PHILIPPE ROBBA

Conjectures sur les équations différentielles p-adiques linéaires

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 12, nº 1 (1984-1985), exp. nº 2, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1984-1985__12_1_A2_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
12e année, 1984/85, n° 2, 8 p.
15 octobre 1984

CONJECTURES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES LINÉAIRES

par Philippe ROBBA (*)

Nous nous intéressons à la propriété, pour un opérateur différentiel linéaire - disons à coefficients fractions rationnelles pour simplifier -, d'avoir un indice en tant qu'endomorphisme d'un espace de fonctions analytiques dans une boule. Egalement nous cherchons comment calculer cet indice lorsqu'il existe.

Le cas d'un opérateur du premier ordre est complètement élucidé [Ro 2] [Ro 3]. Pour les opérateurs d'ordre supérieur seulement des résultats partiels ont été obtenus [Ad] [Ro 1] [Ro 3].

Je me propose d'indiquer dans cet exposé les résultats qu'il me semble raisonnable d'obtenir ainsi que quelques suggestions sur une façon possible de les démontrer.

Dans [Ro 3] il m'a semblé utile d'introduire la notion d'indice généralisé pour un opérateur différentiel linéaire à coefficients fractions rationnelles. Je vais dans un premier paragraphe étendre cette notion au cas des opérateurs à coefficients éléments analytiques dans une couronne. Ceci n'est pas fait par simple goût de la généralisation, on verra dans le paragraphe sur les conjectures que, même si l'on s'intéresse à l'indice d'un opérateur à coefficients fractions rationnelles - c'est le cas intéressant pour les cohomologies de Dwork -, il faut à certaines étapes savoir traiter le cas des opérateurs à coefficients éléments analytiques. De plus les idées que nous utiliserons ici auraient permis de simplifier certaines démonstrations de [Ro 3].

1. Indice généralisé d'un opérateur différentiel linéaire.

Cas de l'indice dans les espaces d'éléments analytiques.

1.1. Notations.

Soit K un corps valué ultramétrique complet de caractéristique 0.

Soient r_0 et r_1 réels > 0 avec $r_0 \leqslant r_1$. On pose

$R = \{$éléments analytiques à coefficients dans K sur la couronne $r_0 \leqslant |x| \leqslant r_1\}$

$R^+ = \{$éléments analytiques à coefficients dans K sur le disque $|x| \leqslant r_1\}$

$R^- = \{$éléments analytiques à coefficients dans K sur le disque $|x| \geqslant r_0$, nuls à l'infini$\}$.

On a $R = R^+ \oplus R^-$ et les projections

$$\gamma^+ : R \longrightarrow R^+ \quad \sum_n a_n x^n \longmapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$$
$$\gamma^- : R \longrightarrow R^- \quad \sum_n a_n x^n \longmapsto \sum_{n<0} a_n x^n .$$

(*) Philippe ROBBA, 138 rue Nationale, 75013 PARIS.

On pose

$$\mathfrak{D} = R[\frac{d}{dx}] \ , \quad \mathfrak{D}_0 = (R \cap K(X))[\frac{d}{dx}] \ .$$

On note $Mat(d , \mathfrak{D})$ (resp. $Mat(d , \mathfrak{D}_0)$) l'espace des matrices carrées d'ordre d à coefficients dans l'anneau $\mathfrak{D}$ (resp. $\mathfrak{D}_0$).

Un élément de $Mat(d , \mathfrak{D})$ définit de façon évidente un endomorphisme de R^d (opérateur différentiel linéaire).

1.2. Indice.

Soient E et F des espaces vectoriels sur K. Soit L une application linéaire de E dans F. On dit que L a un indice si

$$\dim \operatorname{Ker} L < +\infty \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{coker} L < +\infty$$

et l'indice de L est alors

$$\chi(L ; E , F) = \chi(L) = \dim \operatorname{Ker} K - \dim \operatorname{coker} L \ ,$$

(si $E = F$ on écrira $\chi(L ; E)$).

Propriété d'additivité. - Soient les applications linéaires $L_1 : E \dashrightarrow F$ et $L_2 : F \dashrightarrow G$. Si deux des trois applications L_1, L_2, $L_2 \circ L_1$ sont des indices, la troisième a aussi un indice et l'on a

$$\chi(L_2 \circ L_1) = \chi(L_1) + \chi(L_2) \ .$$

Permanence de l'indice. - Si $L : E \dashrightarrow F$ a un indice et si $U : E \dashrightarrow F$ est une application linéaire de rang fini, alors $L + U$ a un indice et

$$\chi(L + U) = \chi(L) \ .$$

Si E et F sont des espaces de Banach, si $L : E \dashrightarrow F$ a un indice et si $U : E \dashrightarrow F$ est une application complètement continue (c'est-à-dire une limite uniforme d'applications de rang fini) alors $L + U$ a un indice et

$$\chi(L + U) = \chi(L) \ .$$

1.3. Indice généralisé (cas des opérateurs à coefficients fractions rationnelles). Soit $A \in Mat(d , \mathfrak{D}_0)$. Il existe $P \in K[X]$ tel que les coefficients de PA n'ont pas de pôles dans la boule $B^+(0 , r_1)$ et que $P^{-1} \in R$. Donc PA définit un endomorphisme de R^{+d}. Inspiré par la formule d'addition de l'indice on dira [Ro 3] que, si PA a un indice dans R^{+d}, alors A a un indice généralisé dans R^{+d} qui est, par définition

$$"\chi"(A , R^{+d}) = \chi(PA , R^{+d}) - \chi(PI , R^{+d}) \ .$$

(Vérifier à titre d'exercice que PI, I étant la matrice identité, a un indice dans R^{+d} qui vaut $- d \operatorname{ord}^+(P , r_1)$ où $\operatorname{ord}^+(P , r_1)$ désigne le nombre de zéros de P avec multiplicité dans $B^+(0 , r_1)$).

Avec cette définition, l'indice généralisé vérifie encore la propriété d'additivité : soient A , $B \in \mathrm{Mat}(d , \mathbb{Q}_0)$. Si, parmi A , B et AB , deux opérateurs ont un indice généralisé dans R^{+d} , alors le troisième en a un aussi et

$$"\chi"(AB , R^{+d}) = "\chi" (A , R^{+d}) + "\chi" (B , R^{+d}) .$$

On montre dans [Ro 3] qu'on peut donner la définition équivalente suivante de l'indice généralisé. A envoie R^{+d} dans $P^{-1} R^{+d}$. R^{+d} est un sous-espace de $P^{-1} R^{+d}$ de codimension finie. Soit pr une projection de $P^{-1} R^{+d}$ sur R^{+d} . Alors A a un indice généralisé dans R^{+d} si $\mathrm{pr} \circ A$ a un indice dans R^{+d} et

$$"\chi" (A , R^{+d}) = \chi(\mathrm{pr} \circ A , R^{+d}) .$$

Comme $P^{-1} R^{+d}$ est continu dans R^d , on peut utiliser comme projection la projection de R^d sur R^{+d} obtenue en appliquant γ^+ à chaque composante (cette projection sera encore dénotée γ^+).

C'est cette deuxième définition qui sera généralisée au cas des opérateurs à coefficients éléments analytiques.

Le fait que $A(R^{+d}) \subset P^{-1} R^{+d}$ et que R^{+d} est de codimension finie dans $P^{-1} R^{+d}$ entraîne que l'application $\gamma^- A : R^{+d} \dashrightarrow R^{+d}$ est de rang fini (ou de façon équivalente l'application $\gamma^- A\gamma^+ : R^d \dashrightarrow R^d$ est de rang fini). On peut utiliser cette remarque pour démontrer la propriété d'additivité mentionnée ci-dessus.

1.4. Indice généralisé (cas des opérateurs à coefficients éléments analytiques).

1.4.1. Définition. - Soit $A \in \mathrm{Mat}(d , \mathbb{Q})$. Si $\gamma^+ A$ a un indice dans R^{+d} on dit que A a un indice généralisé dans R^{+d} et on pose

$$"\chi" (A , R^{+d}) = \chi(\gamma^+ A , R^{+d}) .$$

1.4.2. **LEMME.** - *Soit* A $\mathrm{Mat}(d , \mathbb{Q})$. *Les endomorphismes de* R^d , $\gamma^- A\gamma^+$ *et* $\gamma^+ A\gamma^-$, *sont complètement continus.*

Démonstration. - A est la limite, pour la norme d'opérateur sur R^d , d'une suite d'opérateurs $A_n \in \mathrm{Mat}(d , \mathbb{Q}_0)$. On a observé que les opérateurs $\gamma^- A_n \gamma^+$ étaient de rang fini, leur limite A est donc complètement continue. Il en est de même pour $\gamma^+ A \gamma^-$.

1.4.3. COROLLAIRE. - *Soient* A *et* $B \in \mathrm{Mat}(d , \mathbb{Q})$. *Si deux des trois opérateurs* A , B , AB , *ont un indice généralisé dans* R^{+d} , *le troisième a aussi un indice généralisé et*

$$"\chi" (AB , R^{+d}) = "\chi" (A , R^{+d}) + "\chi" (B , R^{+d}) .$$

Démonstration. - On a

$$\chi^+ AB = \gamma^+ A \gamma^+ B + \gamma^+ A \gamma^- B ,$$

et $\gamma^+ A \gamma^- B$ est complètement continu car c'est le composé de l'opérateur complètement continu $\gamma^- B : R^+ \dashrightarrow R$ et de l'opérateur continu $\gamma^+ A : R \dashrightarrow R^+$, par conséquent $\gamma^+ AB$ a un indice dans R^{+d} si et seulement si $\gamma^+ A \gamma^+ B$ a un indice et ces indices sont égaux. D'où le résultat.

1.4.4. PROPOSITION. - Soit $A \in \mathrm{Mat}(d , \mathcal{O})$. Alors A a un indice dans R^d si et seulement si $\gamma^+ A$ a un indice dans R^{+d} et $\gamma^- A$ a un indice dans R^{-d} et alors

$$\chi(A , R^d) = \chi(\gamma^+ A , R^{+d}) + \chi(\gamma^- A , R^{-d}) .$$

Démonstration. - Les opérateurs $\gamma^+ A \gamma^-$ et $\gamma^- A \gamma^+$ sont des endomorphismes complètement continus de R^d . Par conséquent

$$B := A - \gamma^- A \gamma^+ - \gamma^+ A \gamma^-$$

a un indice dans R^d si et seulement si A a un indice dans R^d et alors leurs indices sont égaux.

Mais B est stable sur R^{+d} avec $B|_{R^{+d}} = \gamma^+ A$ et B est stable sur R^{-d} avec $B|_{R^{-d}} = \gamma^- A$. Donc B a un indice dans R^d si et seulement si $\gamma^+ A$ a un indice dans R^{+d} et $\gamma^- A$ a un indice dans R^{-d} et alors

$$\chi(B , R^d) = \chi(\gamma^+ A , R^{+d}) + \chi(\gamma^- A , R^{-d}) .$$

D'où le résultat.

1.4.5. Exercice. - Soit $A \in \mathrm{Mat}(d , R)$, avec $\det A \neq 0$. Vérifier que

- $\gamma^+ A$ a un indice dans R^{+d} : $\chi(\gamma^+ A , R^{+d}) = - \mathrm{ord}^+ (\det A , r_1)$
- $\gamma^- A$ a un indice dans R^{-d} : $\chi(\gamma^- A , R^{-d}) = \mathrm{ord}^- (\det A , r_0)$
- A a un indice dans R^d : $\chi(A , R) = -$ nombres de zéros de $\det A$.

1.4.6. - En fait pour les applications on a besoin de considérer l'indice de A agissant sur les fonctions analytiques dans une couronne ouverte. La situation est alors plus compliquée car on n'a plus affaire à des espaces de Banach. Je peux montrer que les résultats précédents sont encore valables si l'on suppose que A a un indice pour toute couronne contenue dans notre couronne initiale, ce qui sera vérifié pour les applications. Je n'entrerai pas plus dans les détails.

2. Existence d'un indice pour un opérateur différentielle : conjectures.

2.1 Notation. - On dénote

$\mathcal{A}(r)$ = {fonctions analytiques dans la boule $B^-(0 , r)$}

$\mathcal{H}^+(r)$ = {fonctions analytiques, nulles à l'infini, analytiques pour $|x| > 1$ avec $s < r$ non précisé}

$\mathcal{R}(r)$ = {fonctions analytiques dans une couronne $s < |x| < r$ avec $s < r$ non précisé} .

On a $\mathcal{R}(r) = \mathcal{A}(r) \oplus \mathcal{H}^+(r)$ et γ^+ (resp. γ^-) est la projection de $\mathcal{R}(r)$ sur $\mathcal{A}(r)$ (resp. $\mathcal{H}^+(r)$).

Le point générique t_r de la boule $B^+(0\ ,\ r)$ est un point t_r situé dans une extension transcendante de K tel que $|t_r| = r$ et que la boule $B^-(t_r\ ,\ r)$ ne contienne pas de point algébrique sur K.

On dit que l'opérateur différentiel $\mathcal{L} = \sum_i a_i (\frac{d}{dx})^i$ est r-élémentaire si ses coefficients a_i sont des éléments analytiques sur le cercle $|x| = r$ et si, ou bien toutes les solutions de l'équation $\mathcal{L}u = 0$ analytiques au voisinage de t_r ont même rayon de convergence $\rho < r$, ou bien toutes les solutions ont un rayon de convergence $\geqslant r$.. Dans le premier cas on pose $\rho(\mathcal{L}\ ,\ r) := \rho$, dans le deuxième cas $\rho(\mathcal{L}\ ,\ r) := r$.

On dit que l'opérateur différentiel $\mathcal{L}$ est élémentaire dans la couronne $r_1 < |x| < r_2$ si les coefficients de $\mathcal{L}$ sont des éléments analytiques dans cette couronne et si pour tout $r \in]r_1\ ,\ r_2[$ $\mathcal{L}$ est r-élémentaire.

Le nombre $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ est dit nombre de Lionville p-adique s'il vérifie la condition

$$\inf(\liminf_{n\to+\infty} |\alpha - n|^{1/n}\ ,\ \liminf_{n\to+\infty} |\alpha + n|^{1/n}) < 1 .$$

2.2. Conjecture sur l'indice d'un opérateur différentiel.

CONJECTURE. - Soit $\mathcal{L} \in K(x)[\frac{d}{dx}]$ un opérateur différentiel à coefficients fractions rationnelles. Alors $\mathcal{L}$ a un indice généralisé dans $\mathcal{A}(r)$ (resp. $\mathcal{H}^+(r)$, resp. $\mathcal{R}(r)$) sous réserve que "les exposants globaux de $\mathcal{L}$ correspondant à la partie Fuchsienne de $\mathcal{L}$ dans la boule $B^-(0\ ,\ r)$, ainsi que leurs différences, ne soient pas des nombres de Lionville p-adiques". Les indices sont reliés par des formules explicites aux rayons de convergence des solutions de $\mathcal{L}u = 0$ près du point générique t_r. De plus on a

$$"\chi"(\mathcal{L}\ ,\ \mathcal{A}(r)) = -\ "\chi"(\mathcal{L}\ ,\ \mathcal{H}^+(r))$$

ou de façon équivalente

$$\chi(\mathcal{L}\ ,\ \mathcal{R}(r)) = 0 .$$

Il nous faut définir ce que l'on entend par partie Fuchsienne de $\mathcal{L}$ et exposants globaux, ainsi qu'expliciter les formules promises pour l'indice. Pour cela il nous est d'abord nécessaire d'indiquer des propriétés de factorisation pour un opérateur différentiel.

Nous avons mis des guillemets à la phrase contenant les exposants car ainsi qu'il apparaîtra par la suite, nous avons quelque embarras à définir ces exposants.

2.3. Factorisation d'un opérateur différentiel.

CONJECTURE. - Soit $\mathcal{L} \in K(x)[\frac{d}{dx}]$. Pour tout r_1 réel > 0 il existe $r_2 < r_1$ et des opérateurs différentiels $\mathcal{L}_1\ ,\ \dots\ ,\ \mathcal{L}_m$, élémentaires dans la couronne $r_2 < |x| < r_1$, tels que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_m$.

Cette conjecture est suggérée par les résultats suivants.

THÉORÈME ([D-R], théorème 4.1). - Soit $\mathcal{L}$ un opérateur différentiel à coefficients élémentaires analytiques dans la couronne $r - \epsilon < |x| < r$ (avec $\epsilon > 0$). Pour tout $\rho < r$, il existe $\epsilon' > 0$ et des opérateurs $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$, à coefficients éléments analytiques dans la couronne $r - \epsilon' < |x| < r$, tels que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$, les solutions de $\mathcal{L}_1$ au voisinage du point générique t_r ont toutes un rayon de convergence $< \rho$ et les solutions de $\mathcal{L}_2$ au voisinage de t_r ont toutes un rayon de convergence $\geqslant \rho$.

On en déduit facilement le corollaire.

COROLLAIRE. - Soit $\mathcal{L} \in K(x)[\frac{d}{dx}]$. Pour tout r réel > 0 et tout $\epsilon > 0$, il existe r_1 et r_2, $r - \epsilon \leqslant r_2 < r_1 \leqslant r$, et des opérateurs différentiels $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m$, élémentaires dans la couronne $r_2 < |x| < r_1$, tels que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_m$.

Notons que dans ces énoncés, même quand l'opérateur $\mathcal{L}$ a ses coefficients fractions rationnelles, les $\mathcal{L}_i$ n'ont plus nécessairement leurs coefficients fractions rationnelles. C'est pourquoi nous avons éprouvé le besoin, dans le paragraphe 1, d'étendre la notion d'indice généralisé.

En vertu de cette conjecture il suffit de chercher à établir l'existence d'un indice pour un opérateur élémentaire dans une couronne.

2.4. CONJECTURE. - Soit $\mathcal{L}$ élémentaire dans la couronne $r_2 < |x| < r_1$, n'ayant pas de singularités dans cette couronne. Si l'on a $\rho(\mathcal{L}, r_2) = r_2$ et $\rho(\mathcal{L}, r_1) = r_1$ alors pour tout $r \in [r_1, r_2]$ on a $\rho(\mathcal{L}, r) = r$.

La conjecture est vérifiée pour les opérateurs d'ordre 1.

2.5. Facteur Fuchsien.

Soit $\mathcal{L} \in K(x)[\frac{d}{dx}]$. Il résulte des conjectures précédentes que pour tout r_1 réel > 0 il existe $r_2 < r_1$, et des opérateurs $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ à coefficients éléments analytiques dans la couronne $r_2 < |x| < r_1$ tels que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$ et que pour tout $r \in]r_2, r_1[$ les solutions de $\mathcal{L}_1$ près de t_r ont un rayon de convergence $< r$ et les solutions de $\mathcal{L}_2$ près de t_r ont un rayon de convergence $\geqslant r$.

C'est cet opérateur $\mathcal{L}_2$ que l'on appelle le facteur Fuchsien de $\mathcal{L}$ relatif à la boule $B^-(0, r)$.

2.6. Indice d'un opérateur élémentaire non Fuchsien.

CONJECTURE. - Soit $\mathcal{L}$ un opérateur différentiel unitaire d'ordre d, **élémentaire** dans la couronne $r' < |x| < r$, non Fuchsien (c'est-à-dire que pour tout $s \in]r', r[$ $\rho(\mathcal{L}, s) < s$). Alors $\mathcal{L}$ a un indice généralisé dans $\mathcal{A}(r)$ (resp. $\mathcal{H}^+(r)$) et

$$"\chi"(\mathcal{L}, \mathcal{A}(r)) = d\left(\frac{d \log \rho(\mathcal{L}, s)}{d \log s}\right)^-_{s=r} = - "\chi"(\mathcal{L}, \mathcal{H}^+(r)) .$$

Sous ces hypothèses l'existence d'un indice est connue [Ro 1], c'est seulement la formule donnant l'indice qui est conjecturale. La formule est démontrée dans le cas d'un opérateur d'ordre 1 $(d = 1)$.

2.7. Indice d'un opérateur élémentaire Fuchsien.

Le problème de l'existence et du calcul de l'indice est entièrement résolu par la conjecture suivante.

CONJECTURE. - Soit $\mathcal{L}$ un opérateur différentiel unitaire d'ordre d , élémentaire dans la couronne $r' < |x| < r$, Fuchsien (c'est-à-dire que pour tout $s \in]r', r[$ $\rho(\mathcal{L}, s) = s$) . "Si les exposants globaux de $\mathcal{L}$ relatifs à la boule $B^-(0, r)$ et les différences de ces exposants ne sont pas des nombres de Liouville p-adiques", il existe des fonctions b_i , $1 \leqslant i \leqslant d$ analytiques bornées dans la couronne $r' < |x| < r$, telles que

$$\mathcal{L} = (\frac{d}{dx} - b_d) \ldots (\frac{d}{dx} - b_1) .$$

Les exposants globaux de $\mathcal{L}$ sont les résidus globaux des b_i relativement à la boule $B^-(0, r)$ (c'est-à-dire le coefficient de $1/x$ dans le développement de Laurent de b_i).

On voit ce que cet enoncé a de peu satisfaisant quand au point de vue logique.

On peut essayer de démontrer la conjecture en supposant de plus que $\mathcal{L}$ a une structure de Frobenius forte auquel cas les exposants globaux doivent être rationnels et donc ne sont pas Liouville p-adiques.

En tout état de cause lorsqu'une telle factorisation est obtenue, le problème d'indice est résolu car il est résolu pour les opérateurs d'ordre 1 . Chaque opérateur d'ordre 1 a alors un indice généralisé 1 dans $\mathcal{A}(r)$ et $\mathcal{L}$ a donc un indice généralisé d . On voit que la formule du § 2.6 est encore valable.

Le résultat obtenu par Christol dans [Ch] peut être considéré comme une vérification de cette conjecture dans un cas particulier. Dans ce cas particulier $\mathcal{L}$ a seulement une singularité régulière en 0 dans la boule $B^-(0, r)$ et donc les exposants globaux de $\mathcal{L}$ dans cette boule coïncident avec les exposants de $\mathcal{L}$ en 0 .

BIBLIOGRAPHIE

[Ad] ADOLPHSON (A.). - An index theorem for p-adic differential operators, Trans. Amer. math. Soc., t. 216, 1976, p. 279-293.

[Ch] CHRISTOL (G.). - Un théorème de transfert pour les disques singuliers réguliers, " Cohomologie p-adique", Astérisque, n° 119-120, 1984, p. 151-168.

[D-R] DWORK (B.) and ROBBA (Ph.). - On ordinary linear p-adic differential equations, Trans. Amer. math. Soc., t. 231, 1977, p. 1-46.

[Ro 1] ROBBA (Ph.). - On the index of p-adic differential operators I, Annals of Math., Series 2, t. 101, 1975, p. 280-316.

[Ro 2] ROBBA (Ph.). - Index of p-adic differential operators III. Application to twisted exponential sums, "Cohomologie p-adique", Astérisque n° 119-120, 1984, p. 191-266.

[Ro 3] ROBBA (Ph.). - Indice d'un opérateur différentiel p-adique IV. Cas des systèmes, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **t. 35, 1985,** fasc. 2, p. 13-55.