\nu}(\alpha^{(1)}) \\ s_\nu = s(\alpha^{(\nu)}) \\ \omega_y^{(\nu)} = y^{Ms_\nu}\, t^{\alpha^{(\nu)}} \,. \end{cases}$$

D'après la démonstration du Théorème 2 on a $\alpha^{(gN+\nu)} = \alpha^{(\nu)}$ et donc $s_{gN+\nu} = s_\nu$ et $\omega_y^{(gN+\nu)} = \omega_y^{(\nu)}$ pour tout $\nu \in \underset{\sim}{Z}$.

Soit

$$\sigma_\nu = \begin{cases} M(1 - s_\nu) & \text{si } \alpha^{(\nu)} = \alpha^{(\nu-1)} - a \\ M(s_{\nu-1} - s_\nu) & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

Avec ces notations, et en utilisant le lemme, on voit que la connexion ϵ_y agissant sur $\tilde{\mathscr{W}}_y^{(\ell)}$ a pour matrice :

$$-\mathcal{H}^{(\ell)} = \pi M \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & y^{\sigma_1} \\ y^{\sigma_2} & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & y^{\sigma_3} & 0 & & \bigcirc & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & y^{\sigma_j} & \ddots & \vdots \\ & \bigcirc & & & y^{\sigma_{gN}} & 0 \end{bmatrix}$$

On remarquera que $\sigma_\nu \geq 0$ pour tout ν et que $s_\nu = 0$ à chaque fois que $\alpha^{(\nu)} \not\sim \alpha^{(\nu+1)}$, de sorte que $\sum_{\nu=1}^{gN} \sigma_\nu = gM$. L'élément $Z = \sum_{\nu=1}^{gN} Z_\nu(y)\, \omega_y^{(\nu)}$ de $\tilde{\mathcal{H}}_y^{(\ell)}$ représente l'image par $\overline{T}_{z,y}$ d'un élément de $\tilde{\mathcal{H}}_z^{(\ell)}$ indépendant de y si, et seulement si, $\epsilon_{\overline{y}}(Z) = 0$ ou, de façon équivalente, s'il satisfait l'équation différentielle

$$E^{(\ell)} : y \frac{\partial}{\partial y} (Z_1 \ldots Z_{gN})^t = \mathcal{H}^{(\ell)} (Z_1 \ldots Z_{gN})^t .$$

La solution classique de $E^{(\ell)}$ au voisinage de $y = 0$ peut s'écrire sous la forme $Z(y) = P(y)\, y^H$, où $H = \mathcal{H}^{(\ell)}(0)$ est une matrice de Jordan, et où $P(y)$ est analytique dans un voisinage de 0, avec $P(0) = I_{gN}$, la matrice identité ([6], Théorème 5.5).

On peut calculer (par exemple) l'équation différentielle scalaire satisfaite par Z_{gN}. Pour cela on pose

$$\delta = y \frac{\partial}{\partial y} ; \quad \Lambda_\nu = \sum_{i=\nu+1}^{gN} \sigma_i \quad \text{si} \quad \nu \leq gN - 1 ; \quad \Lambda_{gN} = 0 .$$

THÉORÈME 3. - Z_{gN} <u>est solution de l'équation différentielle hypergéométrique</u>

$$\prod_{\nu=1}^{gN} (\delta - \Lambda_\nu)\, Z = (-\pi M)^{gN}\, y^{gM}\, Z .$$

<u>Démonstration</u>.- Si l'on convient que $Z_{\nu+gN} = Z_\nu$ pour tout $\nu \in \underline{Z}$, l'équation $E^{(\ell)}$ entraîne

$$\delta Z_\nu = -\pi M\, y^{\sigma_\nu} Z_{\nu-1} .$$

Posons alors, pour $1 \leq \nu \leq gN - 1$,

$$\mu_\nu = (-\pi M)^{gN-\nu}\, y^{\left(\sum_{i=\nu+1}^{gN} \sigma_i\right)} Z_\nu .$$

On a

$$\left(\delta - \sum_{i=\nu+1}^{gN} \sigma_i\right) \mu_\nu = \mu_{\nu-1} \quad \text{si} \quad 2 \leq \nu \leq gN - 1 ,$$

et par conséquent

$$\mu_1 = \sum_{\nu=2}^{gN-1} (\delta - \sum_{i=\nu+1}^{gN} \sigma_i)\ \mu_{gN-1} .$$

D'autre part,

$$(\delta - \sum_{i=2}^{gN} \sigma_i)\ \mu_1 = (-\pi M)^{gN}\ y^{\sigma_1}\ Z_{gN} .$$

Il suffit alors d'observer que $\mu_{gN-1} = \delta\ Z_{gN}$ et de rappeler que $\sum_{\nu=1}^{gN} \sigma_\nu = gM$.

Q. E. D.

Les indices de l'équation différentielle du Théorème 3 sont les racines du polynôme $I(T) = \prod_{\nu=1}^{gN}(T - \lambda_\nu)$. Soient $\nu_1 , \ldots , \nu_g$ $(1 < \nu_1 \leqslant \ldots \leqslant \nu_g = gN)$ les entiers tels que

$$\alpha^{(\nu_j+1)} = \alpha^{(\nu_j)} - a$$

et soit $\nu_0 = 0$. Alors $s_{\nu_j} = 0$ pour $j = 1 , \ldots , g$ et si $\nu \leqslant gN - 1$ satisfait $\nu_j + 1 \leqslant \nu \leqslant \nu_{j+1}$, on a

$$\lambda_\nu = \sum_{i=\nu+1}^{gN} \sigma_i = M(g - j - 1) + M s_\nu .$$

De plus, comme $s_\nu < 1$ $(1 \leqslant \nu \leqslant gN)$, on a $\lambda_\nu < gM$ pour tout ν . En particulier $I(jgM) \neq 0$ pour tout entier $j > 0$. Si $Z(y)$ est la solution d'exposant nul normalisée de sorte que $Z(0) = 1$, alors

$$Z(y) = 1 + \sum_{j\geqslant 1} \frac{(-\pi)^{jgN}}{I(gM).I(2gM)\ \ldots\ I(jgM)}\ y^{jgM} .$$

Posons $\tau_\nu = 1 - (\lambda_\nu)/M$ $(1 \leqslant \nu \leqslant gN - 1)$; alors

$$I(gM) \ldots I(jgM) = (gM)^{jgN}\ j!\ (\tau_1)_j \ldots (\tau_{gN-1})_j ,$$

et donc

$$Z(y) = {}_0F_{gN-1}(\tau_1 , \ldots , \tau_{gN-1} ;\ (\tfrac{-\pi}{g})^{gN}\ y^{gM}) .$$

3. Structure de Frobenius.

Soit $G_{\ell'}$ l'orbite sous H de $p\bar{\alpha}$ pour un choix quelconque de $\bar{\alpha} \in G_\ell$. On définit une application Ω-linéaire $\psi : L^{(\ell')}(y , (b/p)) \longrightarrow L^{(\ell)}(y^p , b)$ par son action sur les monômes :

$$\psi(t_1^{\alpha_1} \ldots t_n^{\alpha_n}) = \begin{cases} t_1^{\alpha_1/p} \ldots t_n^{\alpha_n/p} & \text{si } p \mid \alpha_i , \ \forall\ i \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

Soit d'autre part $F(y , t) = (\hat{F}(y , t))/(\hat{F}(y^p , t^p)) \in L(y , b/p)$. On peut former la composée

$$\mathfrak{F}_y : L^{(\ell')}(y , b) \xrightarrow{i} L^{(\ell')}(y , \frac{b}{p}) \xrightarrow{xF(y , t)} L^{(\ell')}(y , \frac{b}{p}) \xrightarrow{\psi} L^{(\ell)}(y^p , b) ,$$

et on vérifie facilement que $\mathfrak{F}_y \circ D_{i,y} = p \; D_{i,y^p} \circ \mathfrak{F}_y$. Par conséquent, $\mathfrak{F}_y$ induit une application (le Frobenius) au niveau de la cohomologie

$$\bar{\mathfrak{F}}_y : \mathscr{W}_y^{(\ell')} \longrightarrow \mathscr{W}_y^{(\ell)} .$$

La connexion ϵ_{y^p} opérant sur $\tilde{\mathscr{W}}_{y^p}^{(\ell)}$ est définie par

$$\epsilon_{y^p} = \frac{1}{\hat{F}(y^p , t)} \circ \frac{1}{p} \, y \frac{\partial}{\partial y} \circ \hat{F}(y^p , t) ,$$

et sa matrice, par rapport à la base $\{y^{ps(\alpha)} \, t^\alpha \; ; \; \alpha \in \tilde{\Delta}^{(\ell)}\}$ est égale à $\mathscr{H}^{(\ell)}(y^p)$. De plus, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{\mathscr{W}}_y^{(\ell')} & \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{F}}_y} & \tilde{\mathscr{W}}_{y^p}^{(\ell)} \\
\Big\downarrow \epsilon_y & & \Big\downarrow p \, \epsilon_{y^p} \\
\tilde{\mathscr{W}}_y^{(\ell')} & \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{F}}_y} & \tilde{\mathscr{W}}_{y^p}^{(\ell)}
\end{array} .$$

En particulier, si $C^{(\ell)}(y)$ est la matrice de $\mathfrak{F}_y : \mathscr{W}_y^{(\ell')} \longrightarrow \mathscr{W}_{y^p}^{(\ell)}$ et si $Z^{(\ell)}(y)$ (resp. $Z^{(\ell')}(y)$) est la matrice solution de $E^{(\ell)}$ (resp. $E^{(\ell')}$) satisfaisant $Z^{(\ell)}(z) = I_{gN}$ (resp. $Z^{(\ell')}(z) = I_{gN}$) alors

$$C^{(\ell)}(y) \; Z^{(\ell')}(y) = Z^{(\ell)}(y^p) \; C^{(\ell)}(z) .$$

<u>Remarques</u>.

1° Dans ce qui précède, le choix d'une "bonne base" pour $\mathscr{W}_y$ permet d'éviter les problèmes techniques introduits par l'existence de pôles. En particulier, la matrice de Frobenius est analytique dans le disque $\operatorname{ord} y > (-Nb)/M$, et peut donc être évaluée à $y = 0$.

2° Signalons que dans certains cas particuliers la matrice $C^{(\ell)}(0)$ a pu être calculée de façon explicite. Cette matrice est en général triangulaire et ses coefficients diagonaux font intervenir des valeurs de la fonction gamma p-adique en des points rationnels. On peut alors calculer le déterminant du Frobenius et décrire (par déformation) la structure symplectique.

3° La décomposition de $\mathscr{W}_y$ en sous-cristaux donnée par le Théorème 2 a une interprétation géométrique. Dans chaque sous-cristal, le polynôme caractéristique du Frobenius fournit la fonction L d'Artin associée à un caractère du groupe dual de G/H , ce dernier opérant comme groupe d'automorphismes d'un recouvrement d'Artin-Schreier de la variété affine $(\underline{A}^1 - \{0\})^n$. (Voir [2], Introduction.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADOLPHSON (A.) and SPERBER (S.). - Twisted Kloosterman sums and p-adic Bessel functions, Amer. J. of Math., t. 106, 1984, p. 549-591.

[2] CARPENTIER (M. J.). - p-Adic cohomology of generalized hyperkloosterman sums, Thèse, University of Minnesota, 1985.

[3] DWORK (B.). - Bessel functions as p-adic functions of the argument, Duke math. J., t. 41, 1974, p. 711-738.

[4] SPERBER (S.). - p-Adic hypergeometric functions and their cohomology, Duke math. J., t. 44, 1977, p. 535-589.

[5] SPERBER (S.). - Newton polygons for general hyperkloosterman sums, "Cohomologie p-adique", Astérisque, t. 119-120, 1984, p. 267-330.

[6] WASOW (W.). - Asymptotic expansions for ordinary differential equations. - New-York, London, Sydney, Interscience Publishers, 1965 (Pure and applied Mathematics, 14).