GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

MICHEL MATIGNON

Genre topologique des corps values

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 11 (1983-1984), exp. nº 14, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1983-1984__11__A9_0>

13 fevrier 1984

GENRE TOPOLOGIQUE DES CORPS VALUES

par Michel MATIGNON (*)

Introduction. - Soit K un corps valué complet pour une valeur absolue ultramétrique. On dit qu'un corps $L \supset K$ est un corps topologique de fonctions d'une variable sur K s'il est l'adhérence d'un corps de fonctions d'une variable sur K pour une valeur absolue qui prolonge celle de K. Dans ce travail on étudie le genre topologique d'un tel corps L, c'est le minimum des genres des corps de fonctions d'une variable sur K denses dans L. On le note $g_{top}(L)$.

Soit E un corps valué on note $\bar{E}$ son corps résiduel. Soit L un corps topologique de fonctions d'une variable sur K. Dans le cas où $\bar{L} \not\subset \bar{K}^{alg}$ (la clôture algébrique de $\bar{K}$), alors $\bar{L}$ est un corps de fonctions d'une variable sur $\bar{K}$. On montre que $g_{top}(L) \geqslant [\overline{L \cap K^{alg}} : \bar{L} \cap \bar{K}^{alg}]\, g(\bar{L})$. Ce résultat est une conséquence du théorème suivant.

THÉORÈME ([11]). - Soient K un corps valué complet, $(M, |.|)$ un corps de fonctions d'une variable sur K, son corps des constantes, muni d'une valeur absolue qui prolonge celle de K. Soit k (resp. m) le corps résiduel de K (resp. M) alors

$$g(M) \geqslant [m \cap k^{alg} : k]\, g(m) .$$

Ce résultat est dû à Lamprecht ([8]) dans un cas particulier. La méthode de Lamprecht est inapplicable dans le cas général. La démonstration que nous donnons est d'une nature différente, nous utilisons des techniques de réduction des courbes algébriques.

Dans le cas général on démontre le théorème suivant.

THEOREME ([11]). - Soient K un corps valué complet et $L \supset K$, $L \not\subset (K^{alg})^\wedge$ un corps topologique de fonctions d'une variable sur K. Soit k (resp. ℓ) le corps résiduel de K (resp. L). Alors il existe une extension finie K' de K telle que pour tout corps K'' valué complet avec $K' \subset K'' \subset (K^{alg})^\wedge$ le corps topologique de fonctions $(LK'')^\wedge$ sur K'' vérifie les propriétés suivantes

(i) Si $\ell \not\subset k^{alg}$ alors $g_{top}((LK'')^\wedge) = g(\overline{LK''})$.

(ii) Si $\ell \subset k^{alg}$ alors $g_{top}((LK'')^\wedge) = 0$.

Notons que si K est de plus algébriquement clos $K' = K$ on connait donc le genre topologique de L.

(*) Michel MATIGNON, Laboratoire associé CNRS 226, UER Mathématiques et informatique, Université de Bordeaux-I, 351 cours de la Libération, 33405 TALENCE CEDEX.

Dans le cas $\ell \not\subset k^{alg}$ on montre d'abord l'égalité $g_{top}(L) = g(\overline{L})$ si K est de plus algébriquement clos. Pour cela on utilise un résultat de Popp ([16]) lié au relèvement des courbes algébriques.

Dans le cas où $\ell \subset k^{alg}$, K algébriquement clos et maximalement complet (il n'y a pas d'extension immédiate de K) ce résultat est dû à M. Van der Put ([19]).

Notons que le résultat (ii) permet comme le signale M. Van der Put ([19]) une démonstration rapide du théorème de la réduction stable des courbes algébriques sur un corps valué complet.

La rédaction de cet exposé ne contient pas de démonstration. Celles-ci figurent dans un article à paraître.

1. Notations.

Si E est un corps, on désigne par E^{alg} une clôture algébrique de E. Soit $(E, |.|)$ un corps valué pour une valeur absolue ultramétrique $|.|$, on note $|E^{\times}|$, le groupe des valeurs du groupe multiplicatif $E^{\times}$, E° l'anneau de valuation de E, $E^{\circ\circ}$ l'idéal de valuation de E°, $(E, |.|)^{\wedge}$ (ou $\hat{E}$ si aucune confusion n'est à craindre) un complété de $(E, |.|)^{\wedge}$. On note $(E, |.|)^{-}$ (ou bien $\overline{E}$ si aucune confusion n'est à craindre) le corps résiduel $E^{\circ}/E^{\circ\circ}$ de E.

1.1. Corps topologiques de fonctions d'une variable, genre topologique.

Définition. - Soit K un corps valué complet. On dit qu'un corps $L \supset K$ est un corps topologique de fonctions d'une variable sur K si L est le complété pour une valeur absolue prolongeant celle de K d'un corps de fonctions d'une variable sur K.

Soit M un corps de fonctions d'une variable sur K, on note $g(M)$ le genre de M ([20]). Soient L un corps topologique de fonctions d'une variable sur K et Σ l'ensemble des corps de fonctions d'une variable sur K denses dans L. On appelle genre topologique de L sur K l'entier noté $g_{top}(L)$ et défini par

$$g_{top}(L) = \min_{M \in \Sigma} g(M) .$$

1.2. Classification des corps topologiques de fonctions d'une variable.

1.2.1. Extensions valuées transcendantes pures de degré 1. ([18]), chap. 2 ; [2] § 10 et § 10, ex. 2). - Soient K un corps valué complet, algébriquement clos, $K(X)$ une extension transcendante pure de K. Il existe exactement trois types d'extensions de la valeur absolue de K à $K(X)$.

Soient $|.|$ une valeur absolue sur $K(X)$ qui prolonge celle de K et $r_X = \inf_{x \in K} |X - x|$.

Premier type (inerte). - Il existe x_0, $\pi \in K$ tels que $|X - x_0| = r_X = |\pi|$. Alors K et $K(X)$ ont même groupe des valeurs et le corps résiduel de $K(X)$ est une extension transcendante pure du corps résiduel de K de degré de transcendance 1. On dit que $K(X)$ est une extension (valuée) inerte de K.

Soit $Y = \pi^{-1}(X\ ,\ x_0)$, on a pour tout $x \in K$, $|Y - x| = \max(1\ ,\ |x|)$. En décomposant $P(Y) = \sum_{i=0}^{d} a_i\ Y^i$ en produit de polynômes de degré 1 on montre facilement que $|P(Y)| = \max_i |a_i|$, ce qui montre que $|K^x| = |K(X)^x|$. Il suit aussi facilement que le corps résiduel de $K(X)$ est l'extension transcendante pure $k(y)$ de k où k désigne le corps résiduel de K et y l'image résiduelle de Y . On peut toujours construire une extension valuée transcendante de degré 1 du premier type d'un corps K ([2]), § 10).

Deuxième type (ramifié). - Il existe $x_0 \in K$ tel que $|X - x_0| = r_X$ et $r_X \notin |K^x|$. Alors K et $K(X)$ ont le même corps résiduel et $|K(X)^x| = |K^x|\ r_X^{\mathbb{Z}}$. On dit que $K(X)$ est une extension transcendante (valuée) ramifiée de K .

Soient $Y = X - x_0$, $a\ ,\ b \in K^x$, $i\ ,\ j \in \mathbb{N}$ avec $i \neq j$, alors $|a\ Y^i| \neq |b\ Y^j|$ puisque $|K^x|$ est un groupe divisible. Ceci montre que $|\sum_{i=0}^{d} a_i\ Y^i| = \max_i |a_i\ Y^i|$ et ainsi que $|K(X)^x| = |K^x|\ r_X^{\mathbb{Z}}$. Soit $a \in K$, on a

$$\frac{1}{Y - a} = \sum_{i=0}^{n} \frac{a^i}{Y^{i+1}} + \frac{1}{Y - a}\left(\frac{a}{Y}\right)^{n+1} \quad \text{si} \quad |Y| > |a|$$

et

$$\frac{1}{Y - a} = - \sum_{i=0}^{n} \frac{Y^i}{a^{i+1}} + \frac{1}{Y - a}\left(\frac{Y}{a}\right)^{n+1} \quad \text{si} \quad |Y| < |a| ,$$

ce qui montre que $K[Y\ ,\ \frac{1}{Y}]$ est dense dans $K(Y) = K(X)$. Plus précisément tout élément $f \in K(X)^{-}$ s'écrit de façon unique sous la forme $f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\ Y^i$ avec $\lim_{|i|\to\infty} |a_i|\ r_X^i = 0$ et $|f| = \max_i |a_i|\ r_X^i$. Si $|K^x| = \mathbb{R}_{>0}$ (où $\mathbb{R}_{>0}$ désigne le groupe multiplicatif des nombres réels strictement positifs), il n'existe pas d'extension de K , transcendante de degré 1 , valuée, du deuxième type. S'il existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ et $r \notin |K^x|$, alors il y a un prolongement de la valeur absolue de K à $K(X)$ avec $|x| = r$ (i. e. du deuxième type).

Troisième type (immédiat). - Pour tout $x \in K$ on a $|X - x| > r_X$. Alors K et $K(X)$ ont le même groupe des valeurs et le même corps résiduel. On dit que $K(X)$ est une extension (valuée) transcendante immédiate de K .

Soit $P(X) = b\ \prod_{i=1}^{d} (X - a_i) \in K[X]$, il existe $x \in K$ tel que $|X - x| < |X - a_i|$ pour $1 \leqslant i \leqslant d$. On a $P(x) = b\ \prod_{i=1}^{d} (X - a_i)(1 + \frac{x - X}{X - a_i})$, ce qui montre que $|P(x) - P(X)| < |P(X)|$, ainsi $|K^x| = |K(X)^x|$ et tout polynôme de $K(X)^\circ$ est congru à un élément de K° modulo $K(X)^{\circ\circ}$. Soit $a \in K$, il existe $x \in K$ tel que $|X - x| < |X - a|$ et on a

$$\frac{1}{X - a} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - X)^i}{(x - a)^{i+1}} + \frac{1}{(X - a)}\left(\frac{x - X}{x - a}\right)^{n+1} ,$$

ce qui montre que $K[X]$ est dense dans $K(X)$ et donc que K et $K(X)$ ont le même corps résiduel. Si K est maximalement complet il n'existe pas d'extension valuée transcendante de degré 1 du troisième type de K . Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K telle que $(|x_n - x_{n+1}|)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite strictement décroissante et telle qu'il n'existe pas $y \in K$ avec $|y - x_n| \leq |x_{n+1} - x_n|$ pour tout $n \geq 1$, alors il existe une valeur absolue sur $K(X)$ qui prolonge celle de K avec $|x_n - X| = |x_n - x_{n+1}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (i. e. du troisième type).

1.2.2. Classification des corps topologiques de fonctions d'une variable sur K. - Soient K un corps valué complet, L un corps topologique de fonctions d'une variable sur K, k (resp. ℓ) le corps résiduel de K (resp. L). Alors L est une extension algébrique finie du complété $\widehat{K(X)}$ d'une extension transcendante pure de K de degré 1. L'étude qui précède établit donc une classification des corps topologiques de fonctions d'une variable sur K en quatre types.

Type 0. - $L \subset (K^{alg})^{\wedge}$ (le complété de la clôture algébrique de K).

Type 1 : (inerte). - $\ell \not\subset k^{alg}$, alors ℓ est un corps de fonctions d'une variable sur k et $(LK^{alg})^{\wedge}$ est une extension inerte de $(K^{alg})^{\wedge}$.

Type 2 : (ramifié). - $|L^{x}| \not\subset |K^{alg\,x}|$, alors $(LK^{alg})^{\wedge}$ est une extension ramifiée de $(K^{alg})^{\wedge}$.

Type 3 : (immédiat). - $\ell \subset k^{alg}$ et $|L^{x}| \subset |K^{alg\,x}|$ alors $(LK^{alg})^{\wedge}$ est une extension immédiate de $(K^{alg})^{\wedge}$.

1.2.3. Sous corps fermés d'un corps topologique de fonctions d'une variable sur K. - Soient M un corps de fonctions d'une variable sur K, K' son corps des constantes, alors deux éléments X, Y de M non constants sont algébriquement dépendants. La proposition qui suit montre que ce résultat a son analogue dans les corps topologiques de fonctions d'une variable sur K.

PROPOSITION 1. ([11]). - *Soient K un corps valué complet, L un corps topologique de fonctions d'une variable sur K, $L \not\subset (K^{alg})^{\wedge}$.*

Soit F un sous corps fermé de L contenant K, avec $F \not\subset (K^{alg})^{\wedge}$. Alors F est un corps topologique de fonctions d'une variable sur K du même type que L et L est une extension algébrique finie de F.

Cette proposition est un raffinement de la proposition 1 de ([12]), on utilise les méthodes de la théorie des fonctions analytiques sur un corps valué.

2. Le genre topologique d'un corps de fonctions d'une variable du type 1.

Soient K un corps valué complet et $(M, |.|)$ un corps de fonctions d'une variable sur K, muni d'une valeur absolue qui prolonge celle de K. Soit k (resp. m) le corps résiduel de K (resp. M). Si $m \not\subset k^{alg}$ alors m est un corps de fonctions d'une variable sur k. Le théorème qui suit compare $g(M)$ et $g(m)$.

THÉORÈME 1 ([11]). - *Soient K un corps valué complet, $(M, |.|)$ un corps de fonctions d'une variable sur K, son corps des constantes, muni d'une valeur absolue qui* prolonge celle de K . Soit k (resp. m) le corps résiduel de K (resp. M) alors

$$g(M) \geqslant [m \quad k^{alg} : k]\, g(m) .$$

LAMPRECHT ([8]) a démontré ce théorème par une méthode élémentaire dans le cas où les trois conditions suivantes sont réalisées ;

(i) K est discrètement valué complet.

(ii) $|M^x| = |K^x|$.

(iii) Le corps des constantes de m est k .

En fait sa démonstration reste valable si l'on remplace les conditions (i), (ii) et (iii) par (i') et (ii').

(i') K est un corps valué complet et tout sous K-espace vectoriel E de M de dimension finie vérifie $\dim_K E = \dim_k \bar{E}$ (i. e. E admet une base normale sur K).

(ii') Le corps des constantes de m est k .

Notons que (i) et (ii) impliquent (i').

Dans le cas où K est algébriquement clos complet on peut montrer que M satisfait (i'). En effet soient $x \in \bar{M}$ transcendant sur k et $X \in M$ un relèvement de x , la valeur absolue sur M induit la norme de Gauss associée à X sur $K(X)$ (i. e. si $P(X) = \sum a_i X^i \in K[X]$ on a $|P(X)| = \max_i |a_i|$) et il est facile de voir qu'alors $(K(X) , |.|)$ admet une base normale sur K . D'autre part le corps topologique $\hat{M}$ est une extension algébrique finie de $\widehat{K(X)}$ et puisque le corps $\widehat{K(X)}$ est stable ([3], [5] dans le cas où K est **seulement** stable), on en déduit l'existence d'une base normale de $\hat{M}$ sur $\widehat{K(X)}$ et donc de $\hat{M}$ sur K . Par suite tout sous K-espace vectoriel de $\hat{M}$ de dimension finie admet une base normale sur K .

Cette méthode est inapplicable dans le cas général. La démonstration que nous donnons du théorème utilise des techniques de réduction des courbes algébriques, **plus** précisément le théorème se déduit de la proposition suivante.

PROPOSITION 2 ([11]). - Soient $(M , |.|)$ un corps **valué de fonctions** d'une variable, K son corps des constantes, et $T \in \overset{\circ}{M}$, résiduellement transcendant **sur le** corps résiduel k de K . Soient $(m_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$ les corps résiduels des prolongements à M de la norme de Gauss associée à T sur $K(T)$. Il existe une $\overset{\circ}{K}$-algèbre homogène $S = \oplus_{n \geqslant 0} S_n$, engendrée par S_1 , de type fini (i. e. S_1 est un $\overset{\circ}{K}$-module de type fini) tel que $X = \operatorname{Proj} S \oplus_{\overset{\circ}{K}} K$ soit une courbe algébrique sur K irréductible non singulière dont M est le corps des fonctions rationnelles, et que $Y = (\operatorname{Proj} S \otimes_{\overset{\circ}{K}} \bar{K})^{\text{réduit}}$ soit une courbe algébrique sur k connexe dont l'anneau total des fonctions est $\prod_{1 \leqslant i \leqslant s} m_i$.

On peut appliquer le théorème précédent au cas où M est une extension transcendante pure $K(X)$ munie d'une valeur absolue, si donc $\overline{K(X)}$ n'est pas algébrique sur $\bar{K}$, c'est un corps de fonctions d'une variable sur $\bar{K}$ de genre nul. Un argument dû à Heinzer ([6]) montre alors que si car $\bar{K} \neq 2$, $\bar{K}(\bar{X})$ admet une place rationnelle sur $\bar{K}(\bar{X}) \cap K^{alg}$ et donc $\bar{K}(\bar{X})$ est une extension transcendante pure d'une extension algébrique de $\bar{K}$.

Ce dernier résultat a été démontré par NAGATA ([13]) dans le cas où $K(X)$ est muni d'une valuation V et que $V(K(X) - \{0\}) = \underset{\sim}{Z}^n$ (sans condition sur la caractéristique de $\bar{K}$). Il a alors posé le problème de savoir si ce résultat était vrai pour une valuation quelconque. Ce problème connu pour le nom de "The ruled residue conjecture" a d'abord été démontré par J. OHM ([14]) dans le cas où car $\bar{K} = 0$ puis par W. HEINZER ([16]) dans le cas où $\bar{K}$ est parfait et enfin tout récemment J. OHM ([15]) en a donné une démonstration dans le cas général. Cette démonstration est élémentaire contrairement aux démonstrations partielles précédentes.

Le théorème précédent permet de comparer le genre topologique d'un corps topologique de fonctions d'une variable du type 1 avec le genre de son corps résiduel. On a ainsi le corollaire.

COROLLAIRE. - Soient K un corps valué complet (pour une valeur absolue) et L un corps topologique de fonctions d'une variable sur K avec $\bar{L} \not\subset \bar{K}^{alg}$. Alors, $\bar{L}$ est un corps de fonctions d'une variable sur $\bar{K}$ et

$$g_{top}(L) \geqslant [\overline{L \cap K^{alg}} : \bar{L} \cap \bar{K}^{alg}]\, g(\bar{L}) .$$

Notons que

$$[L \cap K^{alg} : K] < \infty .$$

3. Corps topologiques de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos complet.

3.1. Le cas des corps topologiques du type 1. - On montre le théorème suivant.

THEOREME 2 ([11]). - Soient K un corps valué complet et algébriquement clos, $L \supset K$ un corps topologique de fonctions d'une variable sur K. Soient k (resp. ℓ) le corps résiduel de K (resp. L) avec $\ell \neq k$. Alors ℓ est un corps de fonctions d'une variable sur k et on a $g_{top}(L) = g(\ell)$.

Notons que l'inégalité $g_{top}(L) \geqslant g(\ell)$ découle du corollaire précédent et que sa démonstration est accessible avec la méthode de Lamprecht (cf. théorème 1).

La démonstration de l'inégalité $g_{top}(L) \leqslant g(\ell)$.

Pour montrer l'inégalité il faut montrer l'existence dans L d'un corps de fonctions d'une variable sur K dense dans L et dont le genre est $g(\ell)$.

Considérons une courbe algébrique intègre $\mathcal{E}$ sur k dont le corps des fonctions rationnelles est isomorphe à ℓ, on dit que $\mathcal{E}$ admet un relèvement $\mathcal{C}$ sur K s'il existe un schéma $\mathfrak{X}$ propre et plat sur K° tel que $\mathcal{C} = \mathfrak{X} \times_{K^{\circ}} K$ et que $\mathfrak{X} \times_{K^{\circ}} k \simeq \mathcal{E}$.
On peut prendre pour $\mathcal{E}$ une courbe algébrique non singulière ou bien une courbe

plane $\mathcal{E} \subset \underset{\sim}{P}_k^2$ de degré d, avec m points doubles ordinaires comme points singuliers. Alors dans le premier cas $\mathcal{E}$ admet un relèvement (qui est non singulier) ([4]) et dans le deuxième cas POPP ([16]) construit par des méthodes élémentaires une courbe algébrique plane $\mathcal{C} \subset \underset{\sim}{P}_K^2$ de degré d, avec m points doubles ordinaires comme singularités et qui relève $\mathcal{E}$. Dans les deux cas on déduit de ([17]), puisque $\mathcal{E}$ est irréductible, que la réduction algébrique $\mathcal{C} \dashrightarrow \mathcal{E}$ induit sur le corps des fonctions rationnelles sur $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}(\mathcal{C})$, une valeur absolue $|.|$ avec $(\mathcal{R}(\mathcal{C}), |.|)^{-}$ est isomorphe à $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ (le corps des fonctions rationnelles sur $\mathcal{E}$) et $g(\mathcal{R}(\mathcal{C})) = g(\mathcal{R}(\mathcal{E}))$ (théorème de Popp [16]). On montre alors que $(\mathcal{R}(\mathcal{C}), |.|)^{\wedge}$ est isomorphe à L.

3.2. <u>Le cas des corps topologiques du type 2 et 3.</u> - On montre le théorème suivant.

THÉORÈME 3 ([11]). - <u>Soient</u> K <u>un corps valué complet et algébriquement clos,</u> $L \supset K$ <u>un corps topologique de fonctions d'une variable sur</u> K. <u>Soient</u> k (<u>resp.</u> ℓ) <u>le corps résiduel de</u> K (<u>resp.</u> L). <u>Si</u> $\ell = k$ <u>alors</u> $g_{top}(L) = 0$.

Ce théorème a été démontré par M. VAN DER PUT ([19]) dans le cas où K est algébriquement clos et maximalement complet (il n'y a donc pas d'extension immédiate de K). La démonstration que nous proposons est générale et elle fournit comme le signale M. VAN DER PUT ([19]) une démonstration rapide de l'existence de la réduction stable des courbes algébriques. Nous utilisons des techniques d'analyse ultramétrique.

Par définition, L est une extension algébrique finie du complété $K(X)^{\wedge}$ d'une extension valuée transcendante pure $K(X)$ de K et le corps résiduel de $K(X)^{\wedge}$ est k. La démonstration se déroule en plusieurs pas liés à la nature algébrique de l'extension L de $K(X)^{\wedge}$. Pour des raisons techniques nous distinguons deux cas suivant que L est du type 2 ou 3. Dans les deux cas le pas délicat est celui des extensions algébriques cycliques de degré p où p est la caractéristique résiduelle de K. Si car $K = p$ cela revient à décrire le groupe $K(X)^{\wedge}/\wp(K(X)^{\wedge})$ où $\wp(x) = x^p - x$ (théorie d'Artin-Schreier). Si car $K = 0$ cela revient à décrire le groupe $(K(X)^{\wedge})^{x}/((K(X)^{\wedge})^p)^{x}$ (théorie de Kummer). Dans le cas du type 3 ($|L^{x}|=|K^{x}|$) les démonstrations sont plus délicates, nous utilisons des techniques qui sont essentiellement dues à Kaplansky ([7]; voir aussi [10] et [12]).

4. Le genre topologique d'un corps topologique de fonctions d'une variable sur un corps valué complet.

Soit K un corps valué complet. Le théorème qui suit montre que les théorèmes de structure 2 et 3 restent vrais pour un corps topologique donné après une extension finie du corps de base K.

THÉORÈME 4 ([11]). - <u>Soient</u> K <u>un corps valué complet et</u> $L \supset K$, $L \not\subset (K^{alg})^{\wedge}$, <u>un corps topologique de fonctions d'une variable sur</u> K. <u>Soient</u> k (<u>resp.</u> ℓ) <u>le corps résiduel de</u> K (<u>resp.</u> L). <u>Alors il existe une extension finie</u> K' <u>de</u> K <u>telle que</u>

pour tout corps K'' valué complet avec $K' \subset K'' \subset (K^{alg})^\wedge$ le corps topologique de fonctions $(LK'')^\wedge$ sur K'' vérifie

(i) Si $\ell \not\subset k^{alg}$ alors $g_{top}((LK'')^\wedge) = g(\overline{LK''})$.

(ii) Si $\ell \subset k^{alg}$ alors $g_{top}((LK'')^\wedge) = 0$.

C'est une conséquence des théorèmes 2 et 3 et du lemme de Krasner sur les corps valués.

Remarque. - Dans le cas où L est un corps topologique de type 0 (i. e. $L \subset (K^{alg})^\wedge$) on peut se demander si l'on a un résultat analogue. On peut montrer en effet qu'il existe K' fini sur K tel que $g_{top}(LK') = 0$. C'est une conséquence facile du théorème de J. Ax ([1], [9]).

Signalons le corollaire suivant qui est l'analogue du théorème de Lüroth.

COROLLAIRE. - Soient K un corps valué complet et algébriquement clos, $K(X)$ une extension valuée transcendante de K et F un sous-corps fermé de $K(X)^\wedge$ avec $K \subsetneq F \subset K(X)^\wedge$. Alors il existe $Y \in F$, $Y \notin K$ tel que $F = K(Y)^\wedge$ et F est un corps topologique de fonctions d'une variable sur K du même type que $K(X)^\wedge$.

Comme dans le cas des corps de fonctions d'une variable, on peut définir une notion de corps topologique du type 1 conservatif.

Définition. - Soient K un corps valué complet et L un corps topologique de fonctions d'une variable sur K du type 1. On dit que L est conservatif si pour tout K' fini sur K on a $g_t(K' L) = g_t(L)$ et $g(\overline{K' L}) = g(\overline{L})$.

Soit L un corps topologique d'une variable sur K (valué complet), on montre facilement grâce au théorème 4 les implications suivantes.

(i) L conservatif implique $g_t(L) = g(\overline{L})$.

(ii) $$\left.\begin{array}{l} L \text{ conservatif} \\ K \subset K' \subset (K^{alg})^\wedge \\ K' \text{ complet} \end{array}\right\} \text{ implique } \left\{\begin{array}{l} g_t((K' L)^\wedge) = g_t(L) \\ g(\overline{K' L}) = g(\overline{L}) . \end{array}\right.$$

(iii) $\exists\, K'$ fini sur K tel que $K' L$ soit conservatif.

Question. - Peut-on donner des critères pour qu'un corps topologique soit conservatif ?

Nous avons actuellement les exemples suivants qui peuvent guider dans cette voie.

(i) On peut avoir $g_t(L) = g_t(LK')$ pour tout K' fini sur K et $g(\overline{L}) < g(\overline{LK'})$ pour un K' fini sur K .

(ii) On peut avoir $g(\overline{L}) = g(\overline{K' L})$ pour tout K' fini sur K et $g_t(L) > g_t(K' L)$ pour un K' fini sur K .

BIBLIOGRAPHIE

[1] AX (James). - Zeros of polynomials over local fields, the Galois action, J. of Algebra, t. 15, 1970, p. 417-428.

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Eléments de mathématique. Algèbre commutative, chap. 6 : Valuations. - Paris, Hermann, 1964 (Actualités scientifiques et industrielles, 1308. Bourbaki, 30).

[3] GRAUERT (Hans) und REMMERT (Reinhold). - Über die Methode der diskret bewerteten Ringe in der nicht-archimedischen Analysis, Invent. Math., t. 2, 1966, p. 87-133.

[4] GROTHENDIECK (A.). - Revêtements etales et groupe fondamental, [SGA 1, 1960/61]. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 224).

[5] GRUSON (Laurent). - Fibrés vectoriels sur un polydisque ultramétrique, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 1, 1968, p. 45-89.

[6] HEINZER (William J.). - Valuation rings and simple transcendental field extensions, J. of pure Algebra, t. 26, 1982, p. 189-190.

[7] KAPLANSKY (Irving). - Maximal fields with valuations, Duke Math. J., t. 9, 1942, p. 303-321.

[8] LAMPRECHT (Erich). - Restabbildungen von Divisoren, Arch. der Math., t. 8, 1957, p. 255-264.

[9] MATIGNON (Michel). - Sous-corps fermés du complété de la clôture algébrique d'un corps local, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 288, 1979, série A, p. 1051-1054.

[10] MATIGNON (Michel) et RÉVERSAT (Marc). - Sur les automorphismes continus d'extensions transcendantes valuées, J. für reine und angew. Math., t. 338, 1983, p. 195-215.

[11] MATIGNON (Michel). - Genre topologique des corps valués, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 11e année, 1983/84, n° 14, 9 p.

[12] MATIGNON (Michel) et RÉVERSAT (Marc). - Sous-corps fermés d'un corps valué, J. of Algebra (à paraître).

[13] NAGATA (Masayoshi). - A theorem on valuation rings and its applications, Nagoya Math. J., t. 29, 1967, p. 85-91

[14] OHM (J.). - Simple transcendental extensions of valued fields, J. of Math. of Kyoto Univ., t. 22, 1982, p. 201-221.

[15] OHM (J.). - The ruled residue theorem for simple transcendental extensions of valued fields, Proc. Amer. math. Soc., t. 89, 1983, p. 16-18.

[16] POPP (H.). - Zur Reduktionstheorie algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 ; Existenz einer regulären Reduktion zu vorgegebenem Funktionen-Körper als Restklassenkörper, Arch. der Math., t. 17, 1966, p. 510-522.

[17] ROQUETTE (Peter). - Zur Theorie der Konstantenreduktion algebraischer Mannigfaltigkeiten, J. für reine und angew. Math., t. 200, 1958, p. 1-44.

[18] SCHILLING (O. F. G.). - The theory of valuations. - New York, American mathematical Society, 1950 (Mathematical Surveys, 4).

[19] VAN DER PUT (Marius). - Stable reduction of algebraic curves (à paraître).

[20] VAN DER WAERDEN (B. L.). - Algebra I. 7te Auflage der "Modernen Algebra". 1ter Teil. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1966 (Heidelberger Taschenbücher, 12).