Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Michel Emsalem

Sur une généralisation de la conjecture de Leopoldt

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 11 (1983-1984), exp. n° 4, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1983-1984__11__A2_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
11e année, 1983/84, n° 4, 2 p.

7 novembre 1983

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA CONJECTURE DE LEOPOLDT

par Michel EMSALEM (*)

Soit k un corps de nombres de degré g galoisien sur le corps des rationnels Q, de groupe de Galois $G = Gal(k/Q)$ et soit p un nombre premier. On suppose k plongé dans C_p, le complété de la clôture algébrique de Q, muni de la valeur absolue p-adique $|\ |_p$. A chaque élément σ de G est associé ainsi le complété K_σ de k en une place au-dessus de p. Le problème du rang p-adique du groupe des unités E de k se réduit facilement à l'étude du rang p-adique dans l'espace $Y = \prod_{\sigma\in G} K_\sigma$ de l'adhérence de l'image de E par l'application diagonale (1), (2). L'étude de cette adhérence comme sous-module galoisien de Y conduit à des minorations de ce rang p-adique.

On peut plus généralement considérer à la place de E un sous-module galoisien M de type fini de $k^\times$ et après avoir défini son rang p-adique, énoncer une formule conjecturale (3). Soit $r_M^{(p)}$ ce rang p-adique, χ_M le caractère de la représentation $M \otimes_Z Q$ et $d(M)$ son degré. Si χ_{reg} est le caractère de la représentation régulière de G et si $\chi_M = \sum_i m_i \chi_i$ et $\chi_{reg} = \sum_i r_i \chi_i$ sont les décompositions de χ_M et de χ_{reg} en caractères irréductibles sur Q, on note

$$\chi_M \wedge \chi_{reg} = \sum_i \min(m_i , r_i) \chi_i$$

et r_M^{conj} le degré de ce caractère. On note enfin $\delta(M) = \delta(\chi_M) = \max_i(m_i \deg \chi_i)$ et $\delta_G = \delta(\chi_{reg})$.

THÉORÈME. - Si M est un sous-ZIGI-module de type fini de $k^\times$, ne contenant pas de puissance de p et qui possède un sous-ZIGI-module N tel que $\chi_M \geq \delta(N) \chi_N$, alors $r_M^{(p)} = r_N^{conj}$.

Définition. - Un ZIGI-module de type fini N de caractère χ_N sera dit saturé si $\chi_N = \sum_i n_i \chi_i$ et si pour tout i, $n_i = 0$ ou $n_i \geq r_i$.

COROLLAIRE 1. - Sous les hypothèses du théorème, si M et N sont composés des mêmes caractères irréductibles et si N est saturé, alors $r_M^{(p)} = r_M^{conj}$.

Soit S un ensemble de places de Q contenant la place de l'infini et ne contenant pas p. Un corollaire intéressant du théorème concerne le cas du groupe des S-unités

---

(*) Michel EMSALEM, Mathématiques, Université Paris-7, Tour 45-55, 2 Place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

$E_S = \{x \in k^\times$; pour toute place v de k n'appartenant pas à S , $|x|_v = 1\}$',

COROLLAIRE 2. - *Soit* $(D_l)_{l \in S}$ *la famille des classes de conjugaison des groupes de décompositions des places de* Q *contenues dans* S .

Si $\chi_{E_S} \geqslant \inf(\delta(\chi_{E_S}), \delta(\chi_{reg}))\ \chi_{E_S} \wedge \chi_{reg}$, *le rang p-adique de* E_S *est égal à son rang conjectural et le caractère de l'image de* E_S *dans* Y *est*

$$(\bigoplus_l \mathrm{Ind}_{D_l}^G 1_{D_l}) \wedge \chi_{reg} , (2).$$

La démonstration du théorème repose sur l'analyse de M comme module galoisien et sur un théorème de Waldschmidt permettant de minorer le rang de matrices à coefficients logarithmes de nombres algébriques (4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] EMSALEM (Michel). - Rang p-adique de groupes de S-unités d'un corps de nombres, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 297, 1983, série A, p. 225-227.

[2] EMSALEM (Michel). - Rang p-adique du groupe des S-unités d'un corps de nombres, journées "Algorithmique, Calcul formel et Arithmétique", [1983. Saint-Etienne], n° 32, 8 p..- Saint-Etienne, UER de Sciences, 1984.

[3] JAULENT (J. F.). - Sur l'indépendance ℓ-adique de nombres algébriques, J. of number Theory (à paraître).

[4] WALDSCHMIDT (Michel). - Transcendance et exponentielles en plusieurs variables, Invent. Math., t. 63, 1981, p. 97-127.