

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

MARIE-CLAUDE SARMANT-DURIX

Prolongement d'une série entière dont le disque de convergence est fermé

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 11 (1983-1984), exp. n° 22, p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1983-1984__11__A14_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1983-1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROLONGEMENT D'UNE SÉRIE ENTIÈRE
 DONT LE DISQUE DE CONVERGENCE EST FERMÉ

par Marie-Claude SARMANT-DURIX (*)

1. Introduction.

Soit $(K, |\cdot|)$ un corps valué ultramétrique complet, algébriquement clos. Nous nous proposons de chercher un prolongement analytique à une série de Taylor $f \in K[[X]]$ convergente dans un disque circonférencié $D(0, R)$ (problème évoqué notamment par P. ROBBA dans [R] ch. 15).

Rappelons que pour tout ensemble D de K on note $H(D)$ l'ensemble des éléments analytiques sur D , c'est-à-dire le complété pour la convergence uniforme sur D de l'ensemble des fractions rationnelles sans pôle dans D .

Nous allons construire un ensemble D admettant un T -filtre décroissant dont la plage est le disque de convergence de f , ainsi qu'un élément $\bar{f} \in H(D)$ qui se confond avec f dans son disque de convergence. Nous utiliserons notamment une matrice infinie de Vandermonde et montrerons son inversibilité grâce au T -filtre considéré.

Notations.

$$\begin{aligned} \forall r \in \underline{\mathbb{R}}^+ \quad D(0, r^-) &= \{x \in K ; |x| < r\} \\ D(0, r) &= \{x \in K ; |x| \leq r\} \\ D(\infty, r^+) &= \{x \in K ; |x| > r\}. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in \underline{\mathbb{N}}}^*$ une T -suite de $D(\infty, r^+)$ [S 1].

$\forall \rho \in \underline{\mathbb{R}}^+$, on pose

$$\Lambda_\rho(\mathcal{B}) = K \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} D(b_i, \rho^-).$$

Soit $\mathcal{B}' = (\beta_i)_{i \in \underline{\mathbb{N}}}^*$ une T -suite de $D(0, r^-)$.

$\forall \rho \in \underline{\mathbb{R}}^+$, on pose

$$\Delta_\rho(\mathcal{B}') = K \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} D(\beta_i, \rho^-).$$

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x^n$ une série de Taylor de $K[[X]]$, on notera [A]

$$v(f, \mu) = \inf_{n \in \underline{\mathbb{N}}} (v(\lambda_n) + n\mu)$$

(*) Marie-Claude SARMANT-DURIX, 16 boulevard Jourdan, 75014 PARIS.

si $\mu = |x|$, avec x dans le disque de convergence de f .

Enfin, on notera $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ la limite supérieure d'une suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$ sa limite inférieure.

Nous allons donc démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME.

1. - Soit f une série de Taylor à coefficients dans K de disque de convergence $D(0, R)$. Soit $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une T-suite de $D(\infty, \mathbb{R}^+)$. La série f se prolonge en une fonction analytique \bar{f} sur $K \setminus \mathcal{B}$, dont la restriction \bar{f}_ρ à $\Lambda_\rho(\mathcal{B})$ est un élément analytique.

2. - En outre, $\Lambda_\rho(\mathcal{B})$ admet un T-filtre croissant \mathcal{F} de centre 0, de diamètre R , et pour tout $\bar{h} \in H(\Lambda_\rho(\mathcal{B}))$ strictement annulé par \mathcal{F} , $\bar{f} + \bar{h}$ est un autre prolongement de f en un élément de $H(\Lambda_\rho(\mathcal{B}))$.

2. Utilité des matrices infinies.

Nous pouvons facilement nous ramener au cas $R = 1$. D'autre part, nous savons [S 2], que si \bar{f} est une fonction analytique sur $K \setminus \mathcal{B}$ dont la restriction \bar{f}_ρ à $\Lambda_\rho(\mathcal{B})$ est un élément analytique, alors, quelle que soit la T-suite \mathcal{C} de $D(\infty, \mathbb{R}^+)$, il existe une fonction analytique \bar{g} sur $K \setminus \mathcal{C}$, dont la restriction \bar{g}_ρ à $\Lambda_\rho(\mathcal{C})$ est un élément analytique, et telle que

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow R \\ x \in \Lambda_\rho(\mathcal{B}) \cap \Lambda_\rho(\mathcal{C})}} \bar{f}_\rho - \bar{g}_\rho = 0 \quad \forall \rho \in \mathbb{R}^+.$$

Il suffit donc de démontrer l'existence de \bar{f} pour une T-suite \mathcal{B} , comme (et le 2 du théorème est évident).

Nous partons donc de $f \in K[[X]]$, telle que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{avec } a_n \in K, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} = 1.$$

Nous cherchons \bar{f} sous la forme donnée par le théorème de Mittag-Löffler

$$\bar{f} = \sum_{i \geq 1} \frac{\epsilon_i}{1 - (x/b_i)}$$

où $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une T-suite de $D(\infty, 1^+)$ qu'on choisit idempotente et telle que

$$|b_i| > |b_{i+1}| \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$$

pour plus de commodité, et où $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de K , tendant vers 0 quand i devient infini.

Nous voudrions que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{i \geq 1}^{+\infty} \frac{\epsilon_i}{1 - (x/b_i)} \quad \forall x \in D(0, 1^-)$$

ce qui est équivalent à

$$a_n = \sum_{i \geq 1} \epsilon_i \times (1/b_i^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

ou encore, en posant $b_i = (1/\beta_i)$ (et alors (β_i) est une \mathbb{T} -suite idempotente de $D(0, 1^-)$, telle que $|\beta_i| < |\beta_{i+1}|$)

$$a_n = \sum_{i \geq 1} \epsilon_i \beta_i^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* .$$

Nous voyons donc s'introduire naturellement des matrices infinies $[J]$, soit, en posant

$$A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_i & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \beta_1^n & \beta_2^n & \dots & \beta_i^n & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \epsilon_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

le système d'égalités que nous cherchons à satisfaire est identique à l'équation matricielle

$$A = B.E .$$

Pour résoudre ce système, c'est-à-dire pour obtenir E connaissant A et B , il suffit donc en principe d'inverser B , c'est-à-dire de trouver une matrice B' telle que

$$BB' = B' B = I$$

$$B[B' A] = [BB'] A = A$$

ce qui entraîne

$$B' A = E .$$

Nous allons donc, après avoir rappelé les propriétés utiles des matrices infinies, chercher B' telle que $BB' = B' B = I$ pour B matrice de Vandermonde donnée, puis montrer qu'il existe une matrice de Vandermonde B telle que

$$B[B' A] = [BB'] A ,$$

la matrice colonne $E = B' A$ ayant son terme général ϵ_i qui tend vers 0 lorsque i devient infini.

3. Rappels sur les matrices infinies.

Définition 3.1. - Nous appellerons matrice infinie une famille $A = (a_{i,j})_{i \in \mathbb{N}^*, j \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de K , que nous noterons

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots \\ a_{2,1} & \dots & a_{i,j} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} .$$

De même, nous appellerons ligne infinie (resp. colonne infinie) une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de K notée

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$$

(resp. une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de K notée

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

On voit que le produit matriciel

$$U V = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$$

existe si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 0 .$$

De même, le produit matriciel $A V$ existe et est égal à la colonne infinie

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1,j} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} v_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

si et seulement si

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} a_{i,j} v_j = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}^* .$$

Le produit matriciel $U A$ existe et est égal à la ligne infinie

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i a_{i,1}, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} u_i a_{i,j}, \dots \right)$$

si et seulement si

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (u_i a_{i,j}) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}^* .$$

Si $B = ((b_{i,j}))_{i \in \mathbb{N}^*, j \in \mathbb{N}^*}$ est une autre matrice infinie, le produit matriciel AB existe et est égal à la matrice infinie

$$((\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} b_{j,k}))_{i \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}^*}$$

si et seulement si, pour tous i et k fixés, on a

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{i,j} b_{j,k} = 0 .$$

Définition 3.2. -

(i) Nous dirons qu'une ligne infinie (resp. une colonne infinie) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est évanescence si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

(ii) Nous dirons qu'une matrice infinie $A = ((a_{i,j}))_{i \in \mathbb{N}^*, j \in \mathbb{N}^*}$ est évanescence en ligne (resp. en colonne) si chacune de ses lignes infinies (resp. de ses colonnes infinies) est évanescence.

(iii) Nous dirons que A est globalement évanescence si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \text{ tel que } i + j \geq N(\epsilon) \implies |a_{i,j}| \leq \epsilon .$$

Le lemme 3.1 est immédiat en analyse ultramétrique

LEMME 3.1. - Soit $A = ((a_{i,j}))_{i \in \mathbb{N}^*, j \in \mathbb{N}^*}$ une matrice infinie globalement évanescence. Alors la famille $(a_{i,j})_{i,j}$ est sommable suivant le filtre des complémentaires des parties finies de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

COROLLAIRE. - Si une matrice infinie $A = ((a_{i,j}))$ est évanescence, alors les séries $\sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j})$ et $\sum_{j=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j})$ convergent et ont même somme.

Remarques.

1. - Le produit de matrices infinies n'est pas associatif ; nous aurons besoin de ce lemme pour montrer ici que $B(B' A) = (BB') A$.

2. - Nos notations utilisent l'indice 0 pour les éléments des colonnes, ce qui ne change rien à la théorie.

4. Inverse d'une matrice infinie de Vandermonde.

LEMME 4.1. - Soit $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une T-suite idempotente de valeur absolue strictement croissante de $C(0, 1[)$.

Soit B la matrice infinie correspondante

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_i & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \beta_1^n & \beta_2^n & \dots & \beta_i^n & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

Supposons qu'il existe une série $\varphi(x) \in K[[X]]$ dont les seuls zéros soient les
 β_i . Posons

$$\psi_i(x) = \frac{\varphi(x)}{1 - (x/\beta_i)}$$

$$\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\psi_i(\beta_i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{i,n} x^n .$$

Alors la matrice infinie $B' = ((\lambda_{i,n}))_{i \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie : $BB' = B' B = I$.

Démonstration

(a) $B' B = I$.

L'élément courant d'indices (i, k) de $B' B$, obtenu en multipliant la ligne d'ordre i par la colonne d'ordre k , est égal à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_{i,n} \beta_k^n = \varphi_i(\beta_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

(b) $BB' = I$.

L'élément courant d'indices (i, k) de BB' est égal à

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^n \lambda_{i,k} .$$

C'est là le coefficient de x^k dans le développement en série de

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^n \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_{i,k} x^k \right) .$$

Or (β_i) étant une T-suite idempotente, on sait que [R]

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{|x| \rightarrow 1 \\ x \in \Delta_\rho}} \varphi(x) = +\infty \\ \frac{1}{\varphi(x)} \in H(\Delta_\rho) \end{array} \right\} \forall \rho \in \mathbb{R}^+ .$$

Donc $(x^n/\varphi(x)) \in H(\Delta_\rho) \forall \rho \in \mathbb{R}^+$, et $(x^n/\varphi(x))$ admet un développement de

Mittag-Löffler dans Δ_ρ , de la forme

$$\frac{x^n}{\varphi(x)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^n \left[\frac{1 - (x/\beta_i)}{\varphi(x)} \right]_{x=\beta_i} \frac{1}{1 - (x/\beta_i)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\beta_i^n}{\psi_i(\beta_i)} \frac{1}{1 - (x/\beta_i)}$$

$$x^n = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\beta_i^n}{\psi_i(\beta_i)} \frac{\varphi(x)}{1 - (x/\beta_i)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^n \varphi_i(x) .$$

Le coefficient de x^k dans le développement en série entière de $\sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^n \varphi_i(x)$ est donc

$$1 \text{ si } k = n \text{ et } 0 \text{ si } k \neq n .$$

Remarques. - Nous n'avons pas utilisé dans le (a) le fait que (β_i) est une \mathbb{T} -suite ; B' existe et $B' B = I$, du moment que φ existe.

Au lieu de prendre

$$\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\psi_i(\beta_i)} ,$$

on peut prendre

$$\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\psi_i(\beta_i)} + \Lambda_i(x) \varphi(x)$$

où $\Lambda_i(x)$ est une série de Taylor convergente sur $C(0, 1^-)$ telle que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\Lambda_i(x)}{1 - x/\beta_i} = 0 \quad \forall x \text{ tel que } |x| < 1 .$$

La matrice B a donc une infinité d'inverses ; toutefois, nous n'avons besoin ici que de la forme indiquée dans le lemme 4.1.

5. Existence d'une suite (β_i) telle que $B' A$ existe et $B(B' A) = A$.

Nous aurons besoin de deux lemmes préparatoires au lemme 5.3.

LEMME 5.1. - Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} = 1 .$$

Il existe une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |\lambda_n|^{1/n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$$

$$\left| \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right| < \left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} \right| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n a_n = 0 .$$

Ce lemme est équivalent au lemme 5.1 (bis) obtenu en posant $u_n = v(a_n)$ et $v_n = v(\lambda_n)$..

LEMME 5.1 (bis). - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0 .$$

Il existe une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$$

$$v_{n+1} - v_{n+2} < v_n - v_{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n + u_n = +\infty .$$

Démonstration. - Soit $(u_{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de (u_n) définie par

$$u_{q_n} = \inf\{u_i ; i > q_{n-1}\}$$

$(u_{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

$$\lim_{q_n \rightarrow +\infty} u_{q_n} = +\infty$$

$$\lim_{q_n \rightarrow +\infty} \frac{u_{q_n}}{q_n} = 0 .$$

Nous pouvons encore extraire de la suite (u_{q_n}) une suite $(u_{q_{n_t}})$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_{q_{n_t}} = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u_{q_{n_t}}}{q_{n_t}} = 0 .$$

A partir d'un certain q_{n_t} , la suite de terme général

$$\frac{u_{q_{n_t+1}} - u_{q_{n_t}}}{q_{n_t+1} - q_{n_t}}$$

sera alors strictement décroissante et tendra vers 0 .

Pour résumer, disons qu'on peut extraire de la suite (u_n) une suite (u_{r_n}) croissante telle que

$$\lim_{r_n \rightarrow +\infty} u_{r_n} = +\infty$$

$$\lim_{r_n \rightarrow +\infty} \frac{u_{r_n}}{r_n} = 0$$

$$\left(\frac{u_{r_{n+1}} - u_{r_n}}{r_{n+1} - r_n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ strictement décroissante, de limite nulle.}$$

Posons alors

$$\varphi(t) = u_{r_n} + (t - r_n) \left(\frac{u_{r_{n+1}} - u_{r_n}}{r_{n+1} - r_n} \right) \text{ pour } r_n \leq t \leq r_{n+1} .$$

C'est une fonction affine par morceaux et concave, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \leq u_n$.

Etudions la série

$$g(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mu_m x^m \text{ où } v(\mu_m) = -\frac{\varphi(m)}{2} .$$

Elle est de rayon de convergence 1 , et

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} v(\mu_m) = -\infty .$$

Si le polygône de Newton de $g(x)$ n'a pas tous ses côtés de projection 1 sur l'axe des abscisses, il est facile de trouver une série $h(x)$ dont le polygône a tous ses côtés de projection 1 sur l'axe des abscisses, et une infinité de sommets communs avec celui de g , et qui se trouve au dessus de celui de g .

Posons

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n \text{ et } v(v_n) = v_n .$$

Alors

$$v_{n+1} - v_{n+2} < v_n - v_{n+1} ,$$

puisque les côtés du polygône de h sont de projection unité.

De plus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = 0 .$$

Enfin

$$v_n + \mu_n \geq -\frac{\varphi(n)}{2} + \varphi(n) = \frac{u_n}{2} .$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n + u_n = +\infty .$$

LEMME 5.2. - Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x^n$ une série de Taylor convergente dans un disque $D(0, R^-)$. L'ensemble des zéros de f est une suite de zéros simples (β_n) tels que $|\beta_n| < |\beta_{n+1}|$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si

$$\left| \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right| > \left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right| \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* .$$

On a alors

$$|\beta_n| = \left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right| \quad \forall n \in \mathbb{N}^* .$$

Preuve. - La suite (β_n) est une suite de zéros simples telle que $|\beta_n| < |\beta_{n+1}|$ si et seulement si les côtés du polygone de Newton de f sont de projection unité sur l'axe des abscisses. La pente d'un de ces côtés est alors ;

$$v(\lambda_{n+1}) - v(\lambda_n) = v\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right)$$

et la suite des pentes doit être strictement croissante. D'autre part

$$|\beta_n| = \left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right|$$

car

$$v(\beta_n) = -v\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right)$$

(β_n correspondant au côté qui joint les points $(n-1, v(\lambda_{n-1}))$ et $(n, v(\lambda_n))$).

LEMME 5.3. - Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de K telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = +\infty$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n|^{1/n} = 1$$

$$\left| \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right| < \left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} \right| \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

(a) Posons

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n .$$

Alors les zéros de $\varphi(x)$ sont simples et forment une T -suite idempotente (β_n)

telle que

$$|\beta_n| = \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right| .$$

Pour tout $i \in \underline{\mathbb{N}}^*$, posons ;

$$\psi_i(x) = \frac{\psi(x)}{1 - (x/\beta_i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i,n} x^n .$$

Alors la suite $(\alpha_{i,n})_{n \in \underline{\mathbb{N}}}$ vérifie encore

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_{i,n}| &= +\infty \\ |\alpha_{i,n}| &> |\alpha_{i,n-1}| \quad \forall n \in \underline{\mathbb{N}}^* . \end{aligned}$$

En outre

$$|\alpha_{i,n}| \leq |\lambda_n| \quad \forall n \in \underline{\mathbb{N}}$$

et

$$|\psi_i(\beta_i)| = |\lambda_i| |\beta_i|^i \quad \forall i \in \underline{\mathbb{N}}^* .$$

Preuve

(a) On sait grâce au corollaire du lemme que les zéros de φ sont simples et forment une suite (β_n) telle que

$$|\beta_n| = \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right| \quad \forall n \in \underline{\mathbb{N}}^* .$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = +\infty$$

on sait que

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} v(\varphi, \mu) = -\infty$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\lambda_n| |\beta_n|^n = +\infty$$

car

$$v(\varphi, v(\beta_n)) = v(\lambda_n) + nv(\beta_n) .$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\beta_n|^n}{|\beta_1|, \dots, |\beta_n|} = +\infty .$$

(b) Les zéros de ψ_i sont ceux de ψ à l'exception de β_i , et donc on a récipro-

quement

$$|\alpha_{i,n}| > |\alpha_{i,n-1}| .$$

D'autre part, on déduit par identification de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n = (1 - \frac{x}{\beta_i}) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i,n} x^n$$

que

$$\alpha_{i,n} = \frac{1}{\beta_i^n} \sum_{\nu=0}^n \lambda_{\nu} \beta_i^{\nu} = - \frac{1}{\beta_i^n} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \lambda_{\nu} \beta_i^{\nu} .$$

D'où

$$|\alpha_{i,n}| \leq \sup_{\nu \geq n+1} |\lambda_{\nu}| |\beta_i|^{\nu-n} < |\lambda_n| .$$

Enfin, puisque ψ_i n'a pas de zéros sur $C(0, |\beta_i|)$

$$v(\psi_i(\beta_i)) = v(\psi_i, v(\beta_i)) = v(\alpha_{i,i-1}) + (i-1) v(\beta_i) .$$

Or

$$\alpha_{i,i-1} = \frac{1}{\beta_i^{i-1}} \sum_{\nu=0}^{i-1} \lambda_{\nu} \beta_i^{\nu}$$

entraîne

$$v(\alpha_{i,i-1}) = v(\lambda_{i-1}) .$$

Donc

$$v(\psi_i(\beta_i)) = v(\lambda_{i-1}) + (i-1) v(\beta_i) = v(\lambda_i) + i v(\beta_i)$$

$$|\psi_i(\beta_i)| = |\lambda_i| |\beta_i|^i$$

LEMME 5.4. - Soit $f \in K[[X]]$ une série convergente dans le disque fermé $D(0,1)$ qu'on note

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

La suite (a_n) vérifie alors les hypothèses du lemme 5.1, et il existe donc une suite (λ_n) qui en vérifie les conclusions. Posons

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x^n .$$

Soit (β_i) la suite des zéros de φ , et soient

$$\psi_i(x) = \frac{\varphi(x)}{1 - (x/\beta_i)}$$

$$\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\psi_i(\beta_i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_{i,n} x^n .$$

Alors

- (i) la matrice $B' = ((\lambda_{i,n}))$ est évanescence en colonne ;
- (ii) la matrice colonne $B' A$, où A est la matrice colonne des (a_n) , existe et est évanescence ;
- (iii) B étant la matrice de Vandermonde des (β_i) , $B(B' A) = A$.

Preuve.

(i) En utilisant les notations du lemme, on voit que

$$|\lambda_{i,n}| = \frac{|\alpha_{i,n}|}{|\psi_i(\beta_i)|} < \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_i| |\beta_i|^i} .$$

Et comme

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} |\lambda_i| |\beta_i|^i = +\infty .$$

Alors

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} |\lambda_{i,n}| = 0 \text{ à } n \text{ constant.}$$

(ii) Le terme général de la matrice colonne $B' A$ est

$$\epsilon_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_{i,n} a_n$$

Or

$$|\lambda_{i,n} a_n| < \frac{|\lambda_n a_n|}{|\psi_i(\beta_i)|} .$$

Comme, d'après le choix des λ_n (lemme 5.1),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n a_n = 0$$

on voit que ϵ_i existe.

D'autre part

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} |\epsilon_i| < \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\psi_i(\beta_i)|} \times \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n a_n|$$

et comme

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\psi_i(\beta_i)|} = 0 .$$

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} |\epsilon_i| = 0 .$$

(iii) Pour montrer que $B(B' A) = (BB') \ast = A$, il suffit de montrer que pour chaque ligne de B ;

$$U_k = (\beta_1^k, \dots, \beta_i^k, \dots)$$

on a bien

$$U_k(B' A) = (U_k B') A$$

$$U_k(B' A) = \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^k \epsilon_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_{i,n} a_n \right)$$

$$(U_k B') A = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^k \lambda_{i,n} \right) a_n .$$

D'après le corollaire du lemme, il suffit de montrer que

$$\lim_{i+n \rightarrow +\infty} \beta_i^k \lambda_{i,n} a_n = 0 .$$

$$|\beta_i^k \lambda_{i,n} a_n| < \frac{|\lambda_n a_n|}{|\lambda_i| |\beta_i|^k} |\beta_i|^k$$

$$|\beta_i^k \lambda_{i,n} a_n| < \frac{|\lambda_n a_n|}{|\lambda_i| |\beta_i|^k} .$$

Soit

$$M = \sup_{n \in \underline{\mathbb{N}}} |\lambda_n a_n|$$

$$m = \inf_{n \in \underline{\mathbb{N}}}^* |\lambda_i| |\beta_i|^k .$$

Soit $\epsilon > 0$; il existe

$$P \in \underline{\mathbb{N}} \text{ tel que } n \geq P \text{ entraîne } |\lambda_n a_n| \leq \epsilon m$$

$$Q \in \underline{\mathbb{N}} \text{ tel que } i \geq Q \text{ entraîne } |\lambda_i \beta_i|^k \geq \frac{M}{\epsilon}$$

d'où

$$i + n \geq P + Q \text{ entraîne : } \begin{cases} \text{ou } n \geq P : \frac{|\lambda_n a_n|}{|\lambda_i \beta_i|^k} \leq \frac{\epsilon m}{M} \\ \text{ou } i \geq Q : \frac{|\lambda_n a_n|}{|\lambda_i \beta_i|^k} < \frac{\epsilon M}{M} . \end{cases}$$

6. Récapitulation.

Nous partons d'une série $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, convergente sur $D(0, 1)$. Nous constatons alors l'existence d'une suite $(\lambda_n)_{n \in \underline{\mathbb{N}}}$ de K qui vérifie les hypothèses du lemme 5.1, puis d'une T -suite idempotente $(\beta_i)_{i \in \underline{\mathbb{I}}}$ de $D(0, 1^-)$, constituée des zéros de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x^n$.

Nous pouvons alors vérifier grâce au lemme 4.1 que la matrice de Vandermonde B associée à la suite (β_i) est inversible et a un inverse B' , puis grâce au lemme 5.4, l'existence d'une matrice évanescence $E = B' A$, telle que $A = BE$.

L'équation matricielle du 2 est donc vérifiée.

Si on appelle $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite des éléments de E , on a bien

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{i \geq 1} \frac{\epsilon_i}{1 - \beta_i x} \quad \forall x \in D(0, 1^-).$$

En revenant à $b_i = \frac{1}{\beta_i}$, on voit que f est bien prolongée par \bar{f} , élément analytique sur chaque Λ_{ρ}^i .

BIBLIOGRAPHIE

- [A] AMICE (Yvette). - Les nombres p -adiques, préface de Ch. Pisot. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "Le Mathématicien", 14).
 - [J] JÄRVINEN (Richard D.). - Finite and infinite dimensional linear spaces. - New York, Basel, M. Dekker, 1981 (Pure and applied Mathematics. Dekker, 66).
 - [R] ROEBA (Philippe). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, "Prolongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques", Astérisque, n° 10, 1973, p. 109-216.
 - [S 1] SARMANT-DURIX (Marie-Claude). - Décomposition en produit de facteurs de fonctions méromorphes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 292, 1981, série 1, p. 127-130.
 - [S 2] SARMANT-DURIX (Marie-Claude). - Propriétés algébriques des produits infinis, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 10e année, 1982/83, n° 11, 14 p.
-