Marie-Françoise Coste Roy

Sur les analogies entre le réel et le p-adique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 11 (1983-1984), exp. n° 21, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1983-1984__11__A13_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
11e année, 1983/84, n° 21, 3 p.
7 mai 1984

SUR LES ANALOGIES ENTRE LE RÉEL ET LE p-ADIQUE

par Marie-Françoise COSTE ROY (*)

Dans tout cet exposé p est un nombre fixé.

1. Analogue p-adique du 17e problème de Hilbert et du Nullstellensatz.

Dans [2], KOCHEN introduit la fonction :

$$\gamma(x) = [(x^p - x) - (x^p - x)^{-1}]^{-1}$$

qui envoie n'importe quel élément de $\mathbb{Q}_p$ sur un élément de $\mathbb{Z}_p$. Cette fonction est l'analogue p-adique de l'élévation au carré dans le cas réel (qui envoie tout élément de $\mathbb{R}$ sur un élément de $\mathbb{R}^+$). La fonction γ est définie pour tout corp K. Si on appelle R l'anneau engendré par $\gamma(K)$, T la partie multiplicative $\{1 + pa ; a \in \mathbb{R}\}$, et Γ la clôture intégrale de $T^{-1} R$ dans K, on a le résultat suivant, dans le cas où $K = \mathbb{Q}_p(X_1, \ldots, X_n)$:

(H_p) <u>Une fraction rationnelle</u> F <u>du corps</u> $\mathbb{Q}_p(X_1, \ldots, X_n)$ <u>appartient à l'ensemble</u> Γ <u>si, et seulement si, pour tout point</u> $(x_1, \ldots, x_n)$ <u>de</u> $\mathbb{Q}_p^n$ <u>où elle est définie, elle prend une valeur dans</u> $\mathbb{Z}_p$.

La démonstration de ce résultat, due à KOCHEN, est analogue à celle donnée par ARTIN au 17e problème de Hilbert :

(H_∞) <u>Une fraction rationnelle</u> F <u>du corps</u> $\mathbb{R}(X_1, \ldots, X_n)$ <u>est une somme de carrés de fractions rationnelles si, et seulement si, pour tout point</u> $(x_1, \ldots, x_n)$ <u>de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>où elle est définie, elle prend une valeur positive ou nulle,</u>

et repose sur la théorie des corps formellement p-adiques (analogues des corps formellement réels) et des corps p-adiquement clos (analogues des corps réels clos).

Le Nullstellensatz p-adique qu'on trouve chez PRESTEL et ROQUETTE [4] est le résultat suivant :

(N_p) <u>Soient</u> $P_1, \ldots, P_n$ <u>des polynômes de</u> $\mathbb{Q}_p[X_1, \ldots, X_n]$. <u>Le polynôme</u> P <u>de</u> $\mathbb{Q}_p[X_1, \ldots, X_n]$ <u>s'annule en tout point</u> $(x_1, \ldots, x_n)$ <u>de</u> $\mathbb{Q}_p^n$ <u>où les polynômes</u> $P_1, \ldots, P_n$ <u>sont nuls si, et seulement si, il existe un entier</u> N, <u>des polynômes</u> $A_1, \ldots, A_n$ <u>et des éléments</u> $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ <u>de</u> Γ <u>tels que</u>

$$P^N = \lambda_1 A_1 P_1 + \ldots + \lambda_n A_n P_n .$$

(*) Marie-Françoise COSTE ROY, 14 rue de la Rabine, 35510 CESSON SÉVIGNÉ.

Ce résultat est démontré par les mêmes techniques que son analogue réel, dû à DUBOIS :

(N_∞) Soient $P_1, \ldots, P_n$ des polynômes de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Le polynôme P de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ s'annule en tout point de $\mathbb{R}^n$ où les polynômes $P_1, \ldots, P_n$ sont nuls si, et seulement si, il existe un entier N, des polynômes $A_1, \ldots, A_n$ et des sommes de carrés de fractions rationnelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$P^N = \lambda_1 A_1 P_1 + \ldots + \lambda_n A_n P_n .$$

Remarquons toutefois qu'il existe un Nullstellensatz réel, dû à RISLER, qui est plus général que celui de DUBOIS car valable aussi pour des anneaux de corrdonnées de variétés non irréductibles :

(N'_∞) Soient $P, P_1, \ldots, P_n$ des polynômes de l'anneau $\mathbb{R}[V]$ d'une variété réelle. Le polynôme P s'annule en tout point de V où les polynômes $P_1, \ldots, P_n$ sont nuls si, et seulement si, il existe un entier N et des polynômes $Q_1, \ldots, Q_p$, $R_1, \ldots, R_n$ de $\mathbb{R}[V]$ tels que

$$P^{2N} + Q_1^2 + \ldots + Q_p^2 = R_1 P_1 + \ldots + R_n P_n .$$

Ce résultat est lié à la notion d'idéal réel (c'est-à-dire un idéal I tel que si $x^{2m} + a_1^2 + \ldots + a_n^2$ appartient à I, alors il en est de même de x). Comme on n'a, semble-t-il, pas de bonne notion d'idéal p-adique, le Nullstellensatz réel de RISLER n'a pas d'analogue p-adique. Cette question semble liée au fait que les sommes de carrés sont définies dans tout anneau, alors que la fonction γ n'est définie que pour les corps.

2. Analogue p-adique des ensembles semi-algébriques.

Les ensembles de $\mathbb{R}^n$ qui sont définis par une combinaison booléenne d'inégalités polynomiales s'appellent ensembles semi-algébriques. Ces ensembles jouissent d'une remarquable propriété : ils sont stables par projection. Ce résultat est une forme géométrique affaiblie du théorème de Tarski-Seidenberg d'élimination des quantifications pour un corps réel clos. En gros, projeter revient à faire intervenir un quantificateur existentiel ; dire que l'ensemble obtenu est semi-algébrique revient à éliminer ce quantificateur.

Dans [3], Mac INTYRE utilise le langage des corps munis d'un prédicat V qui représente l'anneau de valuation $(V(y) = \{|y| \leqslant 1\})$ et, pour chaque n, d'un prédicat R_n qui représente les puissances n-ièmes $(R_n(y) = \{\exists\, x ;\ x^n = y\})$. Les ensembles définissables de $\mathbb{Q}_p^n$ sont alors définis par combinaison booléenne à partir des ensembles définis par les prédicats de base. Des méthodes de théorie des modèles permettent de démontrer que les ensembles définissables sont stables par projection.

Dans [1], DENEF utilise les ensembles définissables pour calculer explicitement certaines intégrales et pour montrer, sans utiliser la résolution des singularités, son théorème sur la rationalité des séries de Poincaré.

3. Spectre p-adique.

D'après le théorème de finitude de la géométrie algébrique réelle, tout fermé semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$ est une union finie d'ensembles semi-algébriques définis par un nombre fini d'inégalités polynômiales larges (en particulier ces ensembles sont décrits sans inégalité stricte !). Dans [5], ROBINSON démontre un résultat analogue pour $\mathbb{Q}_p$: tout ensemble fermé définissable de $\mathbb{Q}_p^n$ est une union finie d'ensembles définis par un nombre fini de conditions de la forme $t = t'$, $V(t)$, $R_n(t)$, où t est fabriqué à l'aide de $+$, de $\times$, d'éléments de $\mathbb{Q}_p$ et de variables (en particulier, il n'y a pas de passage au complémentaire). Il étudie ensuite le spectre p-adique d'un anneau (analogue du spectre réel introduit depuis quelques années en géométrique algébrique réelle). Disons seulement que les points du spectre p-adique de l'anneau A sont définis par les morphismes de A dans un corps p-adiquement clos, et que, dans le cas de l'anneau $A = \mathbb{Q}_p[X_1 , \dots , X_n]$, le spectre p-adique de A contient $\mathbb{Q}_p^n$ avec sa topologie canonique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DENEF. - The rationality of the Poincaré series associated to the p-adic points of a variety, Preprint.

[2] KOCHEN (Simon). - Integer valued rational functions over the p-adic numbers : A p-adic analogue of the theory of real fields, "Number theory", p. 57-73. - Providence, American mathematical Society, 1969 (Proceedings of symposia in pure Mathematics, 12).

[3] Mac INTYRE (Angus). - On definable subsets of p-adic fields, J. of symb. Logic, t. 41, 1976, p. 605-610.

[4] PRESTEL (A.) and ROQUETTE (P.). - Lectures on formally p-adic fields. - Berlin, Springer-Verlag, 1984 (Lecture Notes in Mathematics, 1050).

[5] ROBINSON (E.). - Affine schemes in p-adic geometry, Ph. D. Cambridge.