Yvette Feneyrol-Perrin

Un théorème de Mittag-Leffler sur certains corps valués de rang supérieur à 1

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 11 (1983-1984), exp. nº 9, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1983-1984__11__A5_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
11e année, 1983/84, n° 9, 11 p.

19 décembre 1983

UN THÉORÈME DE MITTAG-LEFFLER SUR CERTAINS CORPS VALUÉS DE RANG SUPÉRIEUR À 1

(d'après Y. FENEYROL-PERRIN et L. HADDAD [5])

par Yvette FENEYROL-PERRIN (*)

Les corps dont il s'agit sont des corps valués, dont l'anneau de valuation possède une suite d'idéaux premiers strictement décroissante d'intersection l'idéal nul, et qui sont complets et algébriquement clos.

Soit K un tel corps. On se place dans le cadre de la théorie des fonctions analytiques basée sur la notion d'élément analytique "au sens de Krasner" qui a été élaborée par Y. FENEYROL-PERRIN ([2], [3]).

On rappelle que

- Tout ouvert de K est un ensemble analytique.
- Une fonction f, définie sur un ouvert D de K, est dite analytique s'il existe une famille enchaînée d'ouverts telle que la restriction de f à chacun de ces ouverts soit un élément analytique.

1. Notations et définitions.

Nous notons $\mathfrak{A}$ l'anneau de valuation de K et, pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}}$ l'anneau local de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{P}$.

Pour toute la suite de l'exposé, nous nous fixons une suite d'idéaux premiers $\mathfrak{P}_n$, strictement décroissante, d'intersection l'idéal nul.

1.1. Définitions. - Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier non nul de $\mathfrak{A}$. Nous dirons qu'une partie A de K est un $\mathfrak{P}$-ouvert lorsque l'on a

$$A \subset \mathfrak{A} \quad \text{et} \quad a + \mathfrak{P} \subset \mathfrak{A}_{\mathfrak{P}} \text{ pour tout } a \in A .$$

Ainsi un $\mathfrak{P}$-ouvert est "un ouvert borné d'épaisseur non nulle" au sens défini dans [2] et [3].

On dira que deux éléments x et y de K sont $\mathfrak{P}$-proches si $x - y \in \mathfrak{P}$.

Rappelons quelques résultats sur les fonctions analytiques qui nous serviront dans la suite de l'exposé. Soit D un ouvert de K, notons $\mathcal{H}(D)$ (resp. $\mathfrak{F}(D)$) l'ensemble des éléments (resp. des fonctions) analytiques sur D.

(*) Yvette FENEYROL-PERRIN, Mathématiques pures, Université de Clermont-II, Complexe des Cézeaux, B. P. 45, 63170 AUBIÈRE.

1.2. PROPOSITION. - Si D est un $\mathcal{P}$-ouvert, $\mathcal{H}(D) = \mathcal{S}(D)$.

1.3 . PROPOSITION : "THÉORÈME DE WEIERSTRASS". - Soient D un ouvert de K , Z une partie de D et, pour tout $a \in Z$, soit un entier $n(a) \geqslant 1$.

Les deux énoncés suivants sont équivalents.

(i) Il existe une fonction analytique f sur D dont Z est l'ensemble des zéros et dont chaque zéro a est d'ordre $n(a)$.

(ii) Pour tout idéal premier $\mathcal{P}$ de $\mathfrak{a}$ non nul, $Z \cap D(\mathcal{P})$ est fini.

1.4 . PROPOSITION. - Soit $\bar{K} \cup (\infty)$ le projectivisé de K .
Soient D un $\mathcal{P}$-ouvert de K , et f une fonction méromorphe sur D . Il existe une fraction rationnelle R telle que $R(\infty) = 0$, ayant tous ses pôles dans D , et une fonction analytique h sur D , telles que

$$f(x) = R(x) + h(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in D .$$

Cette décomposition est unique. R est appelée la partie principale de f dans D .

Du théorème de Weierstrass, on déduit que, pour qu'un ensemble Z d'un ouvert quelconque D de K soit l'ensemble des pôles d'une fonction méromorphe sur D , il faut et il suffit que, pour tout idéal $\mathcal{P}$ premier non nul de $\mathfrak{a}$, $Z \cap D(\mathcal{P})$ soit un ensemble fini. Z est alors dénombrable. Y. FENEYROL-PERRIN a donné une condition suffisante pour qu'une famille dénombrable de fractions rationnelles ayant pour pôles les points de Z soit la famille des parties principales d'une fonction méromorphe [3]. Une question était ouverte : cette condition est-elle nécessaire ? Sinon y a-t-il une condition moins restrictive ou, au mieux, n'y a-t-il pas de condition du tout portant sur les parties principales comme en analyse complexe ou en analyse ultramétrique de rang un pour les fonctions méromorphes sur un disque ?

Le "théorème de Mittag-Leffler" que l'on se propose de démontrer ici répond à la question. Il donne trois conditions équivalentes qui sont des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite de fractions rationnelles soit la famille des parties principales d'une fonction méromorphe sur un ouvert D de K .

Donnons tout de suite un exemple d'application directe du théorème de Mittag-Leffler.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de K telle que $a_0 = 0$ et $a_i - a_j \notin \mathcal{P}_0$. Soit $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{a}_n + \mathcal{P}_n$, et soit, pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, la fraction rationnelle $R_n(X) = A_n/(\tilde{X} - a_n)$, où $A_n \notin \mathfrak{a}_{\mathcal{P}_n}$. Alors $P = \{a_n \; ; \; n \in \underset{\sim}{N}\}$ est l'ensemble des pôles d'une fonction méromorphe sur D , mais il n'existe aucune fonction méromorphe sur D dont P soit l'ensemble des pôles et qui admette, en chaque pôle a_n , pour partie principale R_n .

Introduisons une notion qui joue un rôle central dans la théorie des fonctions analytiques et méromorphes : celle de $\mathfrak{P}$-fraction.

2. Définition et propriétés des $\mathfrak{P}$-fractions.

2.1. Définition. - Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $\mathfrak{a}$: nous dirons qu'une fraction rationnelle $R \in K(X)$ est une $\mathfrak{P}$-fraction si $R(x) \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{P}}$ pour tout $x \in \mathfrak{P}$.

On démontre alors que R est une $\mathfrak{P}$-fraction si, et seulement si, elle peut se mettre sous la forme

$$R(X) = P(X)/\prod_{i\in I}(1 - X/a_i) ,$$

où $P \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{P}}[X]$ et $a_i \notin \mathfrak{P}$ pour tout $i \in I$.

2.2. Perturbation d'ordre $\mathfrak{P}$ des pôles d'une $\mathfrak{P}$-fraction.

Soit R une $\mathfrak{P}$-fraction mise sous forme irréductible.

$$R(X) = P(X)/\prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{X}{q_i})$$

où $P \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{P}}[X]$ et $q_i \notin \mathfrak{P}$ pour tout i.

Pour tout $i \in \{1 , \dots , n\}$, soit t_i un élément de $\overline{K}$, et soit S la fraction rationnelle

$$S(X) = P(X)/\prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{X}{t_i}) \quad \text{où} \quad \frac{X}{t_i} = 0 \quad \text{si} \quad t_i = \infty .$$

On dira que S est une $\mathfrak{P}$-perturbée de R, lorsque, pour chaque i,

$$t_i - q_i \in \mathfrak{P} \quad \text{si} \quad q_i \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{P}}$$

$$t_i \notin \mathfrak{a}_{\mathfrak{P}} \quad \text{si} \quad q_i \notin \mathfrak{a}_{\mathfrak{P}} .$$

2.3. PROPOSITION. - Soient R une $\mathfrak{P}$-fraction, Z l'ensemble de ses pôles, et S une $\mathfrak{P}$-perturbée de R. Alors

(i) S est une $\mathfrak{P}$-fraction

(ii) $S(x) - R(x) \in \mathfrak{P}$ pour tout $x \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{P}} \setminus (Z + \mathfrak{P})$.

Démonstration.

(i) C'est immédiat.

(ii) Posons

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{n}(1 - X/q_i)$$

$$Q_1(X) = \prod_{i=1}^{n}(1 - X/t_i) .$$

Soit $x \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{P}} \setminus (Z + \mathfrak{P})$. Calculons modulo $\mathfrak{P}$. On a

$$\overline{Q(x)} = \overline{Q_1(x)} \neq 0$$

et donc

$$\overline{R(x)} = \overline{P(x)}/\overline{Q(x)} = \overline{P(x)}/\overline{Q_1(x)} = \overline{S(x)} ,$$

donc $S(x) - R(x) \in \wp$.

2.4. THÉORÈME. – <u>La partie principale d'une</u> $\wp$-<u>fraction dans un</u> $\wp$ -<u>ouvert est elle-même une</u> $\wp$-<u>fraction</u>.

<u>Démonstration</u>. – Soient V un $\wp$-ouvert, f une $\wp$-fraction, et R sa partie principale dans V. Soient $(a_i)_{i\in I}$ la famille des pôles de f qui sont dans V (chacun étant compté autant de fois que son ordre de multiplicité).

De même, soit $(b_j)_{j\in J}$ la famille des pôles de f qui sont en dehors de V.

Par hypothèse, f n'a aucun pôle dans $\wp$, donc $\frac{1}{b_j} \in \mathfrak{a}_\wp$ pour tout $j \in J$.

D'autre part, V étant un $\wp$-ouvert $a_i \in \mathfrak{a}_\wp$ quel que soit $i \in I$. f se met sous la forme irréductible

$$f(X) = \frac{P(X)}{\prod_{i\in I}(X - a_i) \prod_{j\in J}(1 - (X/b_j))}$$

$$= \frac{(-1)^{\mathrm{card}\, I}(\prod a_i)^{-1} P(X)}{\prod_{i\in I}(1 - (X/a_i)) \prod_{j\in J}(1 - (X/b_j))} .$$

Puisque f est une $\wp$-fraction, $(\prod_i a_i)^{-1}$ $P(X) \in \mathfrak{a}_\wp[X]$ et, comme $a_i \in \mathfrak{a}_\wp$ pour tout $i \in J$, $P(X) \in \mathfrak{a}_\wp[X]$. Posons

$$S(X) = \prod_{i\in I}(X - a_i) , \quad T(X) = \prod_{j\in J}(1 - \frac{X}{b_j}) ,$$

S et T sont des éléments de $\mathfrak{a}_\wp[X]$.

D'après le corollaire 1, de [1], (p.A IV. 73), le résultant de S et T est

$$\operatorname{res}(S , T) = \prod_{i\in I} T(a_i) = \prod_{i\in I} \prod_{j\in J}(1 - \frac{a_i}{b_j}) .$$

Or, pour tout $(i , j) \in I \times J$, $a_i - b_j \notin \wp$. Donc $\operatorname{res}(S , T) \in \mathfrak{a}_\wp \backslash \wp$ et est inversible dans $\mathfrak{a}_\wp$.

On en déduit, d'après le corollaire 1, de [1], (p.A IV. 73), qu'il existe deux polynômes A et B de $\mathfrak{a}_\wp[X]$ tels que $SA + TB + 1$. Donc

$$F(X) = \frac{P(X)}{S(X)\ T(X)} = \frac{P(X)\ A(X)}{T(X)} + \frac{P(X)\ B(X)}{S(X)} .$$

Donc R n'est autre que la partie principale de la fraction $\frac{PB}{S}$.

Or, $PB \in \mathfrak{a}_\wp[X]$, $S \in \mathfrak{a}_\wp[X]$, et S est unitaire. On peut donc faire la division euclidienne de PB par S dans $\mathfrak{a}_\wp[X]$. Il existe $E \in \mathfrak{a}_\wp[X]$, $F \in \mathfrak{a}_\wp[X]$ tels que

$$PB = SE + F \quad \text{où} \quad \deg F < \deg S .$$

Donc $\frac{PB}{S} = E + \frac{F}{S}$, et $R = \frac{F}{S}$ est une $\mathcal{P}$-fraction.

Nous allons maintenant établir deux lemmes d'approximation d'une $\mathcal{P}$-fraction, et pour cela nous aurons besoin du résultat suivant.

2.5. LEMME. - Soient A et $a \in K$. Soit $\mathcal{P}$ le plus grand idéal premier de $\mathfrak{a}$ tel que $a \notin \mathcal{P}$. On suppose que $A \in \mathfrak{a}_{\mathcal{P}}$. Alors il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que $Aa^n \in \mathfrak{a}$.

Démonstration. - Comme $\mathcal{P}$ est le plus grand idéal premier de $\mathfrak{a}$ qui ne contient pas a ,

$$\mathcal{P} = \{x \in K \ ; \ |x| < |a|^n , \ \forall\, n \in \underset{\sim}{N}\} .$$

Puisque $A \in \mathfrak{a}_{\mathcal{P}}$, $1/A \notin \mathcal{P}$, donc il existe $n \geqslant 0$ tel que $1/|A| \geqslant |a|^n$, c'est-à-dire $a^n A \in \mathfrak{a}$.

2.6. Lemmes d'approximation d'une $\mathcal{P}$-fraction.

2.6.1. LEMME. - Soient $a \in K$ et $\mathcal{P}$ le plus grand idéal premier de $\mathfrak{a}$ tel que $\frac{1}{a} \notin \mathcal{P}$.

Soit f une $\mathcal{P}$-fraction dont tous les pôles sont $\mathcal{P}$-proches de a . Alors, pour tout idéal premier Q de $\mathfrak{a}$ contenant strictement $\mathcal{P}$, il existe un polynôme $g \in K[X]$ tel que

$$f(x) - g(x) \in Q \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathfrak{a}_Q .$$

Esquisse de la démonstration. - Soit une $\mathcal{P}$-fraction.

$$f(X) = P(X)/\prod_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{X}{a_i}\right) \quad \text{où} \quad P \in \mathfrak{a}_{\mathcal{P}}[X] \quad \text{et} \quad a_i \notin \mathcal{P} \quad \text{pour tout} \quad i .$$

Il suffit d'établir le résultat pour la $\mathcal{P}$-perturbée de f :

$$h(X) = P(X)/(1 - X/a)^m$$

et finalement pour une fraction du type $A/(1 - X/a)^m$ où $A \in \mathfrak{a}_{\mathcal{P}}$.

En décomposant la fraction $A/(1 - Y)^m$ dans l'anneau des séries formelles $K[[X]]$, on peut écrire

$$A/(1 - X/a)^m = A\left[\sum_{i=0}^{n} C_{m+I-1}^{n} \ (X/a)^{i}\right] + \frac{A}{a^{n+1}}\, X^{n+1}\, \frac{P_n(X/a)}{(1 - X/a)^m}$$

$$= g(X) + \frac{A}{a^{n+1}}\, X^{n+1}\, \frac{P_n(X/a)}{(1 - X/a)^m} ,$$

où P_n et g sont des polynômes, et où les coefficients C_{m+i-1}^{n} et les coefficients de P_n sont des multiples entiers de l'unité de K .

Soit alors $\mathfrak{Q}$ un idéal premier contenant strictement $\mathfrak{P}$. L'élément $1/a \in \mathfrak{Q}$, et, pour tout $x \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$, $x^{n+1} P_n(x/a)/(1 - x/a)^m \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$.

Or, d'après le lemme (2.5), il existe $n \in \underset{\sim}{N}$ tel que $A/a^n \in \mathfrak{Q}$, donc, pour un tel n , on a $A/a^{n+1} \in \mathfrak{Q}$ et, pour tout $x \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$,

$$A/a^{n+1} x^{n+1} P_n(x/a)/(1 - X/a)^m = A/(1 - x/a)^m - g(x) \in \mathfrak{Q} .$$

2.6.2 LEMME. - <u>Soient</u> $\mathfrak{R}$ <u>et</u> $\mathfrak{P}$ <u>deux idéaux premiers de</u> $\mathfrak{A}$ <u>tels que</u> $\mathfrak{R} \supsetneqq \mathfrak{P}$, a <u>un point de</u> $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}} \backslash \mathfrak{R}$, <u>et</u> f <u>une</u> $\mathfrak{P}$-<u>fraction dont tous les pôles sont</u> $\mathfrak{P}$-<u>proches de</u> a .

<u>Alors il existe un idéal premier</u> $\mathfrak{Q}'$ <u>de</u> $\mathfrak{A}$ <u>contenant strictement</u> $\mathfrak{P}$, <u>pour lequel on a la propriété suivante</u> :

<u>Pour tout idéal premier</u> $\mathfrak{Q}$ <u>de</u> $\mathfrak{A}$ <u>tel que</u> $\mathfrak{Q}' \supset \mathfrak{Q} \supsetneqq \mathfrak{P}$, <u>et pour tout</u> $c \in \mathfrak{Q} \backslash \mathfrak{P}$, <u>il existe une fraction rationnelle</u> g <u>ayant pour unique pôle</u> $b = a - c$, <u>et telle que</u>

$$f(x) - g(x) \in \mathfrak{Q} \quad \underline{\text{pour tout}} \quad x \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}} \backslash (a + \mathfrak{Q}) .$$

<u>Esquisse de la démonstration</u>. - Comme pour le lemme précédent, il suffit de démontrer le résultat pour les fractions rationnelles du type $(A/(X - a)^m)$ où $A \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{P}}$, le résultat, dans le cas général, s'en déduisant facilement.

Nous devons distinguer deux cas :

<u>1er cas</u> : Il existe un idéal premier $\mathfrak{Q}'$ tel que $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{Q}' \supsetneqq \mathfrak{P}$ et $A \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$. Soit $\mathfrak{Q}$ un idéal premier tel que $\mathfrak{Q}' \supset \mathfrak{Q} \supsetneqq \mathfrak{P}$, alors $a \notin \mathfrak{Q}$, et la fraction $f(X)=A/(X-a)^m$ est une $\mathfrak{Q}$-fraction.

Soient $c \in \mathfrak{Q} \backslash \mathfrak{P}$, et $b = a - c$. La fraction $g(X) = ((- 1)^m a^{-m} A)/((1 - X/b)^m)$ est une $\mathfrak{Q}$-perturbée de $f(X)$. D'après la proposition (2.4) sur la perturbation des pôles,

$$g(x) - f(x) \in \mathfrak{Q} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}} \backslash (a + \mathfrak{Q}) .$$

<u>2e cas</u> : Pour tout idéal premier $\mathfrak{Q}$ contenant strictement $\mathfrak{P}$, $A \notin \mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$. Prenons pour $\mathfrak{Q}'$ le plus petit idéal premier qui contient $1/A$. On a ainsi $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{Q}' \supsetneqq \mathfrak{P}$, et si $\mathfrak{Q}' \supset \mathfrak{Q} \supsetneqq \mathfrak{P}$ alors $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}'$.

Soit $c \in \mathfrak{Q} \backslash \mathfrak{P}$ et $b = a - c$. Ainsi

$$(X - b)^{m+n} = (X - a + c)^{m+n} = \sum_{i=0}^{m+n} C_{m+n}^i (X - a)^{m+n-i} c^i$$

$$= (X - a)^m \sum_{i=0}^{n} C_{m+n}^i (X - a)^{n-i} c^i + c^n \sum_{j=1}^{m} C_{m+n}^{n+j} (X - a)^{m-j} .$$

Posons

$$P(X) = A \sum_{i=0}^{n} C_{m+n}^i (X - a)^{n-i} c^i ,$$

$$g(X) = P(X)/(X - b)^{m+n} .$$

Alors on a $f(X) - g(X) = A\,c^n\,S(X)$, où $S(X) \in K(X)$, et vérifie $S(x) \in \mathfrak{Q}$ pour tout $x \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}} \setminus (a + \mathfrak{Q})$.

Or, d'après le lemme (2.5), il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Ac^n \in \mathfrak{Q}$, donc, pour un tel n, $f(x) - g(x) \in \mathfrak{Q}$ pour tout $x \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}} \setminus (a + \mathfrak{Q})$.

3. Le Théorème de Mittag-Leffler.

3.1. LEMME. - *Soit* f *une fonction méromorphe sur un ouvert* D *de* K. *On suppose que* $0 \in D$ *et que* 0 *n'est pas un pôle de* f. *Alors il existe un idéal premier* $\mathcal{P}$ *de* $\mathfrak{A}$ *tel que* $f(x) \in \mathfrak{A}_{\mathcal{P}}$ *pour tout* $x \in \mathcal{P}$.

Démonstration. - Les pôles d'une fonction méromorphe sur un ouvert étant isolés, et 0 n'étant pas un pôle de f, il existe un idéal premier $\mathfrak{Q}$ de $\mathfrak{A}$ sur lequel f est fonction analytique (d'après la Proposition (1.4)) et en fait est élément analytique (Proposition (1.2)). Il existe donc une fraction rationnelle $g \in K(X)$ sans pôle dans $\mathfrak{Q}$ telle que $f(x) - g(x) \in \mathfrak{Q}$ pour tout $x \in \mathfrak{Q}$. g peut s'écrire sous la forme $g(X) = P(X)/\prod_{i=1}^{m}(1 - (X/a_i))$ où $P \in K[X]$ et $a_i \notin \mathfrak{Q}$ pour tout i.

Il existe un idéal premier $\mathcal{P}'$ de $\mathfrak{A}$ tel que $P \in \mathfrak{A}_{\mathcal{P}'}[X]$. Posons $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cap \mathfrak{Q}$, alors g est une $\mathcal{P}$-fraction et, par conséquent, pour tout $x \in \mathcal{P}$, $g(x) \in \mathfrak{A}_{\mathcal{P}}$, donc $f(x) \in \mathfrak{A}_{\mathcal{P}}$.

3.2. *Définition.* - Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier non nul de $\mathfrak{A}$.

Soit D une partie quelconque de K. On appellera $\mathcal{P}$-intérieur de D le plus grand $\mathcal{P}$-ouvert contenu dans D, et on le notera $D(\mathcal{P})$.

Pour, tout $n \in \mathbb{N}$, on notera D_n le $\mathcal{P}_n$-*intérieur* de D.

Ainsi la suite (D_n) est croissante, et $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ si, et seulement si, D est ouvert.

3.3. LEMME. - *Soient* D *un ouvert de* K *contenant* 0, $\mathcal{P}$ *un idéal premier non nul de* $\mathfrak{A}$, $D(\mathcal{P})$ *son* $\mathcal{P}$-*intérieur, et* f *un élément analytique sur* $D(\mathcal{P})$.

On suppose que $f(x) \in \mathfrak{A}_{\mathcal{P}}$ *pour tout* $x \in \mathcal{P}$. *Il existe alors une* $\mathcal{P}$-*fraction* $h \in K(X)$ *sans pôle dans* D *et telle que* $f(x) - h(x) \in \mathcal{P}$ *pour tout* $x \in D(\mathcal{P})$.

Esquisse de la démonstration. - Il existe une $\mathcal{P}$-fraction g sans pôle dans $D(\mathcal{P})$ telle que $f(x) - g(x) \in \mathcal{P}$ pour tout $x \in D(\mathcal{P})$. Il est facile de trouver une $\mathcal{P}$-perturbée h de g sans pôle dans D. D'après la proposition (2.3), on a $h(x) - g(x) \in \mathcal{P}$ pour tout $x \in D(\mathcal{P})$ et par conséquent $f(x) - h(x) \in \mathcal{P}$ pour tout $x \in D(\mathcal{P})$.

3.4. THÉORÈME (DE MITTAG-LEFFLER). - *Soient* D *un ouvert quelconque de* K, *et* Z *une partie de* D. *Pour chaque* $a \in Z$, *soit* R_a *une fraction rationnelle ayant pour unique pôle* a *et dont le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur. Pour toute partie finie* F *de* Z, *on pose* $R_F = \sum_{a \in F} R_a$.

On suppose que $0 \in D\backslash Z$. Les énoncés suivants sont alors équivalents :

(i) Il existe une fonction méromorphe f sur D dont Z est l'ensemble des pôles et dont la partie principale en chaque pôle $a \in Z$ est R_a.

(ii) Pour tout idéal premier non nul $\mathfrak{Q}$ de $\mathfrak{a}$, l'ensemble $Z \cap D(\mathfrak{Q})$ est fini, et il existe un idéal premier $\mathfrak{P}$ non nul de $\mathfrak{a}$ tel que pour tout idéal premier $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}$ non nul et tout $\mathfrak{Q}$-ouvert V contenu dans D, la fraction R_F, où $F = Z \cap V$, est une $\mathfrak{Q}$-fraction.

(iii) Il existe un idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{a}$ tel que $Z \cap D(\mathfrak{P})$ soit fini et pour lequel on a la propriété suivante : pour tout couple d'idéaux premiers non nuls $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}'$ vérifiant $\mathfrak{Q}' \subsetneq \mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}$, l'ensemble $F = Z \cap (D(\mathfrak{Q}')\backslash D(\mathfrak{Q}))$ est fini, et il existe une fraction rationnelle S sans pôle dans D telle que $R_F(x) - S(x) \in \mathfrak{Q}$ pour tout $x \in D(\mathfrak{Q})$.

(iv) Il existe un entier naturel m tel que $Z \cap D_m$ soit fini et pour lequel on a la propriété suivante : pour tout $n \geqslant m$, l'ensemble $F(n) = Z \cap (D_{n+1}\backslash D_n)$ est fini et il existe une fraction rationnelle S_n sans pôle dans D telle que $R_{F(n)}(x) - S_n(x) \in \mathfrak{P}_n$ pour tout $x \in D_n$.

Démonstration. - Soit $\mathfrak{Q}$ un idéal premier non nul de $\mathfrak{a}$. L'ensemble $D(\mathfrak{Q})$ est un $\mathfrak{Q}$-ouvert donc, d'après la proposition (1.4), l'ensemble $Z \cap D(Q)$ est fini.

D'après le Lemme (3.1), il existe un idéal premier non nul $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{a}$ tel que $f(x) \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{P}}$ pour tout $x \in \mathfrak{P}$. Donc $\mathfrak{P} \cap Z = \emptyset$.

Soient $\mathfrak{Q}$ un idéal premier non nul de $\mathfrak{a}$ contenu dans $\mathfrak{P}$, V un $\mathfrak{Q}$-ouvert contenu dans D, et R la partie principale de f dans V.

Posons $U = V \cup \mathfrak{P}$. $f-R$ n'a pas de pôle dans U. U est un $\mathfrak{Q}$-ouvert, donc $f-R$ est élément analytique sur U et, par conséquent, il existe une fraction rationnelle $h \in K(X)$ sans pôle dans U telle que $(f-R-h)(x) \in \mathfrak{Q}$ pour tout $x \in U$.

D'autre part, f est élément analytique sur $\mathfrak{P}$. $\mathfrak{P}$ est égal à son $\mathfrak{Q}$-intérieur, $f(x) \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{Q}}$ pour tout $x \in \mathfrak{Q}$: d'après le lemme (3.3), il existe une $\mathfrak{Q}$-fraction rationnelle g telle que $f(x) - g(x) \in \mathfrak{Q}$ pour tout $x \in \mathfrak{P}$. On en déduit que la fraction rationnelle $\ell = g - R - h$ est une $\mathfrak{Q}$-fraction, et que R est la partie principale dans V de la $\mathfrak{Q}$-fraction $g - \ell$ (puisque h est sans pôle dans V). Il résulte du théorème (2.4) que R est une $\mathfrak{Q}$-fraction.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier non nul de $\mathfrak{a}$ défini en (ii), et soient $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}'$ deux idéaux premiers non nuls de $\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{Q}' \subsetneq \mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}$. L'ensemble $D(\mathfrak{Q}')\backslash D(\mathfrak{Q})$ est un $\mathfrak{Q}'$-ouvert, donc $F = Z \cap (D(\mathfrak{Q}')\backslash D(\mathfrak{Q}))$ est un ensemble fini.

Pour chaque $a \in F$, on désigne par $\mathfrak{Q}(a)$ le plus grand idéal premier tel que $a \in D(\mathfrak{Q}(a))$ (on a ainsi $\mathfrak{Q}' \subset \mathfrak{Q}(a) \subsetneq \mathfrak{Q}$), et on note

$$F(a) = \{b \in F \; ; \; b - a \in \mathcal{Q}(a)\} .$$

La famille $\{F(a)\}_{a\in F}$ est une partition de F. Il suffit de montrer que, pour chaque $a \in F$, il existe une fraction rationnelle S_a sans pôle dans D telle que $R_{F(a)}(x) - S_a(x) \in \mathcal{Q}$ pour tout $x \in D(\mathcal{Q})$.

D'après (ii), $R_{F(a)}$ est une $\mathcal{Q}(a)$-fraction. D'autre part, tous ses pôles sont $\mathcal{Q}(a)$-proches de a, et $a \in \mathfrak{A}_{\mathcal{Q}(a)}\setminus\mathcal{Q}$. Deux cas peuvent se présenter :

<u>1er cas</u> : Pour tout idéal premier $\mathcal{R} \supsetneqq \mathcal{Q}(a)$, $a \notin \mathfrak{A}_{\mathcal{R}}$, alors, d'après le lemme (2.6.1), il existe un polynôme $g \in K[X]$ tel que

$$R_{F(a)}(x) - g(x) \in \mathcal{Q}(a) , \quad \forall\, x \in \mathfrak{A}_{\mathcal{Q}(a)} (a + \mathcal{Q}(a)) .$$

Or $\mathcal{Q}(a) \subsetneqq \mathcal{Q}$ et $D(\mathcal{Q}) \subset \mathfrak{A}_{\mathcal{Q}(a)}\setminus(a + \mathcal{Q}(a))$, donc

$$R_{F(a)}(x) - g(x) \in \mathcal{Q} , \quad \forall\, x \in D(\mathcal{Q}) .$$

<u>2e cas</u> : Il existe des idéaux $\mathcal{R}$ contenant strictement $\mathcal{Q}(a)$ et tels que $a \in \mathfrak{A}_{\mathcal{R}}$, mais alors, pour de tels idéaux, on a $(a + \mathcal{R}) \not\subset D$ puisque $a \notin D(\mathcal{R})$. Appliquons le lemme (2.6.2.) à la fraction $R_{F(a)}$. On en déduit qu'il existe un idéal $\mathcal{R}$, tel que $\mathcal{Q}(a) \subsetneqq \mathcal{R} \subset \mathcal{Q}$ et $a + \mathcal{R} \not\subset D$, un point $c \in \mathcal{R}\setminus\mathcal{Q}(a)$, tel que $b = a - c$ ne soit pas dans D, et une fraction rationnelle g ayant pour unique pôle b et telle que

$$R_{F(a)}(x) - g(x) \in \mathcal{R} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathfrak{A}_{\mathcal{R}}\setminus(a + \mathcal{R}) ,$$

donc

$$R_{F(a)}(x) - g(x) \in \mathcal{Q} \quad \text{pour tout} \quad x \in D(\mathcal{Q}) .$$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) : c'est immédiat.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) : Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, posons

$$u_n = \begin{cases} R_{F(n)} - S_n & \text{si} \quad n \geqslant m \\ R_{F(n)} & \text{si} \quad n < m \end{cases}$$

Ainsi, par hypothèse, $u_n(x) \in \mathcal{P}_n$ pour tout $x \in D_n$ et pour tout $n \geqslant m$.

Pour tout $x \in D\setminus Z$, la série $\sum_n u_n(x)$ est convergente.

Posons

$$\begin{cases} f(x) = \sum_n u_n(x) & \text{si} \quad x \in D\setminus Z \\ f(x) = \infty & \text{si} \quad x \in Z . \end{cases}$$

Si $n \geqslant m$, la série $\sum_{i\geqslant n} u_i(x)$ est uniformément convergente sur D_n, et sa somme f_n est un élément analytique sur D_n. D'autre part, $g_n = \sum_{i<n} u_i$ est une fraction rationnelle dont la partie principale dans D_n est égale à $\sum_{i<n} R_{F(i)}(X)$, et l'on a $f = g_n + f_n$.

Il en résulte que f est une fonction méromorphe sur D dont la partie principale sur $D_{n+1} \setminus D_n$ est $R_{F(n)}$, et ceci pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre : chapitres 4 à 7. - Paris, New York, Barcelone, Masson, 1981 (Eléments de Mathématique).

[2] FENEYROL-PERRIN (Yvette). - Fonctions analytiques dans les corps valués de rang supérieur à un, Compos. Math., Groningen, t. 49, 1983, p. 51-74.

[3] FENEYROL-PERRIN (Yvette). - Fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables sur certains corps valués au sens de Krull, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VI, 1980.

[4] FENEYROL-PERRIN (Yvette). - Fonctions analytiques dans certains corps valués au sens de Krull, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 5e année, 1977/78, n° 4, 13 p.

[5] FENEYROL-PERRIN (Yvette) et HADDAD (L.). - Un théorème de Mittag-Leffler pour les fonctions méromorphes sur un corps valué au sens de Krull (à paraître).

[6] KRASNER (M.). - Rapport sur le prolongement analytique dans les corps valués complets par la méthode des éléments analytiques quasi-connexes, Bull. Soc. math. France, Mémoire, t. 39-40, 1974, p. 131-254.

[7] LAZARD (Michel). - Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, 14, p. 47-76).