Daniel Bertrand

Exposants, irrégularités et multiplicités

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 11 (1983-1984), exp. nº 10, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1983-1984__11__A6_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
11e année, 1983/84, n° 10, 6 p.

9 janvier 1984

EXPOSANTS, IRRÉGULARITÉS ET MULTIPLICITÉS

par Daniel BERTRAND

Résumé. - Suivant un travail fait en collaboration avec F. Beukers [2], on étend au cas de singularités irrégulières la méthode élaborée par G. CHUDNOVSKY [3] dans le cas fuchsien pour majorer les multiplicités de certaines formes linéaires en les solutions d'un système différentiel sur P^1. En passant à ses puissances symétriques, on peut ainsi préciser un résultat de Y. Nesterenko [4] obtenu par des techniques d'algèbre commutative. La présentation suit celle de [1].

1. Position du problème.

Soient m un entier $\geqslant 0$, A une matrice carrée d'ordre $m+1$ à coefficients dans le corps $K = \underset{\sim}{C}(z)$, et $\tilde{f} = {}^t(f_0, \ldots, f_m)$ un vecteur solution du système différentiel

$$(\alpha) \qquad Y' = AY$$

formé de fonctions analytiques au voisinage de 0. Pour toute famille $\{P_0, \ldots, P_m\}$ d'éléments de $\underset{\sim}{C}[z]$, la fonction

$$R(z) = P_0(z)\, f_0(z) + \ldots + P_m(z)\, f_m(z)$$

est, en vertu de (α), solution d'une équation différentielle L_R à coefficients dans K, d'ordre $s(R)$ majoré par le rang sur K de la famille $\{f_0, \ldots, f_m\}$, donc en particulier par $m+1$. Supposons ces fonctions linéairement indépendantes sur K, et soit N le maximum des degrés des polynômes $P_0, \ldots, P_m$, supposés non tous nuls. Un résultat classique de A. Shidlovsky (voir [6]) affirme alors l'existence d'un nombre réel $c(A, \tilde{f})$ ne dépendant que de A et de $\tilde{f}$ tel que la multiplicité de R en 0 vérifie l'inégalité

$$\mathrm{ord}_0\, R \leqslant N\, s(R) + c(A, \tilde{f}) .$$

Soit maintenant h un entier $\geqslant 1$. Les monômes de degré h en $f_0, \ldots, f_m$ sont les composantes d'une solution d'un système différentiel

$$(\alpha_h) \qquad Y' = A_h\, Y$$

d'ordre $\binom{h+m}{m}$ dont la matrice représentative A_h est formée de combinaisons linéaires à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$ des composantes de A. Considérons un élément P de $\underset{\sim}{C}[z, x_0, \ldots, x_m]$ non nul, de degré $\leqslant N$ en z et homogène de degré h en $x_0, \ldots, x_m$. La fonction

$$R_h(z) = P(z, f_0, \ldots, f_m)$$

(*) Daniel BERTRAND, Université de Paris VI Mathématiques, T. 46, 4 place Jussieu 75230 PARIS CEDEX 05.

est solution d'une équation différentielle L_{R_h} d'ordre $s(R_h)$ majoré par $\binom{h+m}{m}$, et le lemme de Shidlovsky entraîne la majoration

$$\mathrm{ord}_0\, R_h \leqslant N\, s(R_h) + c(A_h\,,\, \{\tilde{f}^h\})\ ,$$

valable dès que l'ensemble $\{\tilde{f}^h\}$ des monômes de degré h en $f_0\,,\,\ldots\,,\,f_m$ est formé de fonctions linéairement indépendantes sur K . Mais la dépendance en h de $c(A_h\,,\,\tilde{f}^h)$ n'étant pas explicite, on ne peut rien déduire de cette inégalité pour $h > 1$, et c'est par des techniques entièrement nouvelles que Y. Nesterenko a pu montrer, en supposant que les fonctions $f_0\,,\,\ldots\,,\,f_m$ ne sont liées par aucune relation de dépendance homogène non triviale sur K , l'estimation

$$c(A_h\,,\,\tilde{f}^h) \leqslant c_0(A\,,\,\tilde{f})\, h^{(m+1)^{m+1}+m+1}\ ,$$

$c_0(A\,,\,\tilde{f})$ ne dépendant maintenant que de A et de $\tilde{f}$ (voir [4]). Le récent travail de N'guyen-Tien-Tai [5] permet enfin de lever l'hypothèse d'indépendance faite sur les fonctions f_i .

Les résultats décrits ci-dessous, qui ont été obtenus en collaboration avec F. Beukers [2], entraînent en particulier le raffinement suivant de la majoration de Nesterenko.

PROPOSITION. - <u>Il existe deux nombres réels</u> $\tilde{\varepsilon}(A)$ <u>et</u> $\tilde{\varkappa}(A)$ <u>ne dépendant que de</u> A <u>tel que</u>

$$c(A_h\,,\,\{\tilde{f}^h\}) \leqslant \tilde{\varepsilon}(A)\, h\, \binom{h+m}{m} + \tilde{\varkappa}(A)\, \binom{h+m}{m}^2\ .$$

La définition des constantes $\tilde{\varepsilon}(A)$ et $\tilde{\varkappa}(A)$ nécessite une extension aux systèmes différentiels de la notion d'exposants des equations différentielles, en une singularité éventuellement irrégulière. Nous la décrivons au § 2, et y donnons l'énoncé précis du résultat principal de [2]. La démonstration de ce résultat, qui généralise une méthode introduite par G. Chudnovsky [3] dans le cas où $(\mathcal{A})$ n'a que des singularités régulières sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, est esquissée au § 3 .

2. <u>Exposants des systèmes différentiels et énoncé des résultats.</u>

Soient $(\mathcal{B})$ un système différentiel d'ordre n à coefficients dans K , α un point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, t un paramètre local en α , et M le p. p. c. m. des entiers $1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,n$. Le théorème de Fabry-Poincaré-Turritin-Hukuhara-Levelt (voir [6]) entraîne l'existence d'une matrice fondamentale de solutions de $(\mathcal{B})$ de la forme

$$(*)\qquad \Phi(t^{1/M})\ t^{C}\ \exp(Q(t^{-1/M}))\ ,$$

où Φ désigne une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans l'anneau $\mathbb{C}[[t^{1/M}]]$ des séries formelles en $t^{1/M}$, C une matrice de Jordan à coefficients complexes constants, et Q une matrice diagonale à coefficients polynomiaux. Le maximum $q_\alpha(\mathcal{B})$ des quotients par M des degrés de ces polynômes est un invariant du système différentiel $(\mathcal{B})$, appelé <u>rang de Katz de</u> $(\mathcal{B})$ <u>en</u> α . Les exponentielles des produits par $2i\pi$ des coefficients $c_1 , \dots , c_n$ de la diagonale de la matrice C sont les valeurs propres de la monodromie attachée à $(\mathcal{B})$ en α. La définition suivante n'a, en revanche, rien de canonique.

<u>Définition</u>. – On dira qu'une famille $\{e_1 , \dots , e_n\}$ de nombres réels est un <u>système admissible d'exposants de</u> $(\mathcal{B})$ <u>en</u> α s'il existe une matrice fondamentale de solutions de $(\mathcal{B})$ du type $(*)$ dont les coefficients $c_1 , \dots , c_n$ de la diagonale de C vérifient

$$\forall\, i = 1 , \dots , n \; ; \quad e_i \leq \mathcal{R}e\,(c_i) \, .$$

On appellera <u>sous-exposant</u> de $\mathcal{B}$ <u>en</u> α, et on notera $e_\alpha(\mathcal{B})$ le maximum des minorants ≤ 0 des différents systèmes admissibles d'exposants de $(\mathcal{B})$ en α. (*).

Ainsi, si $(\mathcal{B})$ correspond à une équation différentielle $Ly = 0$ d'ordre n, et si α en est une singularité régulière, le rang de Katz $q_\alpha(L)$ de L en α est nul, et on peut choisir par système admissible d'exposants de L en α les parties réelles des exposants (c'est-à-dire des racines de l'équation indicielle) de L en α. Si α est une singularité irrégulière de L, ce sont les équations indicielles des facteurs de L, convenablement tordus, intervenant dans la décomposition de Turritin de L (voir [6]) qui fournissent les meilleurs systèmes admissibles d'exposants de L en α. Signalons à ce propos que le récent résultat de J. Yebbou [8] sur les facteurs déterminants de L fournit, pour $n \leq 3$, une minoration directe des sous-exposants $e_\alpha(L)$ **en chacune de ses singularités** α.

Dans ces conditions, on peut énoncer, en reprenant les notations du § 1 (voir [2] et [1], théorème 1).

THÉORÈME 1. – <u>Soient</u> $\epsilon(\mathcal{A})$ (<u>resp.</u> $\varkappa(\mathcal{A})$) <u>la somme des sous-exposants</u> (<u>resp.</u> <u>des rangs de Katz</u>) <u>de</u> $(\mathcal{A})$ <u>en ses différentes singularités sur</u> $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $\sigma(\mathcal{A})$ <u>le nombre de ces singularités</u>, <u>et</u> $P_0 , \dots , P_m$ <u>des éléments de</u> $\mathbb{C}[z]$ <u>de degrés</u> $\leq N$. <u>Alors, la fonction</u> $R = \sum_{i=0,\dots,m} P_i\, f_i$ <u>est identiquement nulle</u>, <u>ou vérifie</u>

$$\mathrm{ord}_0\, R \leq N\, s - \epsilon(\mathcal{A})\, s + (\varkappa(\mathcal{A}) + \sigma(\mathcal{A}))\, s(s-1)/2 \, ,$$

<u>où</u> $s = s(R)$ <u>désigne la dimension du</u> K-<u>espace vectoriel engendré par les dérivées successives de</u> R (<u>de sorte que</u> $s \leq m + 1$).

En passant aux puissances symétriques de $(\mathcal{A})$, on en déduit (voir [2], théorème 2)

COROLLAIRE. – <u>Soient</u> h <u>et</u> N <u>deux entiers</u> ≥ 1, <u>et</u> P <u>un élément de</u> $\mathbb{C}[z , x_0 , \dots , x_m]$ <u>de degré</u> $\leq N$ <u>en</u> z, <u>et homogène de degré</u> h <u>en</u> $x_0, \dots, x_m$. <u>Alors</u>, <u>la fonction</u> $R_h = P(z , f_0 , \dots , f_m)$ <u>est identiquement nulle</u>, <u>ou vérifie</u>

$$\mathrm{ord}_0\, R_h \leq N\, s_h - \epsilon(\mathcal{A})\, h\, s_h + (\varkappa(\mathcal{A}) + \sigma(\mathcal{A}))\, s_h(s_h - 1)/2 \, ,$$

<u>où</u> $s_h = s(R_h)$ <u>désigne la dimension du</u> K-<u>espace vectoriel engendré par les dérivées successives de</u> R_h (<u>de sorte que</u> $s_h \leq \binom{h+m}{m}$).

(*) Nous renvoyons à [2], Définition 2, pour le cas des équations différentielles.

En effet, les singularités du système différentiel $(\mathfrak{a}_h)$ introduit au § 1 coincident avec celles de $(\mathfrak{a})$, et $(\mathfrak{a}_h)$ admet une matrice fondamentale de solutions formées de monômes de degré h en les composantes d'une matrice fondamentale de solutions de $(\mathfrak{a})$. Par conséquent, pour toute singularité α de $(\mathfrak{a}_h)$, le rang de Katz $q_\alpha(\mathfrak{a}_h)$ de $(\mathfrak{a}_h)$ en α est égal à $q_\alpha(\mathfrak{a})$, et $h\, e_\alpha(\mathfrak{a})$ minore le sous-exposant de $(\mathfrak{a}_h)$ en α. Il suffit donc d'appliquer le théorème 1 à $(\mathfrak{a}_h)$.

Le théorème 1 permet de choisir

$$c(A\ ,\ \bar{f}) = -\ \epsilon(\mathfrak{a})(m+1) + (\varkappa(\mathfrak{a}) + \sigma(\mathfrak{a}))\ m(m+1)/2\ ,$$

dans l'énoncé du lemme de Shidlovsky. Son corollaire entraîne immédiatement la proposition du § 1.

3. Relations globales entre exposants et démonstration du théorème 1.

Si L est un opérateur fuchsien d'ordre n sur $\underset{\sim}{P}^1(\underset{\sim}{C})$, ses exposants $\{\epsilon_i^\alpha\ ;\ i = 1\ ,\ \dots\ ,\ n\}$ sont liés par la relation classique de Fuchs (voir par exemple [3])

$$\sum_{\alpha\in \underset{\sim}{P}^1(\underset{\sim}{C})} \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i^\alpha - (i-1)\right) = -\ n(n-1)$$

(noter qu'en vertu du théorème de Cauchy, la somme précédente ne porte que sur l'ensemble fini des singularités de L). Cette relation s'étend au cas de singularités irrégulières de la façon suivante (voir [2], théorème 3).

THÉORÈME 2. - Soient L un opérateur différentiel d'ordre n à coefficients dans K , $\mathbb{S}$ un ensemble fini de points de $\underset{\sim}{P}^1(\underset{\sim}{C})$ contenant toutes les singularités non apparentes de L et, pour tout élément α de $\mathbb{S}$, q_α le rang de Katz de L en α et $\{e_1^\alpha\ ,\ \dots\ ,\ e_n^\alpha\}$ un système admissible d'exposants de L en α . Alors

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{S}} \left(\sum_{i=1}^n e_i^\alpha) - (q_\alpha + 1)\ \frac{n(n-1)}{2}\right) \leqslant -\ n(n-1)$$

(voir [2], § 2 pour la démonstration de ce résultat, et [1], § 2 et exemple 3, pour les raffinements que l'on peut en donner).

Le théorème 2 ramène la majoration de l'un des exposants de L en l'un des points de $\mathbb{S}$ (et donc, en particulier, de l'ordre en ce point de l'une des solutions de L , si elle y est holomorphe) à une minoration de tous les exposants de L en ses différentes singularités (ce qui est beaucoup plus facile à réaliser en général). Montrons comment ce principe s'applique à la démonstration du théorème 1.

On peut, sans perte de généralité, supposer la fonction $R = \sum_{i=0,\cdots,m} P_i\ f_i$ non identiquement nulle, de sorte que l'ordre s du générateur L_R de l'idéal à gauche de l'anneau $K[d/dz]$ formé par les opérateurs différentiels annulant R est un entier strictement positif. Un argument de théorie de Galois différentielle (voir [2], proposition 3) fournit une base de solutions de l'équation différentielle $L_R\ y = 0$ de la forme $\sum_{i=0,\cdots,m} P_i\ f_{ij}$, où

$$\{{}^t(f_{0j}, \ldots, f_{mj}) \ ; \ j = 1, \ldots, s\}$$

désignent certaines solutions du système différentiel $(\mathfrak{A})$. Par conséquent, les singularités non apparentes de L_R à distance finie sont contenues dans l'ensemble $\mathrm{Sing}(\mathfrak{A})$ des singularités de $(\mathfrak{A})$, le rang de Katz q_α de L_R en tout point α de $\underset{\sim}{P}^1(\underset{\sim}{C})$ est majoré par $q_\alpha(\mathfrak{A})$ et, pour α à distance finie (resp. pour $\alpha = \infty$), on peut choisir la suite formée de $e_\alpha(\mathfrak{A})$ (resp. $e_\infty(\mathfrak{A}) - N$), répété s fois, pour système admissible d'exposants de L_R en α. De plus, la connaissance de la solution R elle-même permet de choisir pour système admissible d'exposants de L_R en 0 la suite formée de $\mathrm{ord}_0 R$, et de $e_0(\mathfrak{A})$ répété $s - 1$ fois.

Dans ces conditions, le théorème 2 entraîne, si l'on y choisit pour ensemble S la réunion (éventuellement non disjointe) de $\mathrm{Sing}(\mathfrak{A})$, de 0 et du point à l'infini, et pour L l'opérateur L_R

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_0 R + (s-1)\, e_0(\mathfrak{A}) - (q_0(\mathfrak{A}) + 1)\frac{s(s-1)}{2} \\ + \left(s(e_\infty(\mathfrak{A}) - N) - (q_\infty(\mathfrak{A}) + 1)\frac{s(s-1)}{2}\right) \\ + \sum_{\substack{\alpha\in \mathrm{Sing}(\mathfrak{A}) \\ \alpha \neq 0,\infty}} \left(s\, e_\alpha(\mathfrak{A}) - (q_\alpha(\mathfrak{A}) + 1)\frac{s(s-1)}{2}\right) \leqslant - s(s-1)\ .\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathrm{ord}_0 R \leqslant N s + \sum_{\alpha\in \mathrm{Sing}(\mathfrak{A})} \left(- e_\alpha(\mathfrak{A})\, s + (q_\alpha(\mathfrak{A}) + 1)\frac{s(s-1)}{2}\right),$$

et le théorème 1 est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRAND (Daniel). - Exposants des systèmes différentiels, vecteurs cycliques et majorations de multiplicités, "Equations différentielles dans le champ complexe". [1984. Luminy]. - Berlin, Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics) (à paraître).

[2] BERTRAND (Daniel) et BEUKERS (F.). - Equations différentielles linéaires et majorations de multiplicités, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. (à paraître).

[3] CHUDNOVSKY (G.). - Rational and Padé approximations to solutions of linear differential equations and the monodromy theory, "Complex analysis, microlocal calculus and relativistic quantum theory" [1979. Les Houches], p. 136-169. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1980 (Lecture Notes in Physics, 126).

[4] NESTERENKO (Y.). - Borne pour l'ordre des zéros de fonctions d'une certaine classe [en russe], Izvest. Akad. Nauk SSSR, Serija mat., t. 41, 1977, p. 253-284.

[5] N'GUYEN TIEN TAI. - Sur les bornes des ordres des zéros de polynômes en des fonctions analytiques ... [en russe], Mat. Sbornik, t. 120, 1983, p. 112-142.

[6] ROBBA (Philippe). - Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentiels. Application à la réduction formelle des équations différentielles, Enseignement Math., Genève, t. 26, 1980, 2e série, p. 279-311.

[7] SHIDLOVSKY (A.). - Approximations liophantiennes et nombres transcendants, [en russe], Publications de l'Université de Moscou, 1982.

[8] YEBBOU (J.). - Calcul de facteurs déterminants, "Equations différentielles dans le champ complexe" [1984. Luminy]. - Berlin, Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics) (à paraître).