PHILIPPE ROBBA

Produit symmétrique de l'équation de Bessel

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 12, nº 1 (1984-1985), exp. nº 7, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1984-1985__12_1_A5_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
12e année, 1984/85, n° 7, 3 p.
3 et 10 décembre 1984 et 14 janvier 1985

PRODUIT SYMÉTRIQUE DE L'ÉQUATION DE BESSEL

par Philippe ROBBA (*)

Soit ζ une racine p-ième de 1 . Sur $\underset{\sim}{F}_p$ on considère le caractère additif $\omega_p : a \mapsto \zeta^a$, et sur $\underset{\sim}{F}_q$ on considère le caractère additif $\omega_q =: \omega_p \circ \mathrm{Tr}_{\underset{\sim}{F}_q : \underset{\sim}{F}_p}$.

Pour $\bar{\lambda} \in \underset{\sim}{F}_q^x$ on définit la somme de Kloosterman

$$K_q(\bar{\lambda}) =: \sum_{x \in \underset{\sim}{F}_q^x} \omega_q(x + \bar{\lambda}/x) .$$

Si $\bar{\lambda} \in \underset{\sim}{F}_\infty$, on pose $\deg \bar{\lambda} =: \deg(\underset{\sim}{F}_p(\bar{\lambda}) : \underset{\sim}{F}_p) = \min(n ; \bar{\lambda}^{p^n} = \bar{\lambda})$.

Soit $s = \deg \bar{\lambda}$. Aux sommes de Kloosterman $K_q(\bar{\lambda})$ on associe la fonction L

$$L(\bar{\lambda} , T) = \exp(\sum_{m \geq 1} K_{p^{sm}}(\bar{\lambda}) \, T^m/m) .$$

On sait que $L(\bar{\lambda} , T)$ est un polynôme de degré 2

$$L(\bar{\lambda} , T) = (1 - \pi_1(\bar{\lambda}) \, T)(1 - \pi_2(\bar{\lambda}) \, T) .$$

Inspiré par les travaux de DWORK et ADOLPHSON sur les polynômes de Hecke, on va étudier, pour **k entier** > 0 ,

$$M_k(T) = \prod_{\bar{\lambda} \in \underset{\sim}{F}_\infty^x} \prod_{j=0}^k (1 - \pi_1(\bar{\lambda})^{k-j} \, \pi_2(\bar{\lambda})^j \, T^{\deg \bar{\lambda}})^{-1/\deg \bar{\lambda}} .$$

Les problèmes posés sont

- montrer que M_k est un polynôme,
- déterminer son degré,
- établir une équation fonctionnelle pour M_k .

Ceci se fait en donnant une interprétation cohomologique de M_k .

En fait, on a déjà une interprétation cohomologique de $L(\bar{\lambda} , T) = \det(1 - T\alpha)$, où α est l'opérateur de Dwork agissant sur un espace de cohomologie $W(\lambda)$, donc $\pi_1(\bar{\lambda})$ et $\pi_2(\bar{\lambda})$ sont les inverses des valeurs propres de α (ici $\lambda = \mathrm{Teich}(\bar{\lambda})$) .

Alors il est clair que $\pi_1(\bar{\lambda})^{k-j}$, $\pi_2(\bar{\lambda})^j$, $0 \leq j \leq k$, sont les inverses des valeurs propres du produit tensoriel symétrique d'ordre k de α .

Par ailleurs, la variation de la cohomologie $W(\lambda)$ par rapport à λ est commandée par l'équation différentielle associée à $J_0(2\pi\sqrt{-\lambda})$, où J_0 est la fonction de Bessel d'ordre 0 et $\pi^{p-1} = -p$.

(*) Philippe ROBBA, 138 rue Nationale, 75013 PARIS.

Donc la première étape va être d'interpréter $M_k(T) = \det(1 - \gamma T)$ où γ est l'opérateur de Dwork agissant sur l'espace de cohomologie associé au module différentiel $S_k(W)$ =: puissance symétrique d'ordre k du module différentiel W. Pour cela, il suffira de dérouler la machinerie de Dwork (comme par exemple dans l'exposé de SIERRA sur les polynômes de Hecke dans ce séminaire).

Pour montrer que M_k est un polynôme, et calculer son degré, il est équivalent de montrer que la cohomologie de $S_k(W)$ est finie, et de calculer sa dimension (car γ possède un inverse à droite et donc est inversible si la cohomologie est finie).

Pour obtenir l'équation fonctionnelle, on déroulera la machinerie de la théorie duale.

Dans le cas considéré par DWORK et ADOLPHSON, W était le module différentiel associé à $F(1/2\ ,\ 1/2\ ,\ 1\ ,\ \lambda)$, donc avait des singularités régulières en 0, 1 et ∞. Pour cela, ADOLPHSON avait développé une méthode pour déterminer la dimension de la cohomologie dans le cas singulier régulier.

Ici on a le module différentiel associé à la fonction $J_0(2\pi\sqrt{-\lambda})$ qui a une singularité régulière en 0, et irrégulière à l'infini. Donc ici la finitude de la cohomologie et le calcul de la dimension reposent sur les résultats que j'ai obtenus concernant l'indice d'un système différentiel.

Malheureusement cette théorie n'est pas achevée, et je peux seulement conjecturer le degré de M_k $(p \neq 2)$. En fait, la conjecture est démontrée pour k pair et $k < 2p$, ou pour k impair et $k < p$.

Par contre, je peux calculer le degré de

$$M'_k(T) = \prod_{\bar\lambda \in \underset{\approx}{F}{}^{x}_{\infty}} \prod_{j=0}^{k} \left(1 - \pi_1(-\bar\lambda^2)^{k-j}\, \pi_1(-\bar\lambda^2)^{j}\, T^{\deg\bar\lambda}\right)^{-1/\deg\bar\lambda} .$$

Ici on a affaire au module différentiel associé à $J_0(2\pi\lambda)$.

Les résultats obtenus sont les suivants.

THÉORÈME. - $M'_k(T)$ <u>est un polynôme de degré</u>

$$k - 2\left[\frac{k}{2p}\right] \quad \underline{\text{si}}\ \ k\ \ \underline{\text{pair}}$$

$$k + 1 - 2\left[\frac{k}{2p} + \frac{1}{2}\right] \quad \underline{\text{si}}\ \ k\ \ \underline{\text{impair}} .$$

Ici $[\ \ ]$ désigne la partie entière.

CONJECTURE. - $M_k(T)$ <u>est un polynôme de degré</u>

$$\frac{k}{2} - \left[\frac{k}{2p}\right] \quad \underline{\text{si}}\ \ k\ \ \underline{\text{pair}}$$

$$\frac{k+1}{2} - \left[\frac{k}{2p} + \frac{1}{2}\right] \quad \underline{\text{si}}\ \ k\ \ \underline{\text{impair}}.$$

THÉORÈME. - La conjecture est vraie si k est pair et $k < 2p$, ou si k est impair et $k < p$.

Équation fonctionnelle :

THÉORÈME. - Le polynôme M'_k admet la décomposition $M'_k = P'_k \tilde{M}'_k$ où $\tilde{M}'_k$ vérifie l'équation fonctionnelle $\tilde{M}'_k(t) = ct^\delta \tilde{M}'_k(1/p^{k+1} t)$ (où c est une constante $\neq 0$ et $\delta = \deg \tilde{M}'_k$) et où le facteur trivial P'_k est un polynôme de degré

$2 + 2[\frac{k}{2p}]$ si k pair

1 si k impair,

qui prend la forme suivante (où $\epsilon = +1$ si $p \equiv 1\ (4)$ et $\epsilon = -1$ si $p \equiv -1\ (4)$)

$P'_k(t) = (1 - t)$ si k impair

$P'_k(t) = (1 - t)(1 - p^{k/2}\, t)^{n'_k}\, (1 - \epsilon p^{k/2}\, t)^{m'_k - n'_k}$ si k pair

avec $m'_k = 1 + [\frac{k}{2p}]$ si $4|k$ (resp. $m'_k = [\frac{k}{2p}]$ si $4\not|k$), $n'_k = 1 + 2[\frac{k}{4p}]$.

THÉORÈME. - Sous réserve que la conjecture ci-dessus soit vraie, le polynôme M_k admet la décomposition $M_k = P_k \tilde{M}_k$ où $\tilde{M}_k$ vérifie l'équation fonctionnelle.

$$\tilde{M}_k(t) = ct^\delta\, \tilde{M}_k(1/p^{k+1}\, t)$$

(où c est une constante $\neq 0$ et $\delta = \deg \tilde{M}_k$) et où le facteur trivial P_k est un polynôme de degré

1 si k impair

$1 + [\frac{k}{2p}]$ si k pair et $4\not|k$

$2 + [\frac{k}{2p}]$ si $4|k$,

qui prend la forme suivante (avec ϵ comme ci-dessus)

$P_k(t) = (1 - t)$ si k impair

$P_k(t) = (1 - t)(1 - \epsilon p^{k/2}\, t)^{n_k}\, (1 - p^{k/2}\, t)^{m_k - n_k}$ si k pair

avec $m_k = 1 + [\frac{k}{2p}]$ si $4|k$ (resp. $m_k = [\frac{k}{2p}]$ si $4\not|k$) et $n_k = [\frac{k}{4p}]$.

On trouvera les démonstrations et des références dans l'article suivant.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ROBBA (Philippe). - Symmetric powers of the p-adic Bessel equation [Soumis au J. für reine und angewandte Mathematik].