Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Daniel Barsky

Un calcul d'invariant λ

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 11 (1983-1984), exp. nº 1, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1983-1984__11__A1_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
11e année, 1983/84, n° 1, 3 p.

10 octobre 1983

UN CALCUL D'INVARIANT λ

par Daniel BARSKY (*)

Résumé. - On montre comment retrouver des valeurs de l'invariant λ d'Iwasawa, données par G. GRAS et K. RIBET, à l'aide de la construction de Kubota-Leopoldt des fonctions L p-adiques.

Introduction. - Soit p un nombre premier, $m \in \mathbb{N}$, $(m, p) = 1$, $m \geqslant 1$. Soit ε le caractère trivial sur $\mathbb{Z}$, ε_m le caractère trivial sur $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ étendu à $\mathbb{Z}$. Soit ψ un caractère de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ d'ordre une puissance de p, pair. On reprend les notations de [2]. On note $\sum_a^{(m,k,h)}$, $0 \leqslant k \leqslant p^h - 1$, une sommation sur les entiers a tels que :

(i) $$0 \leqslant a \leqslant mqp^h - 1 , \quad (a , p) = (a , m) = 1$$

(ii) $$\left|\frac{\log \langle a\rangle}{\log(1 + mq)} - k\right| \leqslant p^{-h}$$

où $q = p$ si $p \neq 2$, $q = 4$ si $p = 2$. On note ω le caractère de Teichmüller sur $\mathbb{Z}_p$, alors $\langle a\rangle = \frac{a}{\omega(a)}$, $|\ |$ est la valeur absolue sur $\mathbb{C}_p$ et $\log$ est le logarithme p-adique.

On a d'après [2] la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - *Soit ψ un caractère de Dirichlet pair sur $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$. On note $I_\psi(T)$ la série d'Iwasawa associée à $L_p(s , \psi)$. On a*

$$I_\psi(T) = \lim_{h\to\infty} \sum_{k=0}^{p^h-1} (1 + T)^k \sum_a^{(m,k,h)} \psi(a) \frac{\langle a\rangle - (1 + mq)^{-k}}{mqp^h} .$$

Une formule pour $\lambda\psi$. - Remarquons que, par construction,

$$\left|\frac{\langle a\rangle - (1 + mq)^{-k}}{mqp^h}\right| \leqslant 1 .$$

Si ψ est d'ordre une puissance de p, alors si $(a , m) = 1$, on a

$$|\psi(a) - 1| = p^{-\alpha} < 1 .$$

(*) Daniel BARSKY, Université Paris-7, LA 212, UER Math. et Inform., 2 place Jussieu 75251 PARIS CEDEX 05.

Donc

(1) $$I_\psi(T) \equiv \lim_{h\to\infty} \sum_{k=0}^{p^h-1} (1+T)^k \sum_a^{(m,k,h)} \frac{\langle a\rangle - (1+mq)^{-k}}{mqp^h} \mod \mathfrak{M}_p[[T]]$$

où $\mathfrak{M}_p$ est l'idéal maximal de $\underset{\sim}{C}_p$.

On a aussi dans [2] la proposition suivante.

PROPOSITION 2. - Soit

$$\alpha(p) = \frac{(1+q)(\log(1+q))(p-1)}{p} .$$

Si ε est le caractère trivial primitif on a :

(2) $$I_\varepsilon(T) = \frac{\alpha(p)}{T-q} + \lim_{h\to\infty} \sum_{k=0}^{p^h-1} (1+T)^k \sum_a^{(1,k,h)} \frac{\langle a\rangle - (1+q)^{-k}}{qp^h} .$$

On obtient alors en comparant (1) et (2) :

PROPOSITION 3. - On a avec les notations précédentes, ψ est d'ordre une puissance de p

$$(T-q)\, I_\psi((T+1)(1+q)(1+mq)-1)$$
$$\equiv I_\varepsilon(T)(T-q) \prod_{\ell | m,\ \ell \text{ premier}} \left(1-(1+T)^{-(\log\langle\ell\rangle/\log(1+mq))}\right) \mod \mathfrak{M}_p[[T]].$$

La démonstration est immédiate.

PROPOSITION 4. - [Cf. [3] ou [4]]. On a

$$\lambda_\psi = -1 + \sum_{\ell | m,\ \ell \text{ premier}} p^{n(\ell)}$$

où $n(\ell)$ est défini par $\langle\ell\rangle = 1 + qp^{n(\ell)}u$ avec $u \in \underset{\sim}{Z}_p^*$.

Preuve. - Rappelons, [2], que λ_ψ est le nombre de zéros de $I_\psi(T)$ dans le disque unité.

Par ailleurs il découle immédiatement de la proposition 2 que $(T-q)\, I_\varepsilon(T)$ est sans zéro dans le disque unité (en utilisant la théorie du polygône de Newton [1]). Enfin en utilisant la théorie du polygône de Newton, il est immédiat que $\lambda_\psi + 1$ est égal au nombre de zéros de

$$\prod_{\ell | m,\ \ell \text{ premier}} \left(1-(1+T)^{-(\log\langle\ell\rangle/\log(1+mq))}\right)$$

qui se calcule aisément.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Les nombres p-adiques. - Paris, Presses Universitaires de France, 1975 (Collection Sup, "Le Mathématicien, 14).

[2] BARSKY (Daniel). - Sur la norme de certaines séries d'Iwasawa, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 10e année, 1982/83, n° 13, 44 p.

[3] GRAS (Georges). - Canonical divisibilities of values of p-adic L-functions, "Journées arithmétiques, 1980" edited by J. V. Armitage, p. 291-299. - Cambridge, London, New York, Cambridge University Press, 1982 (London mathematical Society Lecture Note Series, 56).

[4] RIBET (Kenneth A.). - p-adic L-functions attached to characters of p-power order, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des Nombres, 19e année, 1977/78, n° 9, 8 p.